

培优冲刺 06 三角函数图像性质与解三角形归类



题型大集合

目录

题型一：图像求解析式	1
题型二：恒等变形与性质	5
题型三：利用对称性求零点和	9
题型四：能成立与恒成立求参数	12
题型五：图形 1：四边形型	15
题型六：图形 2：中线型	18
题型七：图形 3：角平分线型	20
题型八：图形 5：三角形高	23
题型九：图形 6：中线与重心型	26
题型十：图形综合：定比分点型	29
题型十一：范围与最值 1：基础型	32
题型十二：范围与最值 2：边系数不对称型	34
题型十三：范围与最值 3：无边长型	36
题型十四：范围与最值 4：比值型	39
题型十五：范围与最值 5：角边互错型	41
题型十六：范围与最值 6：角度最值型	43
题型十七：范围与最值 7：范围综合型	45
题型十八：相等角度转化型	48
题型十九：压轴 19 题 1：三角与数列结合型	51
题型二十：压轴 19 题 1：三角函数型新定义	55



题型大提升

题型一：图像求解析式



形如函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像及性质

(1) 图像变换：

① 相位变换： $y = \sin x \rightarrow y = \sin(x + \varphi)$ 的规则是：左加($\varphi > 0$)或右减($\varphi < 0$) $|\varphi|$ 个单位；

② 周期变换： $y = \sin(x + \varphi) \rightarrow y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的规则是：纵坐标不变，将横坐标缩小(伸长)为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍；

③ 振幅变换： $y = \sin(\omega x + \varphi) \rightarrow y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的规则是：横坐标不变，将纵坐标缩小(伸长)为原来的 $|A|$ 倍；

注意: $y = \sin \omega x \rightarrow y = \sin(\omega x + \varphi)$ 变换规则是: 先提取后者 x 的系数 ω , 然后在左(右)平移 $|\frac{\varphi}{\omega}|$ 个单位;

(2)基本性质: ①定义域: 解三角函数不等式用“数形结合” ②值域: 由内向外 ③单调性: 同增异减

(3)周期公式: ① $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ (或 $y = A \cos(\omega x + \varphi)$) 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ ② $y = |A \sin(\omega x + \varphi)|$ 的周期 $T = \frac{\pi}{|\omega|}$.

(3)对称性: 换元思想, 将 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 中的“ $\omega x + \varphi$ ”看成 $y = \sin x$ 中的“ x ”, 采用整体代入求解.

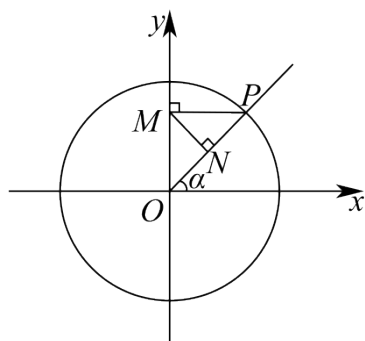
①对称轴: 最值处, 令 $\sin(\omega x + \varphi) = 1$, 则 $\omega x + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, 可求得对称轴方程;

②对称中心: 零点处, 令 $\sin(\omega x + \varphi) = 0$, $\omega x + \varphi = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 可求得对称中心的横坐标;

正弦“第一零点”: $x = 2k\pi$; 正弦“第二零点”: $x = \pi + 2k\pi$

余弦“第一零点”: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; 余弦“第二零点”: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

1. (2024·甘肃·一模) 如图, 角 $\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$ 的始边为 x 轴非负半轴, 终边与单位圆交于点 P , 过点 P 作 y 轴的垂线, 垂足为 M , M 到直线 OP 的距离为 $|MN|$. 若将 $|MN|$ 关于角 α 的函数关系记为 $y = f(x)$.



(1)求 $y = f(x)$ 的解析式;

(2)将 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 再将所得图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 求 $g(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 的单调递增区间.

【答案】(1) $f(x) = \frac{1}{2} |\sin 2x|$

(2) $[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{24}]$ 和 $[\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{24}]$

【分析】

(1) 根据条件得到直线 OP 的方程, 利用点到直线的距离公式进行计算即可;

(2) 根据函数图象的变换规则得到函数解析式后, 整体代入法求解单调区间即可.

【详解】(1) 可知 $P(\cos \alpha, \sin \alpha), M(0, \sin \alpha)$.

又直线 OP 的方程为 $\sin \alpha \cdot x - \cos \alpha \cdot y = 0$.

故根据点到直线距离公式 $|MN| = \frac{|\sin \alpha \cos \alpha|}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{2} |\sin 2\alpha|$.

即 $f(x) = \frac{1}{2} |\sin 2x|$.

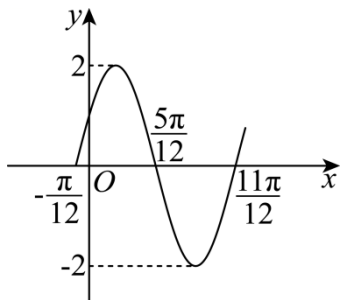
(2) 可知 $g(x) = \frac{1}{2} \left| \sin \left(4x + \frac{2\pi}{3} \right) \right|$.

由 $k\pi \leq 4x + \frac{2\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

得 $-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{4} \leq x \leq -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$.

所以当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ 时, 函数 $g(x)$ 的单调增区间为 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{24} \right]$ 和 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{24} \right]$.

2. (23-24 高三上·安徽·阶段练习) 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) \left(A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2} \right)$ 的部分图象如图所示.



(1) 求函数 $y = f(x)$ 的解析式;

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位, 再将所得图象上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 求函数 $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4} \right]$ 上的值域.

【答案】(1) $f(x) = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$

(2) $[-\sqrt{3}, 2]$

【分析】(1) 根据图象易得 A 和周期, 结合 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = 0$ 可得结果;

(2) 根据平移和伸缩变换可得 $g(x)$, 进而由整体法即可求解函数的值域.

【详解】(1) 观察图象可得 $A = 2$, 函数 $f(x)$ 的周期 $T = \frac{11\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \pi = \frac{2\pi}{\omega}$, 解得 $\omega = 2$.

即 $f(x) = 2 \sin(2x + \varphi)$, 由 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = 2 \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 0$, 得 $-\frac{\pi}{6} + \varphi = k\pi$,

即 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$,

而 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 则 $\varphi = \frac{\pi}{6}$,

所以函数 $y = f(x)$ 的解析式是 $f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

(2) 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度,

可得到函数 $y = 2 \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

再将所得图象上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ ，纵坐标不变，

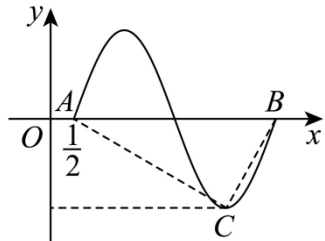
得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x) = 2\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$ 。

当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 时， $\frac{\pi}{3} \leq 4x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$ ，则 $-\sqrt{3} \leq 2\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 2$ 。

所以 $-\sqrt{3} \leq g(x) \leq 2$ 。

因此 $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的值域为 $[-\sqrt{3}, 2]$ 。

3. (2023·河北·模拟预测) 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示，其中 $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，且 $\angle ACB = 90^\circ$ 。



(1) 求 ω 与 φ 的值；

(2) 若斜率为 $\frac{\sqrt{6}\pi}{4}$ 的直线与曲线 $y = f(x)$ 相切，求切点坐标。

【答案】(1) $\omega = \frac{\pi}{2}$ ， $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

(2) $\left(4k, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 或 $\left(4k+1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ ($k \in \mathbb{Z}$)

【分析】

(1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由射影定理得 DB 长，即 $\frac{1}{4}$ 个周期，从而待定 ω ，再由 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ 求解 φ 即可；

(2) 设切点坐标，利用导数的几何意义表示出切线斜率，求解切点坐标。

【详解】(1)

如图，过点 C 向 x 轴引垂线交于点 D 。

由正弦曲线的性质知 $AD = 3DB$ 。

由射影定理知 $CD^2 = AD \cdot DB$ ，而 $CD = \sqrt{3}$ ， $\therefore 3 = 3DB \cdot DB$ 。

$\therefore DB = 1$ 。

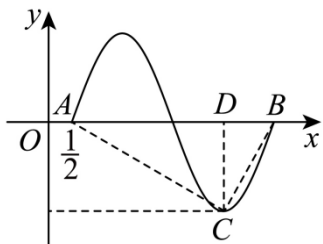
$\therefore T = 4 = \frac{2\pi}{|\omega|}$ ，由 $\omega > 0$ ，解得 $\omega = \frac{\pi}{2}$ 。

当 $\omega = \frac{\pi}{2}$ 时，由 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ，且由已知图象及五点对应法，

得 $\frac{\pi}{4} + \varphi = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)，

由 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，则当 $k = 0$ 时， $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ ；

所以有 $\omega = \frac{\pi}{2}$ ， $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ ；



(2)

由(1)知 $f(x) = \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$ ，设切点 $(x_0, f(x_0))$ 。

$$\therefore f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{则 } f'(x_0) = \frac{\sqrt{6}\pi}{4} \therefore \cos\left(\frac{\pi}{2}x_0 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \therefore \frac{\pi}{2}x_0 - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\therefore x_0 = 4k \text{ 或 } x_0 = 4k + 1 (k \in \mathbb{Z}) \text{ 且 } f(4k) = -\frac{\sqrt{6}}{2}, f(4k + 1) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\therefore \text{故其切点坐标为 } \left(4k, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \text{ 或 } \left(4k + 1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right) (k \in \mathbb{Z})$$

