

山西省大同市 2023-2024 学年高二上学期期末质量监测数
学试题

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 直线 l 过点 $A(4,5)$, $B(1,-1)$, 则直线 l 在 y 轴上的截距是 ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. 3 C. $-\frac{3}{2}$ D. -3

2. 曲线 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $(9, f(9))$ 处的切线方程为 ()

- A. $x - 6y + 9 = 0$ B. $3x - 2y - 21 = 0$

- C. $9x - 2y - 75 = 0$ D. $x - 2y + 3 = 0$

3. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $a_{1011} + a_{1012} + a_{1013} = 6$, 则 $S_{2023} =$ ()

- A. 8092 B. 4048 C. 4046 D. 2023

4. 函数 $f(x) = \frac{e}{x} + \ln x$ 的单调递减区间是 ()

- A. $(-\infty, e)$ B. $(0, e)$ C. $(1, e)$ D. $(0, 1)$

5. 设圆 $M: x^2 + y^2 = 4$, 圆 $N: (x-3)^2 + (y-4)^2 = R^2 (R > 0)$, 则 $R = 3$ 是两圆相切的 ()

- A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 若椭圆 C_1 的离心率和双曲线 C_2 的离心率恰好是关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 的两个

实根, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ D. $(0, 1)$

7. 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点, 点 P 在椭圆上, O 是坐标原点,

且 $|\overline{OP}| = \sqrt{11}$, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积等于 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. 3

8. 已知 $a > 0, b > 0$ 且满足 $ab - 2b + b \ln(ab) = e$, 则下列结论一定正确的是 ()

- A. $ab > e$ B. $ab < e$ C. $ab > e^2$ D. $ab < e^2$

二、多选题

9. 已知空间四点 $A(-1, 1, 0), B(2, 2, 1), C(1, 1, 1), D(0, 2, 3)$, 则下列四个结论中正确的是 ()

- A. $AB \perp CD$ B. $AD = \sqrt{11}$
C. 点 A 到直线 BC 的距离为 $\sqrt{7}$ D. 点 D 到平面 ABC 的距离为 $\sqrt{5}$

10. 已知双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{25-m} + \frac{y^2}{9-m} = 1$, 则 ()

- A. $9 < m < 25$ B. C 的焦点可以在 y 轴上
C. C 的焦距一定为 8 D. C 的渐近线方程可以为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 首项 $a_1 = 2$, 且满足 $a_{n+1} + a_n = 4 \cdot 3^n$, 则下列四个结论中正确的是 ()

- A. 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列 B. $S_5 = 362$
C. $S_{2n} = \frac{3^{2n+1} - 3}{2}$ D. $S_{n+1} - S_n = 3^{n+1} + (-1)^{n+1}$

12. 已知点 P 是焦点为 A 的抛物线 $y^2 = 4x$ 上的一个动点, $B(3,0)$, 则 ()

A. $|PA|$ 的最小值为 1

B. $|PA| + |PB|$ 的最小值为 4

C. $|PB|$ 的最小值为 3

D. $\angle APB$ 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$

三、填空题

13. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_3 = 1$, $a_7 = 8$, 则 $a_5 = \underline{\hspace{1cm}}$.

14. 点 F_1 , F_2 分别是双曲线 $E: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的左、右焦点, 点 P 在 E 上, 且 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$,

则 $\triangle F_1PF_2$ 的周长是 $\underline{\hspace{1cm}}$.

15. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过 F 的直线 $l: 3x - 4y + m = 0$ 与 C 交于 A , B

两点, 且点 A 在第一象限, 若 $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{FB}$, 则 $\lambda = \underline{\hspace{1cm}}$.

16. 已知函数 $f(x) = (x-t)^2 + (e^x - t + 3)^2$, 其中 $t \in \mathbf{R}$, 若 $\exists x_0$ 使得 $f(x_0) \leq 8$ 成立, 则

实数 t 的取值集合为 $\underline{\hspace{1cm}}$.

四、解答题

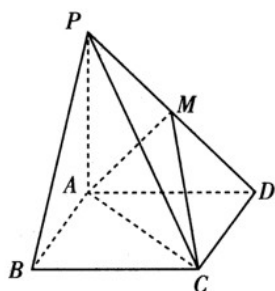
17. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + mx + n$ 在 $x=1$ 时取得极值.

(1) 求实数 m 的值;

(2) 若对于任意的 $x \in [2, 4]$, $f(x) > n^2$ 恒成立, 求实数 n 的取值范围.