题型二：恒等变形与性质



利用二倍角和降幂公式等进

1. 角度不一致，可以“打散”：角度不一致，可以拆开

2. “重组”：系数次幂一致，合并为正弦余弦，便于使用辅助角“化一”
进行恒等变形

1. (2024·北京顺义·二模) 已知函数 $f(x) = \cos^2\left(x - \frac{\varphi}{2}\right) + \sqrt{3} \sin\left(x - \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(x - \frac{\varphi}{2}\right)$ ，其中 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ 。

(1) 若 $f(0) = \frac{1}{2}$ ，求 φ 的值；

(2) 已知 $x \in [0, m] (m > 0)$ 时， $f(x)$ 单调递增，再从条件①、条件②、条件③中选择一个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在，求 m 的最大值。

$$\text{条件①：} f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -1；$$

$$\text{条件②：} f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{12}\right)；$$

$$\text{条件③：} y = f(x) \text{ 的图像与直线 } y = \frac{1}{2} \text{ 的一个交点的横坐标为 } \frac{\pi}{24}。$$

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

【答案】(1) $\varphi = \frac{\pi}{6}$

(2) 答案见解析

【分析】(1) 结合三角恒等变换公式，将 $x = 0$ 代入计算即可得；

(2) 若选②, 将 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 与 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ 计算出来, 即可得出 φ , 结合正弦函数的性质即可得解; 若选③, 借助函数的对称性计算即可得 φ , 结合正弦函数的性质即可得解; 不可选①, 代入计算后, 结合三角函数的值域可知此时函数 $f(x)$ 不存在.

$$\begin{aligned} \text{【详解】(1) 法一: } f(0) &= \cos^2\left(-\frac{\varphi}{2}\right) + \sqrt{3} \sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ &= \frac{1+\cos\varphi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\varphi = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{即可得 } \tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{又 } |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi = \frac{\pi}{6};$$

$$\begin{aligned} \text{法二: } f(x) &= \frac{1+\cos(2x-\varphi)}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2x-\varphi) \\ &= \sin\left(2x-\varphi+\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } f(0) = \sin\left(-\varphi+\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ 即得 } \sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right) = 0.$$

$$\text{又 } |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi = \frac{\pi}{6};$$

$$(2) f(x) = \frac{1+\cos(2x-\varphi)}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2x-\varphi) = \sin\left(2x-\varphi+\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}.$$

$$\text{选择②, } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) + \frac{1}{2}, f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin(\pi-\varphi) + \frac{1}{2}.$$

$$\text{因为 } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{12}\right), \text{ 所以 } \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \sin(\pi-\varphi).$$

$$\text{因为 } f(x) \text{ 的最小正周期 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi, |\varphi| < \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{所以由 } \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \sin(\pi-\varphi) \text{ 可得 } \frac{\pi}{2}-\varphi+\pi-\varphi = \pi.$$

$$\text{所以 } \varphi = \frac{\pi}{4}, f(x) = \sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right) + \frac{1}{2};$$

$$\text{或法二: 因为 } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{12}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \sin(\pi-\varphi),$$

$$\text{所以 } \cos\varphi = \sin\varphi \text{ 即 } \tan\varphi = 1.$$

$$\text{因为 } |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \varphi = \frac{\pi}{4}, f(x) = \sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right) + \frac{1}{2};$$

$$\text{选择③, } f(x) = \frac{1+\cos(2x-\varphi)}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2x-\varphi) = \sin\left(2x-\varphi+\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}.$$

$$y = f(x) \text{ 的图像与直线 } y = \frac{1}{2} \text{ 的一个交点的横坐标为 } \frac{\pi}{24}.$$

$$\text{即可得 } f\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } \sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right) = 0.$$

又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) + \frac{1}{2}$

法一: 令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{12} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,

解得 $-\frac{5\pi}{24} + k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{24} + k\pi$, 即 $f(x)$ 的单增区间为 $\left[-\frac{5\pi}{24} + k\pi, \frac{7\pi}{24} + k\pi\right]$ $k \in \mathbf{Z}$,

又 $x \in [0, m]$ 时, $f(x)$ 单调递增,

所以, $[0, m]$ 是 $\left[-\frac{5\pi}{24} + k\pi, \frac{7\pi}{24} + k\pi\right]$ $k \in \mathbf{Z}$ 的一个子区间,

所以, $\begin{cases} -\frac{5\pi}{24} + k\pi \leq 0 \\ 0 < m \leq \frac{7\pi}{24} + k\pi \end{cases}$, 即可得 $-\frac{7}{24} < k < \frac{5}{24}$, 又 $k \in \mathbf{Z}$,

所以 $k = 0$, 故 $[0, m]$ 是 $\left[-\frac{5\pi}{24}, \frac{7\pi}{24}\right]$ 的一个子区间, 所以 m 的最大值为 $\frac{7\pi}{24}$;

法二: 因为 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) + \frac{1}{2}$, $x \in [0, m]$, 所以 $-\frac{\pi}{12} \leq 2x - \frac{\pi}{12} \leq 2m - \frac{\pi}{12}$,

因为 $y = \sin x$ 在 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ 上单增,

所以 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{12} \leq 2m - \frac{\pi}{12} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$,

即可得 $0 \leq m \leq k\pi + \frac{7\pi}{24}$, $-\frac{7}{24} < k < \frac{5}{24}$, $k \in \mathbf{Z}$,

所以 $k = 0$, 所以 $0 \leq m \leq \frac{7\pi}{24}$, 可得 m 的最大值为 $\frac{7\pi}{24}$.

不可选择条件①, 理由如下:

若 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -1$, 则 $\sin\left(-\frac{\pi}{6} - \varphi + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} = -1$, 即 $\sin(-\varphi) = -\frac{3}{2}$,

由 $\sin x \in [-1, 1]$, 故该方程无解, 故函数 $f(x)$ 不存在, 故不可选①.

2. (2024·山东聊城·一模) 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 设 $\angle BAD = \alpha$, $\angle ABD = \beta$, 已知

$$\cos(\alpha - \beta) = 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right).$$

(1) 求 $\angle ADB$;

(2) 若 $CD = 2$, $AD = 3$, $BC = 4$, 求 AB .

【答案】(1) $\frac{\pi}{6}$

(2) $\sqrt{3}$

【分析】(1) 借助两角和与差的正弦公式、两角和与差的余弦公式化简所给式子可得 $\tan(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

结合图形可得 $\alpha + \beta = \pi - \angle ADB$, 即可得 $\angle ADB$;

(2) 借助正弦定理与余弦定理计算即可得.

【详解】(1) $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$,

$$2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \alpha\right)\left(\frac{1}{2}\sin \beta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \beta\right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{4} \sin \alpha \sin \beta + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \alpha \cos \beta + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \beta \cos \alpha + \frac{3}{4} \cos \alpha \cos \beta \right)$$

$$\text{即 } 2 \cos \alpha \cos \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta = \sin \alpha \sin \beta + \sqrt{3} \sin \alpha \cos \beta + \sqrt{3} \sin \beta \cos \alpha + 3 \cos \alpha \cos \beta,$$

$$\text{即 } \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta = \sqrt{3} (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha),$$

$$\text{即 } -\cos(\alpha + \beta) = \sqrt{3} \sin(\alpha + \beta), \text{ 即 } \tan(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{又 } \alpha + \beta = \pi - \angle ADB, \text{ 故 } \tan(\pi - \angle ADB) = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 即 } \tan \angle ADB = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{又 } \angle ADB \in (0, \pi), \text{ 故 } \angle ADB = \frac{\pi}{6};$$

$$(2) \text{ 由 } AD \parallel BC, \text{ 故 } \angle DBC = \angle ADB = \frac{\pi}{6},$$

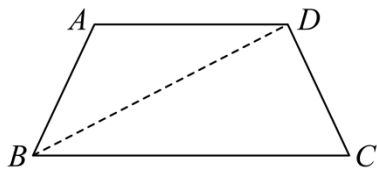
$$\text{由正弦定理可得 } \frac{CD}{\sin \angle DBC} = \frac{BC}{\sin \angle BDC},$$

$$\text{即 } \sin \angle BDC = \frac{BC \cdot \sin \angle DBC}{CD} = \frac{4 \times \frac{1}{2}}{2} = 1,$$

$$\text{故 } \angle BDC = \frac{\pi}{2}, \text{ 则 } BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\text{由余弦定理可得 } AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos \angle ABD,$$

$$\text{即 } AB^2 = 9 + 12 - 18 = 3, \text{ 故 } AB = \sqrt{3}.$$



3. (2024·四川成都·模拟预测) 已知 $\triangle ABC$ 是斜三角形.

(1) 证明: $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1$;

(2) 若 $\cos 2A + \cos 2B + 2 \cos 2C = -2$, 求 $\tan C$ 的取值范围.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $[\sqrt{3}, +\infty)$

【分析】(1) 根据积化和差与和差化积公式, 二倍角的余弦公式化简即可得证;

(2) 根据(1)及两角和的余弦公式, 同角三角函数的基本关系, 均值不等式求解.

【详解】(1) 因为 $2 \cos A \cos B \cos C = 2 \cos A \cos B \cos(\pi - A - B)$

$$= -[\cos(A+B) + \cos(A-B)] \cos(A+B)$$

$$= -(-\cos C)^2 - \cos(A-B) \cos(A+B)$$

$$= -\cos^2 C - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B)$$

$$= -\cos^2 C - \left(\cos^2 A - \frac{1}{2} + \cos^2 B - \frac{1}{2} \right)$$

$$= 1 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C),$$

$$\text{所以 } \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1,$$

原式得证.

(2) 由 $\cos 2A + \cos 2B + 2\cos 2C = -2$.

由二倍角的余弦公式可整理得 :

$$2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) - 3 + (2\cos^2 C - 1) = -2 .$$

结合 (1) 得 $1 - 2\cos A \cos B \cos C = 1 - \cos^2 C$.

由题设知 $\cos A \cos B \cos C \neq 0$.

$$\text{则 } 2\cos A \cos B = \cos C = -\cos(A+B) = \sin A \sin B - \cos A \cos B .$$

$$\text{所以 } 3\cos A \cos B = \sin A \sin B .$$

$$\text{故 } \tan A \tan B = 3, \text{ 且 } A, B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) .$$

$$\text{所以 } \tan C = -\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{\tan A \tan B - 1} = \frac{\tan A + \tan B}{2}$$

$$\geq \sqrt{\tan A \tan B} = \sqrt{3} \text{ (当且仅当 } \tan A = \tan B = \sqrt{3} \text{ 时取等)} .$$

$$\text{所以 } \tan C \text{ 的取值范围是 } [\sqrt{3}, +\infty) .$$

题型三：利用对称性求零点和

1. (22-23 高三·山西忻州·开学考试) 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x \cos\omega x - \cos^2\omega x + m$.

(1) 若 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{2\pi}{9}$ 对称, $\omega \in [1, \pi]$, 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 在 (1) 的条件下, 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, x_1 和 x_2 是 $f(x)$ 的两个零点, 求 $f(x_1 + x_2) - m$ 的值和 m 的取值范围.

【答案】(1) $\left[\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{9}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}\right] (k \in \mathbb{Z})$

(2) $-1; \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

【分析】(1) 由倍角公式、和差公式化简 $f(x)$, 由整体法根据对称轴求得 ω , 即可由整体法进一步求得单调递增区间;

(2) 由整体法确定 $x_1 + x_2$ 的值, 即可求值. 由正弦型函数图象及性质列不等式可求得 m 的取值范围.

【详解】(1) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x - \frac{1}{2}\cos 2\omega x - \frac{1}{2} + m = \sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} + m$.

$\because f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{2\pi}{9}$ 对称, 则 $2\omega \cdot \frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, 解得 $\omega = \frac{9}{4}k + \frac{3}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

$\because \omega \in [1, \pi]$, $\therefore \omega = \frac{3}{2}$, 则 $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} + m$.

由 $3x - \frac{\pi}{6} \in \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbb{Z})$ 得 $x \in \left[\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{9}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}\right] (k \in \mathbb{Z})$.

则 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{9}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}\right] (k \in \mathbb{Z})$;

(2) $\because x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\therefore 3x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right]$, $\therefore x_1$ 和 x_2 是 $f(x)$ 的两个零点, $\therefore 3(x_1 + x_2) - \frac{\pi}{3} = \pi \Rightarrow 3(x_1 + x_2) = \frac{4\pi}{3}$.

$\therefore f(x_1 + x_2) - m = \sin\left[3(x_1 + x_2) - \frac{\pi}{6}\right] - \frac{1}{2} = \sin\frac{7\pi}{6} - \frac{1}{2} = -1$.

令 $t = 3x - \frac{\pi}{6}$, $\sin t = \frac{1}{2} - m$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right]$ 上恰有两个不同的解, $\therefore \frac{1}{2} - m \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$\therefore m$ 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{2}, 1\right]$.

2. (22-23 高三·上海杨浦·阶段练习) 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的最小正周期为 π , 且直线 $x = -\frac{\pi}{2}$ 是其图像的一条对称轴.

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的解析式, 并指出该函数的振幅、频率、圆频率和初始相位;

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位, 再将所得图像上的每一点的横坐标伸长为原来的 2 倍(纵坐标不变), 得到新的函数 $y = g(x)$. 已知函数 $F(x) = f(x) + \lambda g(x)$ (λ 为常数且 $\lambda \in \mathbf{R}$) 在开区间 $(0, n\pi)$ ($n \in \mathbf{N}$ 且 $n \geq 1$) 内恰有 2021 个零点, 求常数 λ 和 n 的值.

【答案】(1) $f(x) = \cos 2x$, 振幅为 1, 频率为 $\frac{1}{\pi}$, 圆频率为 2, 初始相位为 $\frac{\pi}{2}$

(2) $\lambda = -1, n = 1347$

【分析】(1) 由最小正周期求得 ω , 由对称轴求得 φ 得函数解析式, 再根据三角函数式的物理应用求得振幅、频率、圆频率和初始相位;

(2) 求出 $F(x)$ 的表达式, 并变形, 令 $t = \sin x \in [-1, 1]$, 得关于 t 的二次方程, 确定二次方程一定有两个实数解, 由韦达定理得出两个根的性质, 然后分类讨论结合正弦函数性质确定原方程中根的个数, 得出结论.

【详解】(1) 由三角函数的周期公式可得 $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$,

$\therefore f(x) = \sin(2x + \varphi)$,

令 $2x + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 得 $x = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$,

由于直线 $x = -\frac{\pi}{2}$ 为函数 $y = f(x)$ 的一条对称轴,

所以 $-\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 得 $\varphi = \frac{3\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

由于 $0 < \varphi < \pi$, $\therefore k = -1$, 则 $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

因此 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{2}) = \cos 2x$,

所以振幅为 1, 频率为 $\frac{1}{\pi}$, 圆频率为 2, 初始相位为 $\frac{\pi}{2}$;

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位, 得到函数 $y = \cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin 2x$,

再将所得的图象上每一点的纵坐标不变, 横坐标伸长为原来的 2 倍后所得到的图象对应的函数为 $g(x) = \sin x$,

$\therefore F(x) = f(x) + \lambda g(x) = \cos 2x + \lambda \sin x = -2\sin^2 x + \lambda \sin x + 1$,

令 $F(x) = 0$, 可得 $2\sin^2 x - \lambda \sin x - 1 = 0$,

令 $t = \sin x \in [-1, 1]$, 得 $2t^2 - \lambda t - 1 = 0$, $\Delta = \lambda^2 + 8 > 0$,

则关于 t 的二次方程 $2t^2 - \lambda t - 1 = 0$ 必有两不等实根 t_1, t_2 , 则 $t_1 t_2 = -\frac{1}{2}$, t_1, t_2 异号.

①当 $0 < |t_1| < 1$ 且 $0 < |t_2| < 1$ 时,

则方程 $\sin x = t_1$ 和 $\sin x = t_2$ 在区间 $(0, n\pi)$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 均有偶数个根,

从而方程 $2\sin^2 x - \lambda \sin x - 1 = 0$ 在 $(0, n\pi)$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 也有偶数个根, 不合题意;

②当 $t_1 = 1$, 则 $t_2 = -\frac{1}{2}$, 此时 $\lambda = 1$,

当 $x \in (0, 2\pi)$ 时, $\sin x = t_1$ 只有一根, $\sin x = t_2$ 有两根,
 所以, 关于 x 的方程 $2\sin^2 x - \lambda \sin x - 1 = 0$ 在 $(0, 2\pi)$ 上有三个根,
 由于 $2021 = 3 \times 673 + 2$,
 则方程 $2\sin^2 x - \lambda \sin x - 1 = 0$ 在 $(0, 1346\pi)$ 上有 $3 \times 673 = 2019$ 个根,
 由于方程 $\sin x = t_1$ 在区间 $(1346\pi, 1347\pi)$ 上只有一个根,
 在区间 $(1347\pi, 1348\pi)$ 上无实解,
 方程 $\sin x = t_2$ 在区间 $(1346\pi, 1347\pi)$ 上无实数解, 在区间 $(1347\pi, 1348\pi)$ 上有两个根,
 因此, 关于 x 的方程 $2\sin^2 x - \lambda \sin x - 1 = 0$ 在区间 $(0, 1347\pi)$ 上有 2020 个根, 在区间 $(0, 1348\pi)$ 上有 2022 个根, 不合题意;

③ 当 $t_1 = -1$ 时, 则 $t_2 = \frac{1}{2}$, 此时 $\lambda = -1$,

当 $x \in (0, 2\pi)$ 时, $\sin x = t_1$ 只有一根, $\sin x = t_2$ 有两根,
 所以, 关于 x 的方程 $2\sin^2 x - \lambda \sin x - 1 = 0$ 在 $(0, 2\pi)$ 上有三个根,
 由于 $2021 = 3 \times 673 + 2$,
 则方程 $2\sin^2 x - \lambda \sin x - 1 = 0$ 在 $(0, 1346\pi)$ 上有 $3 \times 673 = 2019$ 个根,
 由于方程 $\sin x = t_1$ 在区间 $(1346\pi, 1347\pi)$ 上无实数根, 在区间 $(1347\pi, 1348\pi)$ 上只有一个实数根,
 方程 $\sin x = t_2$ 在区间 $(1346\pi, 1347\pi)$ 上有两个实数解, 在区间 $(1347\pi, 1348\pi)$ 上无实数解,
 因此, 关于 x 的方程 $2\sin^2 x - \lambda \sin x - 1 = 0$ 在区间 $(0, 1347\pi)$ 上有 2021 个根, 满足题意.

④ 若有一根绝对值大于 1, 则另一根绝对值大于 0 且小于 1, 有偶数个根, 不合题意,
 综上所述: $\lambda = -1$, $n = 1347$.

3 · (23-24 高三上·吉林白城·阶段练习) 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin(\omega x + \varphi) + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\omega x + \varphi}{2}\right)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 为奇函数, 且 $f(x)$ 图象的相邻两条对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式与单调递减区间;

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 求方程 $2g^2(x) + \sqrt{3}g(x) - 3 = 0$ 的所有根的和.

【答案】(1) $f(x) = 2\sin 2x$, $\left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$
 (2) $\frac{5\pi}{6}$.