18. 已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, 侧棱 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 点 M

在线段 PD 上, 直线 $PB \parallel$ 平面 MAC , $PA = AD = 1$.



(1) 求证: 点 M 为 PD 中点;

(2) 求平面 PAC 与平面 MAC 夹角的余弦值.

19. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 P 到 y 轴的距离等于点 P 到点 $(2,0)$ 的距离, 记动点

P 的轨迹为 E , 倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线 l 与 E 交于 A, B 两点.

(1) 求 E 的方程;

(2) 以 AB 为直径的圆能否经过坐标原点 O ? 若能, 求出直线 l 的方程; 若不能, 请说明理由.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n + 6 = 2a_n$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{a_n}{S_n \cdot S_{n+1}}$, 数列

$\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 T_n .

21. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 一个焦点在直线 $y = \sqrt{3}x - 3$ 上.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设经过原点 O 的两条互相垂直的直线分别与椭圆 E 相交于 A, B 两点和 C, D 两点.

求四边形 $ACBD$ 的面积的最小值.

22. 已知函数 $f(x) = e^x + 2f'(0)x - \cos x$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 讨论 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的零点个数.

参考答案:

1. D

【分析】求出直线 l 的方程, 令 $x=0$ 可解.

【详解】由题可得直线 l 的斜率 $k = \frac{-1-5}{1-4} = 2$,

再由点斜式方程可得 $y-5=2(x-4)$,

化简可得 $y=2x-3$, 令 $x=0$,

则直线 l 在 y 轴上的截距为 -3 .

故选: D.

2. A

【分析】求出 $f(9)=3$, 求导, 得到切线斜率, 求出切线方程.

【详解】由题得 $f(9)=\sqrt{9}=3$, 切点坐标为 $(9,3)$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,

所以函数 $f(x)$ 在切点 $(9,3)$ 处的切线斜率 $k=f'(9)=\frac{1}{6}$,

切线方程为 $y-3=\frac{1}{6}(x-9)$, 化简得 $x-6y+9=0$.

故选: A.

3. C

【分析】由等差数列的性质得到 $a_{1012}=2$, 利用求和公式和等差数列性质求出答案.

【详解】由等差数列的性质可得 $a_{1011}+a_{1013}=2a_{1012}$, 所以 $3a_{1012}=6$, 解得 $a_{1012}=2$,

所以 $S_{2023}=\frac{2023(a_1+a_{2023})}{2}=2023a_{1012}=4046$.

故选: C.

4. B

【分析】根据题意，求得 $f'(x) = \frac{x-e}{x^2}$ ，令 $f'(x) < 0$ ，即可求得函数 $f(x)$ 的单调递减区间.

【详解】由函数 $f(x) = \frac{e}{x} + \ln x$ ，可得其定义域为 $(0, +\infty)$ ，且 $f'(x) = \frac{-e}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-e}{x^2}$ ，

令 $f'(x) < 0$ ，解得 $0 < x < e$ ，所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, e)$.

故选：B.

5. B

【分析】先根据两圆相切求出 R ，再根据充分条件和必要条件的定义即可得解.

【详解】由题可得圆 M 的圆心坐标为 $(0, 0)$ ，半径为 2，

圆 N 的圆心坐标为 $(3, 4)$ ，半径为 R ，

故圆心距 $|MN| = 5$ ，

因为两圆相切可分为外切和内切，

当两圆外切时，圆心距 $5 = 2 + R$ ，解得 $R = 3$ ；

当两圆内切时，圆心距 $5 = |R - 2|$ ，解得 $R = 7$ ，或 $R = -3$ （舍去），

所以 $R = 3$ 是两圆相切的充分不必要条件.

故选：B.

6. D

【分析】根据离心率得出 e_1 ， e_2 的范围，利用离心率恰好是关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 的

两不等实根，即可得出实数 m 的取值范围.

【详解】由椭圆与双曲线的性质可知，椭圆的离心率 $e_1 \in (0, 1)$ ，双曲线的离心率

$$e_2 \in (1, +\infty),$$

关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有两个不相等的实根 e_1, e_2 ,

$$\text{令 } f(x) = x^2 - 2x + m, \text{ 则 } \begin{cases} f(1) = -1 + m < 0, \\ f(0) = m > 0, \end{cases} \text{ 解得: } 0 < m < 1.$$

故选: D.

7. C

【分析】设出点 P 的坐标, 根据已知建立方程组, 求出点 P 的纵坐标即可求出面积.