【分析】(1) 利用恒等变换化简后, 结合三角函数的性质求解;
 (2) 利用图象变换法, 求得 $y = g(x)$ 的函数表达式, 解方程求得 $g(x)$ 的值, 利用换元思想, 结合三角函数的图象和性质分析求出即可.

【详解】(1) 由题意可得:

$$f(x) = \sqrt{3}\sin(\omega x + \varphi) + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\omega x + \varphi}{2}\right) = \sqrt{3}\sin(\omega x + \varphi) - \cos(\omega x + \varphi) = 2\sin\left(\omega x + \varphi - \frac{\pi}{6}\right),$$
 因为 $f(x)$ 图象的相邻两条对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,
 所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \pi$, 即可得 $\omega = 2$.
 又 $f(x)$ 为奇函数, 则 $\varphi - \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 故 $f(x) = 2\sin 2x$.

令 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 得 $\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

所以函数 $f(x)$ 的递减区间为 $\left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$.

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 可得 $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象,

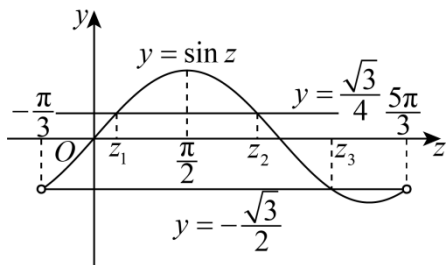
再把横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$, 得到函数 $y = g(x) = 2\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象,

又 $2g^2(x) + \sqrt{3}g(x) - 3 = 0$, 则 $g(x) = -\sqrt{3}$ 或 $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

即 $\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

令 $z = 4x - \frac{\pi}{3}$, 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $z = 4x - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$.

画出 $y = \sin z$ 的图象如图所示:



$\sin z = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 的两个根 z_1, z_2 对应的点 $\left(z_1, \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \left(z_2, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ 关于直线 $z = \frac{\pi}{2}$ 对称, 即 $z_1 + z_2 = \pi$.

$\sin z = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 有 $z_3 = \frac{4\pi}{3}$.

$\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上有两个不同的根 x_1, x_2 , $4x_1 - \frac{\pi}{3} + 4x_2 - \frac{\pi}{3} = \pi$.

所以 $x_1 + x_2 = \frac{5\pi}{12}$;

又 $\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的根为 $\frac{5\pi}{12}$.

所以方程 $2g^2(x) + \sqrt{3}g(x) - 3 = 0$ 在 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内所有根的和为 $\frac{5\pi}{6}$.

题型四：能成立与恒成立求参数



一般地, 已知函数 $y = f(x), x \in [a, b]$, $y = g(x), x \in [c, d]$

(1) 相等关系

记 $y = f(x), x \in [a, b]$ 的值域为 A , $y = g(x), x \in [c, d]$ 的值域为 B ,

①若 $\forall x_1 \in [a, b], \exists x_2 \in [c, d]$, 有 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, 则有 $A \subseteq B$;

②若 $\exists x_1 \in [a, b]$, $\forall x_2 \in [c, d]$, 有 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, 则有 $A \supseteq B$;

③若 $\exists x_1 \in [a, b]$, $\exists x_2 \in [c, d]$, 有 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, 故 $A \cap B \neq \emptyset$;

(2) 不等关系

(1)若 $\forall x_1 \in [a, b]$, $\forall x_2 \in [c, d]$, 总有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立, 故 $f(x)_{\max} < g(x)_{\min}$;

(2)若 $\forall x_1 \in [a, b]$, $\exists x_2 \in [c, d]$, 有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立, 故 $f(x)_{\max} < g(x)_{\max}$;

(3)若 $\exists x_1 \in [a, b]$, $\forall x_2 \in [c, d]$, 有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立, 故 $f(x)_{\min} < g(x)_{\min}$;

(4) 若 $\exists x_1 \in [a, b]$, $\exists x_2 \in [c, d]$, 有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立, 故 $f(x)_{\min} < g(x)_{\max}$.

1. (2023·山东济宁·二模) 已知函数 $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x + \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

(1)求函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调递增区间;

(2)将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$) 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 若函数 $g(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 成中心对称, 在 $\left[-\frac{\pi}{4}, \alpha\right]$ 上的值域为 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, 求 α 的取值范围.

【答案】(1) $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

(2) $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$

【分析】(1) 先化简 $f(x)$, 根据正弦函数的周期性即可得出答案;

(2) 根据三角函数图象的平移变换和对称性求出 φ 、 $g(x)$, 再由三角函数的性质求解即可.

【详解】(1) $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x + \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

因为 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$.

所以当 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, 即: $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

(2) 由题意可知: $g(x) = \sin\left(2x + 2\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$

因为函数 $g(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 成中心对称.

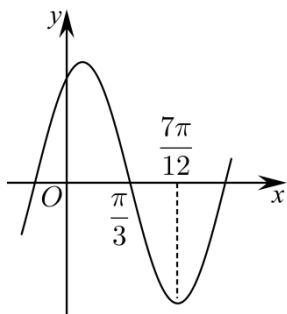
所以 $2 \times \frac{\pi}{3} + 2\varphi + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$. 解得: $\varphi = -\frac{5\pi}{12} + \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbf{Z}$.

因为 $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$, 所以 $k = 1, \varphi = \frac{\pi}{12}$. 所以 $g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

当 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \alpha\right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{6}, 2\alpha + \frac{\pi}{3}\right]$. 因为 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4}, \alpha\right]$ 上的值域为 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

所以 $\frac{\pi}{2} \leq 2\alpha + \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{6}$. 解得: $\frac{\pi}{12} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{12}$. 所以 α 的取值范围为 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$.

2. (2023·山西·模拟预测) 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示.



(1) 求 $f(x)$ 的解析式，并求 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2) 若对任意 $x \in \left[t, \frac{\pi}{3}\right]$ ，都有 $\left|f(x)f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1\right| \leq 1$ ，求实数 t 的取值范围.

【答案】(1) $f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，单调递增区间为 $\left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}\right] (k \in \mathbf{Z})$
 (2) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$

【分析】(1) 先求出 $f(x)$ 的周期，再代点进去求出 φ ，从而得到 $f(x)$ 的解析式后，进而利用整体法即可求得 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2) 先根据三角恒等变换化简绝对值内的表达式，再利用正弦函数的性质进行解不等式即可.

【详解】(1) 由图象可得 $f(x)$ 的最小正周期 $T = 4\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) = \pi$ ， $\therefore |\omega| = \frac{2\pi}{T} = 2$ ，又 $\omega > 0$ 可知 $\omega = 2$ ，

由 $2 \times \frac{7\pi}{12} + \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ， $k \in \mathbf{Z}$ 解得 $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，

又因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，得 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ， $\therefore f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 。

由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，解得 $k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{12}$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}\right] (k \in \mathbf{Z})$ 。

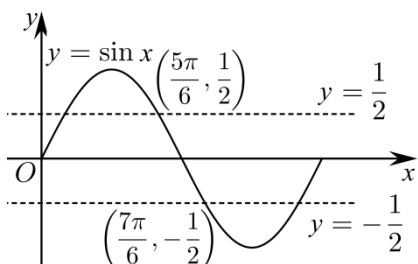
(2) $f(x)f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot 2 \sin 2x = 4\left(\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x\right) \cdot \sin 2x$

$= 2 \sin^2 2x + 2\sqrt{3} \sin 2x \cos 2x = \sqrt{3} \sin 4x - \cos 4x + 1 = 2 \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ 。

由 $\left|f(x)f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1\right| \leq 1$ 得 $\left|2 \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)\right| \leq 1$ ， $-\frac{1}{2} \leq \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{1}{2}$ 。

$\therefore x \in \left[t, \frac{\pi}{3}\right]$ ， $\therefore 4t - \frac{\pi}{6} \leq 4x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$ ，

作出 $y = \sin x$ 的部分图像如下：



结合图像可知： $\frac{5\pi}{6} \leq 4t - \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6}$ ，解得 $\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{\pi}{3}$ 。

所以实数 t 的取值范围为 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ 。

3 · (2022·浙江·三模) 已知函数 $f(x) = 2\sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 。

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2) 若对任意 $x \in \left[t, \frac{\pi}{3}\right]$ ，都有 $\left|f(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，求实数 t 的取值范围。

【答案】(1) $\left[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$

(2) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$

【分析】(1) $f(x)$ 的解析式可化简为 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，即可解得 $f(x)$ 的单调递增区间

(2) 对恒成立的不等式等价转化后，结合 $2x - \frac{\pi}{3}$ 的范围可得 $-\frac{\pi}{3} \leq 2t - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3}$ ，从而解得 t 的范围

【详解】(1) $f(x) = 2\sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin x \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right)$
 $= \sin x \cos x + \sqrt{3}\sin^2 x = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \cos 2x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$

令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

解之得 $-\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$

(2) 对任意 $x \in \left[t, \frac{\pi}{3}\right]$ ，都有 $\left|f(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left|\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

$\because 2x - \frac{\pi}{3} \in \left[2t - \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ ， $\therefore -\frac{\pi}{3} \leq 2t - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3}$ ， $\therefore 0 \leq t < \frac{\pi}{3}$ ， $\therefore$ 实数 t 的范围为 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$ 。

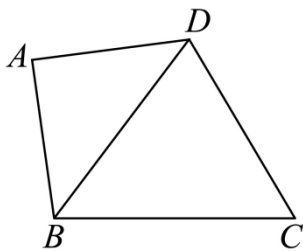
题型五：图形 1：四边形



四边形，一般适当的连接对角线，分解为有公共边俩三角形。如果有外接圆，则要充分运用对角互补这个隐形条件

四边形面积最值型，一般用某一条对角线，把四边形分为两个三角形，有公共边的两个三角形个再各自用余弦定理，构建数量关系

1 · (2022·湖南长沙·模拟预测) 如图，在凸四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB = AD = 2, BC = 3$ 。



(1) 若 $\cos C = \sin \angle ADB = \frac{1}{2}$ ，求 $\cos \angle BDC$ 的值；

(2) 若 $CD = 2$ ，四边形 $ABCD$ 的面积为 4，求 $\cos(A+C)$ 的值。

【答案】(1) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ (2) $-\frac{73}{96}$

【分析】(1) 由题可得 $\angle ADB = \frac{\pi}{6}$ ， $\angle C = \frac{\pi}{3}$ ，由几何关系求得 $BD = 2AD \cos \angle ADB$ ，由正弦定理

$\frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{BD}{\sin C}$ 可求得 $\sin \angle BDC$ ，再根据 $\cos \angle BDC = \sqrt{1 - \sin^2 \angle BDC}$ 计算即可

(2) 由余弦定理得 $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos A = CB^2 + CD^2 - 2CB \cdot CD \cos C$ ，代入数据整理得

$$8 \cos A - 12 \cos C = -5 \quad ①$$

由四边形 $ABCD$ 的面积为 4 得 $S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin A + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot \sin C = 4$ ，代入数据整理得

$$8 \sin A + 12 \sin C = 16 \quad ②$$

①² + ②² 即可求得 $\cos(A+C)$

【详解】(1) 在 $\triangle ABD$ 中， $\because \cos C = \sin \angle ADB = \frac{1}{2}$ ， $\therefore \angle ADB = \frac{\pi}{6}$ ， $\angle C = \frac{\pi}{3}$ ，又 $AB = AD = 2$ ，

$$\therefore BD = 2AD \cos \angle ADB = 2 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$$

在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理得， $\frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{BD}{\sin C}$ ， $\therefore \sin \angle BDC = \frac{BC \sin C}{BD} = \frac{3 \times \sin \frac{\pi}{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{4}$ 。

$\because BC < BD$ ， $\therefore 0 < \angle BDC < \frac{\pi}{3}$ ，

$$\therefore \cos \angle BDC = \sqrt{1 - \sin^2 \angle BDC} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

(2) 在 $\triangle ABD$ 、 $\triangle CBD$ 中，由余弦定理得，

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos A = 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos A = 8 - 8 \cos A$$

$$BD^2 = CB^2 + CD^2 - 2CB \cdot CD \cos C = 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos C = 13 - 12 \cos C$$

$$\text{从而 } 8 \cos A - 12 \cos C = -5 \quad ①$$

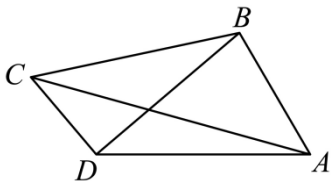
由 $S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin A + \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \sin C = 4$ 得，

$$2 \sin A + 3 \sin C = 4 \quad \text{即 } 8 \sin A + 12 \sin C = 16 \quad ②$$

$$\text{①}^2 + \text{②}^2 \text{ 得， } 64(\sin^2 A + \cos^2 A) + 144(\sin^2 C + \cos^2 C) - 96(\cos A \cos C - \sin A \sin C) = 281$$

$$\therefore \cos(A+C) = -\frac{73}{96}$$

2. (2023·辽宁·模拟预测) 如图，在平面凸四边形 $ABCD$ 中， $CD \perp DB$ ， $CD = 1$ ， $DB = \sqrt{3}$ ， $DA = 2$ 。



(1)若 $\angle DAB = 60^\circ$, 求 $\cos \angle ACB$;

(2)求 $AB^2 + BC^2 + AC^2$ 的取值范围 .

【答案】(1) $\cos \angle ACB = \frac{5\sqrt{7}}{14}$ (2) $(16 - 4\sqrt{3}, 20)$

【分析】

(1)先利用余弦定理得到 $AB = 1$, 根据边的关系得到 $AB \perp DB$, 进而得出 $\angle ABC = 120^\circ$, 再利用余弦定理即可求解 ;

(2) 设 $\angle ADB = \theta$, 利用余弦定理分别求出 AB^2, AC^2 , 相加后整理变形得到关于角 θ 的三角函数 , 利用正弦函数的图象和性质即可求解 .

【详解】(1)

在 $\triangle ABD$ 中 , 因为 $DB = \sqrt{3}$, $DA = 2$, $\angle DAB = 60^\circ$, 由余弦定理得 $(\sqrt{3})^2 = 2^2 + AB^2 - 2 \times 2 \times AB \cos 60^\circ$, 解得 $AB = 1$,

由 $AB^2 + DB^2 = DA^2$, 得 $AB \perp DB$, 此时 $\text{Rt}\triangle CDB \cong \text{Rt}\triangle ABD$, 可得 $\angle ABC = 120^\circ$.

在 $\triangle ABC$ 中 , $AB = 1$, $BC = 2$, 由余弦定理得 $AC^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos 120^\circ = 7$, 解得 $AC = \sqrt{7}$, 所以

$$\cos \angle ACB = \frac{2^2 + 7 - 1^2}{2 \times 2 \times \sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{14} .$$

(2) 设 $\angle ADB = \theta$, 由题意可知 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$,

在 $\triangle ABD$ 中 , 由余弦定理得 $AB^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{3} \cos \theta = 7 - 4\sqrt{3} \cos \theta$, 在 $\triangle ACD$ 中 , $\angle ADC = \theta + \frac{\pi}{2}$,

由余弦定理得 $AC^2 = 2^2 + 1^2 - 2 \times 2 \times 1 \times \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = 5 + 4 \sin \theta$, 在 $\triangle BCD$ 中 , 因为 $CD \perp DB$, 所以

$$BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = 2 .$$

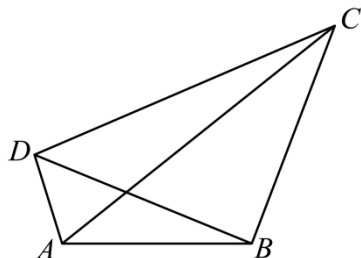
$$\text{所以 } AB^2 + BC^2 + AC^2 = 7 - 4\sqrt{3} \cos \theta + 5 + 4 \sin \theta + 2^2 = 16 + 8 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) .$$

因为 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 所以 $-\frac{\pi}{3} < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{6}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) < \frac{1}{2}$,

所以 $AB^2 + BC^2 + AC^2$ 的取值范围是 $(16 - 4\sqrt{3}, 20)$.

3 . (2023·山西·模拟预测) 如图 , 四边形 $ABCD$ 中 , $AB = 2AD = 4$, $BD = BC$, $\angle DBC = \frac{\pi}{2}$, $\angle DAB = \theta$,

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{4} .$$



(1)求 $\triangle ABD$ 的面积 ;

(2)求线段 AC 的长度 .

【答案】(1) $\frac{\sqrt{7}+5}{2}$ (2) $2\sqrt{14}$

【分析】

(1) 根据已知条件及同角三角函数的平方关系，利用三角形的内角的范围及三角形的面积公式即可求解；

(2) 根据(1)的结论及余弦定理，利用正弦定理及三角函数的诱导公式即可求解.

【详解】(1) 因为 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ①.

所以 $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{7}{16}$ ，即 $2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{9}{16} < 0$.

因为 θ 为 $\triangle ABD$ 的内角，

所以 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$.

又 $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{25}{16}$.

所以 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{5}{4}$ ②.

联立 ①②，得 $\sin \theta = \frac{\sqrt{7}+5}{8}$ ， $\cos \theta = \frac{\sqrt{7}-5}{8}$.

所以 $\triangle ABD$ 的面积为 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times \frac{\sqrt{7}+5}{8} = \frac{\sqrt{7}+5}{2}$.

(2) 由(1)知 $\cos \theta = \frac{\sqrt{7}-5}{8}$ ， $\sin \theta = \frac{\sqrt{7}+5}{8}$.

由余弦定理，得 $BC^2 = BD^2 + AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cdot \cos \theta = 2^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 2 \times \frac{\sqrt{7}-5}{8} = 30 - 2\sqrt{7}$.

设 $\angle ABD = \alpha$ ，由正弦定理，得 $\frac{AD}{\sin \alpha} = \frac{BD}{\sin \theta}$ ，即 $\sin \alpha = \frac{2 \sin \theta}{BD}$.

所以 $\cos \angle ABC = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha = -\frac{2 \sin \theta}{BD}$.

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 16 + (30 - 2\sqrt{7}) - 2 \times 4 \times BD \times \left(-\frac{2 \sin \theta}{BD} \right)$

$= 46 - 2\sqrt{7} + 16 \sin \theta = 46 - 2\sqrt{7} + 16 \times \frac{\sqrt{7}+5}{8} = 56$.

所以 $AC = 2\sqrt{14}$.