【详解】椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的半焦距 $c = \sqrt{12-3} = 3$, 则 $|F_1F_2| = 2c = 6$, 设点 $P(x_0, y_0)$,

$$\text{于是 } \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 11 \\ x_0^2 + 4y_0^2 = 12 \end{cases}, \text{ 消去 } x_0 \text{ 得 } |y_0| = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{所以 } \triangle F_1PF_2 \text{ 的面积 } S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2} |F_1F_2| \cdot |y_0| = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

故选: C

8. A

【分析】根据对数运算性质转化已知得 $a + \ln a = \frac{e}{b} + \ln \frac{e}{b} + 1$, 构造函数 $f(x) = x + \ln x$, 根

据函数单调性可解.

【详解】等式 $ab - 2b + b \ln(ab) = e$, 等号两边同除以 b ,

$$\text{可得 } a - 2 + \ln(ab) = \frac{e}{b},$$

$$\text{所以 } a + \ln a = \frac{e}{b} - \ln b + 2,$$

$$\text{所以 } a + \ln a = \frac{e}{b} + (1 - \ln b) + 1,$$

$$\text{所以 } a + \ln a = \frac{e}{b} + \ln \frac{e}{b} + 1,$$

$$\text{构造函数 } f(x) = x + \ln x, \text{ 则 } f(a) = f\left(\frac{e}{b}\right) + 1,$$

显然, 函数 $f(x) = x + \ln x$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 内是增函数,

$$\text{所以 } a > \frac{e}{b}, \text{ 即 } ab > e.$$

故选: A.

【点睛】构造函数, 利用函数单调性证明不等式.

9. AB

【分析】根据空间向量的数量积的坐标运算公式, 空间的距离公式和点到直线、点到平面的距离的向量运算公式, 逐项判定, 即可求解.

【详解】对于 A 中, 由 $\overrightarrow{AB} = (3, 1, 1)$, $\overrightarrow{CD} = (-1, 1, 2)$, 可得 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, 所以 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$, 所以 A 正确;

对于 B 中, 由空间的距离公式, 可得 $AD = \sqrt{(-1-0)^2 + (1-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{11}$, 所以 B 正确;

$$\text{对于 C 中, 取向量 } \vec{a} = \overrightarrow{BA} = (-3, -1, -1), \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, -1, 0),$$

可得 $\vec{a}^2 = 11$, $\vec{a} \cdot \vec{u} = 2\sqrt{2}$, 所以点 A 到直线 BC 的距离为 $\sqrt{\vec{a}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{u})^2} = \sqrt{11 - 8} = \sqrt{3}$, 所以

C 错误;

对于 D 中, 由向量 $\overrightarrow{AB} = (3, 1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 0, 1)$, $\overrightarrow{AD} = (1, 1, 3)$,

设平面 ABC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 3x + y + z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2x + z = 0 \end{cases}$ ，

令 $x=1$ ，可得 $y=-1$ ， $z=-2$ ，所以 $\vec{n} = (1, -1, -2)$ ，

所以点 D 到平面 ABC 的距离为 $\frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD}|}{|\vec{n}|} = \frac{|1-1-6|}{\sqrt{1+1+4}} = \sqrt{6}$ ，所以 D 错误。

故选：AB.

10. ACD

【分析】根据方程为双曲线可得 $9 < m < 25$ ，且焦点在 x 轴上，即 A 正确，错误；易知焦距

为 8，且当 $m=13$ 时，渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ，可得 CD 正确。

【详解】由题意得 $(25-m)(9-m) < 0$ ，解得 $9 < m < 25$ ，即 A 正确；

可得双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{25-m} - \frac{y^2}{m-9} = 1$ ，故双曲线 C 的焦点一定在 x 轴上，所以 B 错

误；

易知双曲线 C 的焦距为 $2\sqrt{25-m+m-9} = 8$ ，所以 C 正确；

显然当 $m=13$ 时，双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ ，其渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ，所以 D

正确。

故选 ACD.

11. BCD

【分析】根据递推关系代入即可求解 AB，根据递推关系可证明 $\{a_n - 3^n\}$ 是首项为 -1，公比

为 -1 的等比数列，可得 $a_n = 3^n + (-1)^n$ ，即可利用分组求和，结合等比求和公式求解 CD.