题型六：图形 2：中线型



中线的处理方法

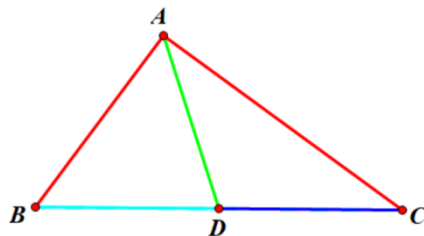
1. 向量法：
$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2)$$

2. 余弦定理法（补角法）：

如图设 $BD = DC$ ，

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2 \times AD \times BD \times \cos \angle ADB$ ，①

在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理得 $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \times AD \times DC \times \cos \angle ADC$ ，②

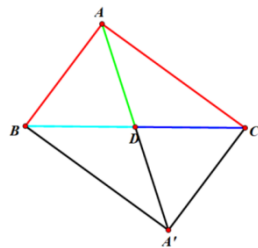


因为 $\angle ADB + \angle ADC = \pi$ ，所以 $\cos \angle ADB + \cos \angle ADC = 0$

所以①+②式即可

3. 延伸补形法：如图所示，延伸中线，补形为平行四边形

4. 中线分割的俩三角形面积相等



1. (2023·福建福州·模拟预测) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ，且 $a \sin C = c \sin B$ ， $C = \frac{2\pi}{3}$ 。

(1) 求 B ；

(2) 若 $\triangle ABC$ 面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ，求 BC 边上中线的长。

【答案】(1) $B = \frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\sqrt{21}}{2}$

【分析】(1) 由正弦定理边化角即可得到角 B ；

(2) 根据 $A = B$ ，得 $a = b$ ，结合三角形面积公式即可得到 $a = b = \sqrt{3}$ ，再由正弦定理得边 c ，以及 $2\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$ ，即可得到答案。

【详解】(1) 由 $a \sin C = c \sin B$ ，由正弦定理边化角得 $\sin A \sin C = \sin C \sin B$ 。

由 $\sin C \neq 0$ ， $\therefore \sin A = \sin B$ 。

$\therefore A = B$ 或 $A + B = \pi$ (舍)。

又 $C = \frac{2\pi}{3}$ ， $\therefore B = \frac{\pi}{6}$ ；

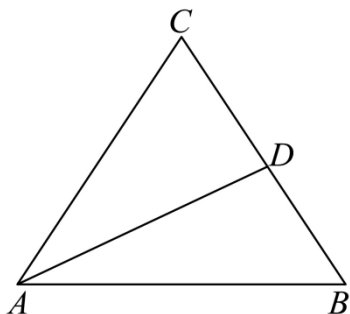
(2) 由 $B = \frac{\pi}{6}$ ， $C = \frac{2\pi}{3}$ ， $A = \frac{\pi}{6}$ ， $\therefore a = b$ 。

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C$ ，即 $\frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，解得 $a = b = \sqrt{3}$ 。

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ ，

得 $c = \frac{a \sin C}{\sin A} = 3$ 。

设 BC 边的中点为 D ，连接 AD ，如下图：



$$\text{Q } 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \text{ 即 } (2\overrightarrow{AD})^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2.$$

$$\text{即 } 4AD^2 = c^2 + b^2 + 2bc \cos A = 9 + 3 + 2 \times \sqrt{3} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{解得 } AD = \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

$$2. \text{ (2024·北京东城·一模) 在 } \triangle ABC \text{ 中, } a \cos C + c \cos A = \frac{2\sqrt{3}}{3} b \cos B.$$

(1) 求 $\angle B$;

(2) 若 $a = 12$, D 为 BC 边的中点, 且 $AD = 3$, 求 b 的值.

$$\text{【答案】(1) } \frac{\pi}{6}; \text{(2) } 3\sqrt{7}.$$

【分析】(1) 由正弦定理可得 $\sin(A+C) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin B \cos B$, 结合三角和为 π 及诱导公式可得 $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即可得答案;

(2) 在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理可求得 $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$, 从而可得 $AB = 3\sqrt{3}$, 在 $\triangle ABC$ 中, 利用余弦定理求解即可.

$$\text{【详解】(1) 解: 因为 } a \cos C + c \cos A = \frac{2\sqrt{3}}{3} b \cos B,$$

$$\text{由正弦定理可得 } \sin A \cos C + \sin C \cos A = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin B \cos B,$$

$$\text{即 } \sin(A+C) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin B \cos B, \sin(\pi-B) = \sin B = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin B \cos B,$$

又因为 $\sin B \neq 0$,

$$\text{所以 } 1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos B,$$

$$\text{解得 } \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 又因为 } B \in (0, \pi),$$

$$\text{所以 } B = \frac{\pi}{6};$$

(2) 解: 因为 D 为 BC 边的中点, $a = 12$,

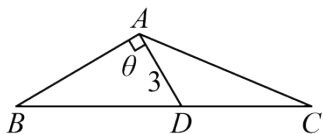
所以 $BD = CD = 6$,

设 $\angle BAD = \theta$,

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 中, 由正弦定理可得 } \frac{BD}{\sin \theta} = \frac{AD}{\sin B},$$

$$\text{即 } \frac{6}{\sin \theta} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6, \text{ 解得 } \sin \theta = 1,$$

又因为 $\theta \in (0, \pi)$ ，所以 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 。



在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ 。

在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 3\sqrt{3}$ ， $BC = 12$ ， $B = \frac{\pi}{6}$ 。

由余弦定理可得： $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B = 144 + 27 - 2 \times 12 \times 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 63$ 。

所以 $AC = 3\sqrt{7}$ 。

即 $b = 3\sqrt{7}$ 。

3. (2024·四川泸州·三模) $\triangle ABC$ 的内角 A ， B ， C 的对边分别为 a ， b ， c ，已知 $a^2 = b^2 + c^2 - 48$ ，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$ 。

(1) 求 $\tan A$ 的值；

(2) 若 D 是 AC 边的中点， $B = \frac{\pi}{3}$ ，求 BD 的长。

【答案】(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\sqrt{19}$

【分析】(1) 借助余弦定理与面积公式，结合三角函数基本关系即可得；

(2) 借助余弦定理与面积公式，结合题目条件可得 a 、 c ，再结合向量的数量积与模长的关系计算即可得。

【详解】(1) 由余弦定理可得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - 48$ ，即 $bc \cos A = 24$ 。

由面积公式可得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = 6\sqrt{3}$ ，即 $bc \sin A = 12\sqrt{3}$ 。

则 $\tan A = \frac{bc \sin A}{bc \cos A} = \frac{12\sqrt{3}}{24} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ；

(2) 由余弦定理可得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \frac{\pi}{3} = a^2 + c^2 - ac$ 。

又 $a^2 = b^2 + c^2 - 48$ ，故 $a^2 = a^2 + c^2 - ac + c^2 - 48$ ，即 $2c^2 = ac + 48$ 。

由面积公式可得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = 6\sqrt{3}$ ，即 $ac = 24$ 。

即有 $2c^2 = 24 + 48 = 72$ ，即 $c = 6$ ，故 $a = 4$ 。

由 D 是 AC 边的中点，故 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ 。

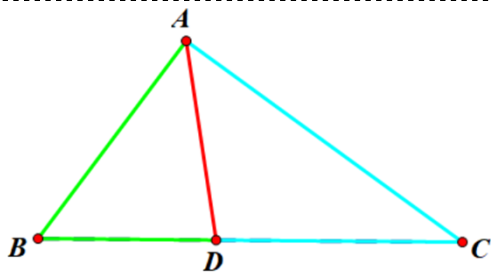
故 $|\overrightarrow{BD}|^2 = \frac{1}{4}(|\overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + 2|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4}(a^2 + c^2 + ac)$

$= \frac{1}{4}(36 + 16 + 24) = 19$ ，即 $BD = \sqrt{19}$ 。

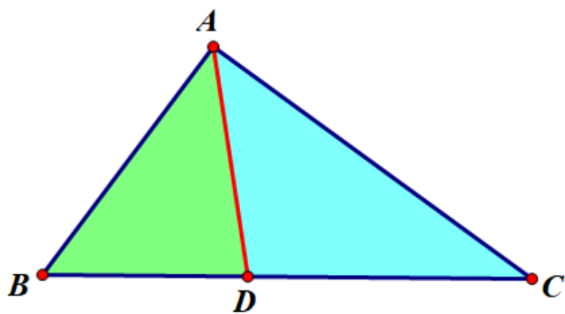
题型七：图形 3：角平分线型



角平分线定理 (大题中，需要证明，否则可能会扣过程分)： $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$



三角形角平分线的处理方法：



$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ABD}$$

1. (23-24 高三·浙江杭州·) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知

$$\frac{c}{a \cos B + b \cos A} = 2 \cos C.$$

(1) 求角 C ;

(2) 若 CD 是 $\angle ACB$ 的角平分线, 且 $CD = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $c = 2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积

【答案】 (1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $2\sqrt{3}$

【分析】 (1) 由正弦定理得 $1 = 2 \cos C$, 求出 $\cos C = \frac{1}{2}$, 得到答案;

(2) 由余弦定理得 $(a+b)^2 - 12 = 3ab$, 由三角形面积公式得到 $ab = \frac{4}{3}(a+b)$, 联立可得 $ab = 8$, 结合三角形面积公式求出答案.

【详解】 (1) 因为 $\frac{c}{a \cos B + b \cos A} = 2 \cos C$, 由正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 得:

$$\frac{c}{a \cos B + b \cos A} = \frac{\sin C}{\sin A \cos B + \sin B \cos A} = \frac{\sin C}{\sin(A+B)} = 2 \cos C.$$

又 $A+B+C = \pi$, $\therefore \sin(A+B) = \sin C$,

故 $1 = 2 \cos C$, 即 $\cos C = \frac{1}{2}$,

又 $C \in (0, \pi)$,

$$\therefore C = \frac{\pi}{3}.$$

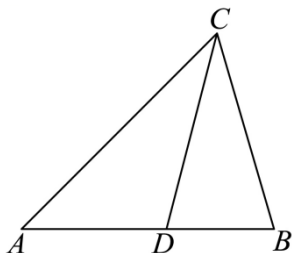
(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ 得: $\frac{1}{2} = \frac{a^2 + b^2 - 12}{2ab}$ ①,

即 $a^2 + b^2 - 12 = ab$, 故 $(a+b)^2 - 12 = 3ab$,

又 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}$, 得: $\frac{1}{2}ab \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}b \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6}$,

化简得： $ab = \frac{4}{3}(a+b)$ ②，联立①②得： $ab = 8$ ，负值舍去，

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin C = 2\sqrt{3}$ 。



2. (23-24 高三山东·阶段练习) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，满足 $a \sin \frac{\pi-B}{2} = b \sin A$

(1) 求 B ；

(2) $\angle ABC$ 的角平分线与 AC 交于点 D , $BD = \sqrt{3}$ ，求 $2a+c$ 的最小值。

【答案】(1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $3+2\sqrt{2}$

【分析】(1) 由诱导公式正弦定理倍角公式化简已知等式，即可求解；

(2) 由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$ ，得 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = 1$ ，利用基本不等式求 $2a+c$ 的最小值。

【详解】(1) 由 $a \sin \frac{\pi-B}{2} = b \sin A$ 得： $a \cos \frac{B}{2} = b \sin A$ ，

由正弦定理得： $\sin A \cos \frac{B}{2} = \sin B \sin A$ ，倍角公式得 $\sin A \cos \frac{B}{2} = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \sin A$ ，

由 $\frac{B}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$, $A \in (0, \pi)$ ，有 $\cos \frac{B}{2} \neq 0, \sin A \neq 0$ ，所以 $\sin \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$ ，

得 $\frac{B}{2} = \frac{\pi}{6}$ ，所以 $B = \frac{\pi}{3}$ 。

(2) 由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$ ，得 $\frac{1}{2} ac \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} a \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \times \sqrt{3} c \sin \frac{\pi}{6}$ ，

即 $\frac{\sqrt{3}ac}{4} = \frac{\sqrt{3}a}{4} + \frac{\sqrt{3}c}{4}$ ，得 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = 1$ ，

$2a+c = (2a+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) = 3 + \frac{c}{a} + \frac{2a}{c} \geq 3 + 2\sqrt{2}$ ，

当且仅当 $\begin{cases} \frac{2a}{c} = \frac{c}{a} \\ a+c=ac \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a=1+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ c=\sqrt{2}+1 \end{cases}$ 时等号成立

所以 $2a+c$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$ 。

3. (23-24 高三黑龙江哈尔滨·阶段练习) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ，且

$c \sin B + \sqrt{3} b \cos C = \sqrt{3} a$ ， $b = \sqrt{3}$

(1) 求角 B ；

(2) 若 $a+c=2$ ，求边 AC 上的角平分线 BD 长。

【答案】(1) $B = \frac{\pi}{3}$ ；(2) $BD = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 。

【分析】(1) 根据给定条件，利用正弦定理边化角，再利用两角和的正弦公式化简即可求出 B 。

(2) 利用余弦定理及已知求出 ac ，然后利用三角形面积公式列方程求解即可。

【详解】(1) 在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理及 $c \sin B + \sqrt{3}b \cos C = \sqrt{3}a$ ，得 $\sin B \sin C + \sqrt{3} \sin B \cos C = \sqrt{3} \sin A$
 $= \sqrt{3} \sin(B+C) = \sqrt{3} \sin B \cos C + \sqrt{3} \cos B \sin C$ ，即 $\sin B \sin C = \sqrt{3} \cos B \sin C$ ，

而 $\sin C \neq 0$ ，解得 $\tan B = \sqrt{3}$ ，又 $B \in (0, \pi)$ ，

所以 $B = \frac{\pi}{3}$ 。

(2) 由 $B = \frac{\pi}{3}$ 及余弦定理得 $3 = c^2 + a^2 - ac = (c+a)^2 - 3ac$ ，又 $a+c=2$ ，解得 $ac = \frac{1}{3}$ ，

由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BDC}$ 得 $\frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}c \cdot BD \cdot \sin \frac{B}{2} + \frac{1}{2}a \cdot BD \cdot \sin \frac{B}{2}$ ，

即 $ac \sin \frac{\pi}{3} = BD \cdot (c+a) \sin \frac{\pi}{6}$ ，则 $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = BD \times 2 \times \frac{1}{2}$ ，

所以 $BD = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 。

题型八：图形 5：三角形高



三角形高的处理方法：

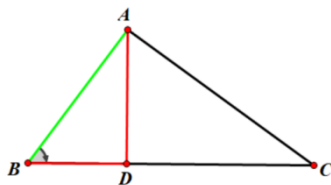
1. 等面积法：两种求面积公式

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}BC \times AD = \frac{1}{2}c^2$$

如

2. 三角函数法：

在 $\triangle BCD$ 中， $BD = AB \cos \angle ABD$ ， $AD = AB \sin \angle ABD$ ，



1. (22-23 高三上·湖北·阶段练习) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $a < b < c$ ，三角形三边上的高之比为 $2:3:4$ 。

(1) 求 $\cos C$ 的值；

(2) 若 E 为边 AC 上一点， $\angle CEB = 30^\circ$ ， $BC = 3$ ，求 BE 的长。

【答案】(1) $-\frac{11}{24}$ (2) $\frac{\sqrt{455}}{4}$

【分析】(1) 由于 $a < b < c$ ，则三边 a, b, c 上的高之比为 $h_1:h_2:h_3 = 4:3:2$ ，根据

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ah_1 = \frac{1}{2}bh_2 = \frac{1}{2}ch_3$ ，得出 $4a = 3b = 2c$ ，并利用余弦定理求出 $\cos C$ 的值；

(2) 利用(1)中 $\cos C$ 的值求出 $\sin C$ 的值，进而利用正弦定理求出 BE 的长。

【详解】(1) 解：由于 $a < b < c$ ，则三边 a, b, c 上的高之比为 $h_1:h_2:h_3 = 4:3:2$ 。

又因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ah_1 = \frac{1}{2}bh_2 = \frac{1}{2}ch_3$ ，则 $4a = 3b = 2c$ 。

设 $4a = 3b = 2c = 12x$ ，则 $a = 3x$ ， $b = 4x$ ， $c = 6x$ 。

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

$$= \frac{9x^2 + 16x^2 - 36x^2}{24x^2} = -\frac{11}{24}.$$

(2) 解: 将 $\cos C = -\frac{11}{24}$ 代入 $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$, 得 $\sin^2 C = 1 - \cos^2 C = \frac{35 \times 13}{24^2}$.

又 $C \in (0, \pi)$, 则 $\sin C = \frac{\sqrt{35 \times 13}}{24} = \frac{\sqrt{455}}{24}$.

在 $\triangle EBC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin \angle CEB} = \frac{BE}{\sin C}$,

则 $BE = 6 \times \frac{\sqrt{455}}{24} = \frac{\sqrt{455}}{4}$.

2. (江苏省南通市 2022-2023 学年高三上学期数学试题) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a \sin B + b \cos A = 0$, $\cos B + \sqrt{2} \cos C = \sqrt{5}$.

(1) 求 $\tan B$;

(2) 若边 AB 上的高为 1, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】(1) $\tan B = \frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$

【分析】(1) 利用正弦定理得到 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 结合 $a \sin B + b \cos A = 0$ 得到 $\tan A = -1$, $A = \frac{3\pi}{4}$, 然后利用三角形内角和和差公式得到 $2 \cos B + \sin B = \sqrt{5}$, 再结合同角三角函数基本公式求 $\tan B$ 即可;

(2) 方法一: 根据 $A = \frac{3\pi}{4}$ 和 AB 边上的高为 1 得到 $b = \sqrt{2}$, 然后根据 $\tan B = \frac{1}{2}$ 得到 $\sin B, \cos B$, 再利用和差公式和内角和得到 $\sin C$, 最后利用三角形面积公式求面积即可;

方法二: 过点 C 向 AB 作垂线, 垂足为 H , 分别在 $\triangle ACH$ 和 $\triangle CHB$ 中利用三角函数和勾股定理得到 $AC = \sqrt{2}$, $AB = 1$, 然后利用三角形面积公式求面积即可.

【详解】(1) 因为 $a \sin B + b \cos A = 0$, 所以 $\frac{a}{-\cos A} = \frac{b}{\sin B}$,

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 所以 $\frac{a}{\sin A} = \frac{a}{-\cos A}$,

所以 $\sin A = -\cos A$, 所以 $\tan A = -1$.

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{3\pi}{4}$.

在 $\triangle ABC$ 中, $A + B + C = \pi$,

所以 $\cos B + \sqrt{2} \cos(\pi - (A + B)) = \cos B - \sqrt{2} \cos(A + B)$

$$= \cos B - \sqrt{2} \cos A \cos B + \sqrt{2} \sin A \sin B = 2 \cos B + \sin B = \sqrt{5}.$$

所以 $(2 \cos B + \sin B)^2 = 4 \cos^2 B + 4 \sin B \cos B + \sin^2 B = 5 = 5 \cos^2 B + 5 \sin^2 B$,

所以 $4 \sin^2 B - 4 \sin B \cos B + \cos^2 B = (2 \sin B - \cos B)^2 = 0$,

所以 $2 \sin B = \cos B$, 所以 $\tan B = \frac{1}{2}$.

(2) 方法一:

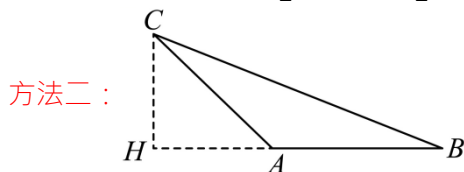
因为 $A \in (0, \pi)$, $A = \frac{3\pi}{4}$, 所以 $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为边 AB 上的高 $b \sin A = 1$, 所以 $b = \frac{1}{\sin A} = \sqrt{2}$.