【详解】对于 A 选项，

取 $n=1$ ，得 $a_2 + a_1 = 4 \times 3^1 = 12$ ，又 $a_1 = 2$ ，所以 $a_2 = 10$ ，

取 $n=2$ ，得 $a_3 + a_2 = 4 \times 3^2 = 36$ ，所以 $a_3 = 36 - 10 = 26$ ，显然 $a_2^2 \neq a_1 \cdot a_3$ ，

即数列 $\{a_n\}$ 一定不是等比数列，所以 A 错误；

对于 B 选项，

取 $n=2$ ，得 $a_3 + a_2 = 4 \times 3^2 = 36$ ，取 $n=4$ ，得 $a_5 + a_4 = 4 \times 3^4 = 324$ ，所以

$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 362$ ，所以 B 正确；

对于 C，D 选项，

由 $a_{n+1} + a_n = 4 \cdot 3^n$ ，得 $\frac{a_{n+1} - 3^{n+1}}{a_n - 3^n} = \frac{-a_n + 4 \cdot 3^n - 3^{n+1}}{a_n - 3^n} = \frac{-a_n + 3^n}{a_n - 3^n} = -1$ ，

又 $a_1 - 3 = -1$ ，所以 $\{a_n - 3^n\}$ 是首项为 -1 ，公比为 -1 的等比数列，所以

$a_n - 3^n = (-1) \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^n$ ，所以 $a_n = 3^n + (-1)^n$ ，

$$S_n = \frac{3 \times (1 - 3^n)}{1 - 3} + \frac{(-1) \times [1 - (-1)^n]}{1 - (-1)} = \frac{3^{n+1} - (-1)^{n+1} - 4}{2}, \quad S_{2n} = \frac{3^{2n+1} - (-1)^{2n+1} - 4}{2} = \frac{3^{2n+1} - 3}{2},$$

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} = 3^{n+1} + (-1)^{n+1},$$

所以 C，D 均正确。

故选:BCD.

12. AB

【分析】根据抛物线的焦半径公式，即可求解 AB，根据两点距离公式，结合二次函数的性质即可求解 C，根据两点斜率公式，结合正切的和差角公式，分类讨论，利用导数求解函数的最值，即可求解 D.

【详解】由抛物线方程 $y^2 = 4x$ ，得其焦点 $A(1, 0)$ ，准线方程为 $l: x = -1$ ，过 P 作 $PH \perp l$ 于

点 H ，则 $|PA| = |PH|$ ，显然当 P 在坐标原点时 $|PH|$ 有最小值，此时 $|PH| = 1$ ，即 $|PA|$ 的最小值为 1，所以 A 正确；

由于 $|PA| + |PB| = |PH| + |PB| \geq |BH|$ ，故当 P, B, H 三点共线时，即 P 在坐标原点时

$|PA| + |PB| = |PH| + |PB|$ 有最小值，此时 $|PH| + |PB| = |BH| = 1 + 3 = 4$ ，即 $|PA| + |PB|$ 的最小值为 4，所以 B 正确；

对于 C 选项，

$$\text{设 } P\left(\frac{m^2}{4}, m\right), \text{ 则 } |PB| = \sqrt{\left(\frac{m^2}{4} - 3\right)^2 + (m - 0)^2} = \sqrt{\frac{(m^2 - 4)^2 + 128}{16}}, \text{ 当 } m^2 = 4 \text{ 时, } |PB| \text{ 取得最}$$

小值，最小值为 $2\sqrt{2}$ ，所以 C 错误。

对于 D 选项，

根据抛物线的对称性，不妨设 $P(x, y) (y > 0)$ ，

若 $x = 1$ ，则 $P(1, 2)$ ， $|PA| = 2$ ， $|AB| = 2$ ，所以 $\tan \angle APB = \frac{2\pi}{2} = 1 \Rightarrow \angle APB = \frac{\pi}{4}$ ；

若 $x = 3$ ，则 $P(3, 2\sqrt{3})$ ， $|PB| = 2\sqrt{3}$ ， $|AB| = 2$ ，所以 $\tan \angle APB = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle APB = \frac{\pi}{6}$ ；

若 $x \neq 1$ 且 $x \neq 3$ ，此时 $y \neq 2$ 且 $y \neq 2\sqrt{3}$ ，

$$k_{PA} = \frac{y}{x-1}, \quad k_{PB} = \frac{y}{x-3}, \quad \text{所以 } \tan \angle APB = \frac{\frac{y}{x-3} - \frac{y}{x-1}}{1 + \frac{y}{x-3} \cdot \frac{y}{x-1}} = \frac{2y}{x^2 - 4x + 3 + y^2},$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/625004204043011101>