因为 $\tan B = \frac{1}{2}$, $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos B = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 在 $\triangle ABC$ 中 , $A + B + C = \pi$,

所以 $\sin C = \sin(\pi - (A + B)) = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{10}}{10} . \text{ 在 } \triangle ABC \text{ 中 , 由正弦定理 } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} , \text{ 所以 } c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 1 .$$

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$.



方法二 : 过点 C 向 AB 作垂线 , 垂足为 H .

在 $\triangle ACH$ 中 , $\angle CAH = \pi - \angle CAB = \frac{\pi}{4}$, $CH = 1$, 所以 $AH = 1$, $AC = \sqrt{2}$. 在 $\triangle BCH$ 中 , $\tan B = \frac{1}{2}$, $CH = 1$,

所以 $BH = 2$, 所以 $AB = BH - AH = 1$, 所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$.

3. (安徽省滁州市定远县第三中学 2022-2023 学年高三数学试题) $\triangle ABC$ 中 , 内角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 满足 $b^2 = a^2 + c^2 - ac$.

(1) 当 A 为何值时 , 函数 $y = 2 \sin^2 A + \cos\left(\frac{C-3A}{2}\right)$ 取到最大值 , 最大值是多少 ?

(2) 若 $c-a$ 等于边 AC 上的高 h , 求 $\sin\left(\frac{C-A}{2}\right)$ 的值 .

【答案】(1) $A = \frac{\pi}{3}$ 时 , $y = 2 \sin^2 A + \cos\left(\frac{C-3A}{2}\right)$ 取得最大值 , 最大值为 2 ; (2) $\frac{1}{2}$.

【分析】(1) 由余弦定理求出 $B = \frac{\pi}{3}$, 对 $y = 2 \sin^2 A + \cos\left(\frac{C-3A}{2}\right)$ 恒等变形得到 $y = 1 + \sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right)$, 利用整体法求解出最大值 ;

(2) 先利用三角形面积公式和正弦定理得到 $\sin A \sin C = \sin C - \sin A$, 再使用和差化积等得到

$\sin \frac{C-A}{2} = \frac{3}{4} - \sin^2 \frac{C-A}{2}$, 解方程求出 : $\sin \frac{C-A}{2} = \frac{1}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$, 舍去不合要求的解 , 求出答案 .

【详解】(1) 由 $b^2 = a^2 + c^2 - ac$ 得 : $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{ac}{2ac} = \frac{1}{2}$,

因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$,

$$\begin{aligned} y &= 2 \sin^2 A + \cos\left(\frac{C-3A}{2}\right) = 1 - \cos 2A + \cos\left(\frac{\pi - \frac{\pi}{3} - A - 3A}{2}\right) \\ &= 1 - \cos 2A + \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2A\right) = 1 - \cos 2A + \cos \frac{\pi}{3} \cos 2A + \sin \frac{\pi}{3} \sin 2A \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2A - \frac{1}{2} \cos 2A = 1 + \sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) .$$

因为 $A \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$, 所以 $2A - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right)$.

所以当 $2A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ ，即 $A = \frac{\pi}{3}$ 时， $y = 2\sin^2 A + \cos\left(\frac{C-3A}{2}\right) = 1 + \sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right)$ 取得最大值，最大值为 2；

(2) 由 (1) 知： $B = \frac{\pi}{3}$ ，

由三角形面积公式得： $\frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}b(c-a)$ ，

从而 $ac\sin B = b(c-a)$ ，由正弦定理得： $\sin A\sin C\sin B = \sin B(\sin C - \sin A)$ ，

因为 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，所以 $\sin A\sin C = \sin C - \sin A$ ，

由和差化积得： $\sin C - \sin A = 2\cos\frac{C+A}{2}\sin\frac{C-A}{2} = 2\cos\frac{\pi-B}{2}\sin\frac{C-A}{2} = \sin\frac{C-A}{2}$ ，

因为 $\sin^2\frac{C+A}{2} - \sin^2\frac{C-A}{2} = \frac{1-\cos(C+A)}{2} - \frac{1-\cos(C-A)}{2}$
 $= \frac{\cos(C-A)}{2} - \frac{\cos(C+A)}{2} = \frac{\cos C\cos A + \sin C\sin A - \cos C\cos A + \sin C\sin A}{2} = \sin C\sin A$ ，

所以 $\sin C\sin A = \sin^2\frac{C+A}{2} - \sin^2\frac{C-A}{2} = \sin^2\frac{\pi-B}{2} - \sin^2\frac{C-A}{2} = \frac{3}{4} - \sin^2\frac{C-A}{2}$ ，

故 $\sin\frac{C-A}{2} = \frac{3}{4} - \sin^2\frac{C-A}{2}$ ，解得： $\sin\frac{C-A}{2} = \frac{1}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$ ，

因为 $\sin\frac{C-A}{2} \in (-1, 1)$ ，所以 $\sin\frac{C-A}{2} = \frac{1}{2}$ 。

题型九：图形 6：中线与重心型

1. (2022 春·河北邢台·高三统考) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知

$2\sqrt{3}(\cos^2 C - \cos^2 A) = (a-b)\sin B$ ，且 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $\sqrt{3}$ 。

(1) 求 C 的大小；

(2) 若 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，求 $\triangle ACG$ 面积的最大值。

【答案】(1) $C = \frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

【分析】(1) 根据正弦定理可得 $a = 2\sqrt{3}\sin A, b = 2\sqrt{3}\sin B, c = 2\sqrt{3}\sin C$ ，然后根据同角平方和的关系以及正弦定理的边角互化得 $a^2 - c^2 = (a-b)b$ ，进而根据余弦定理可求角。

(2) 根据余弦定理以及均值不等式可得 $ab \leq 9$ ，根据重心的性质可得 $S_{\triangle ACG} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$ ，进而根据面积公式即可求解。

【详解】(1) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2\sqrt{3}$ ，得 $a = 2\sqrt{3}\sin A, b = 2\sqrt{3}\sin B, c = 2\sqrt{3}\sin C$

因为 $2\sqrt{3}(\cos^2 C - \cos^2 A) = 2\sqrt{3}(1 - \sin^2 C - 1 + \sin^2 A) = 2\sqrt{3}(\sin^2 A - \sin^2 C) = (a-b)\sin B$ ，

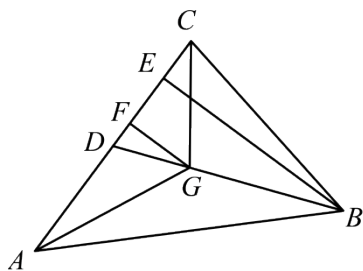
所以 $a^2 - c^2 = (a-b)b$ ，所以 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$ ，因为 $C \in (0, \pi)$ ，故 $C = \frac{\pi}{3}$ 。

(2) 由 (1) 得 $c = 2\sqrt{3}\sin C = 3$ ，所以 $a^2 + b^2 - c^2 = ab \geq 2ab - 9$ ，得 $ab \leq 9$ ，当且仅当 $a = b = 3$ 时，等号成立。

连接 BG ，并延长 BG 交 AC 于 D ，则 D 是 AC 的中点，且 $DG = \frac{1}{3}BD$ ，

过 G 作 $GF \perp AC$ 于 F ，过 B 作 $BE \perp AC$ 于 E ，则 $\frac{FG}{BE} = \frac{DG}{BD} = \frac{1}{3}$ ，

所以 $S_{\triangle ACG} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{6} ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{12} ab \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$. 故 $\triangle ACG$ 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$



2. (2023 春·河北秦皇岛·高三校考阶段练习) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a(\sqrt{3}\sin B - \cos C) = (c-b)\cos A$. 从下列①②③这三个条件中选择一个补充在横线处, 并作答.

① O 为 $\triangle ABC$ 的内心; ② O 为 $\triangle ABC$ 的外心; ③ O 为 $\triangle ABC$ 的重心.

(1) 求 A ;

(2) 若 $b=6, c=10$, _____ , 求 $\triangle OBC$ 的面积.

注: 如果选择多个条件分别解答, 则按第一个解答计分.

【答案】(1) $\frac{2\pi}{3}$ (2) 选①: $7\sqrt{3}$; 选②: $\frac{49\sqrt{3}}{3}$; 选③: $5\sqrt{3}$.

【分析】(1) 由正弦定理化边为角, 由三角函数恒等变换求得 A 角;

(2) 选①, 由余弦定理求得 BC , 由面积公式求得三角形面积, 再结合内切圆半径表示三角形面积求得内切圆半径, 即可求 $\triangle OBC$ 面积; 选②, 由余弦定理求得 BC , 由正弦定理求得三角形外接圆半径, 由圆周角定理和圆心角定理求得 $\angle BOC$, 直接由面积公式计算出面积; 选③, 由余弦定理求得 BC , 利用三角形重心的性质, 即重心和三角形的三个顶点组成的三个三角形面积相等, 用三角形面积公式求解 $\triangle ABC$ 的面积即可.

【详解】(1) 因为 $a(\sqrt{3}\sin B - \cos C) = (c-b)\cos A$,

由正弦定理得 $\sin A(\sqrt{3}\sin B - \cos C) = (\sin C - \sin B)\cos A$,

$\sqrt{3}\sin A\sin B + \sin B\cos A = \sin C\cos A + \sin A\cos C$,

$2\sin B(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A + \frac{1}{2}\cos A) = \sin(A+C) = \sin B$,

三角形中, $\sin B \neq 0$, 所以 $\sin(A + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$,

$0 < A < \pi$, 则 $\frac{\pi}{6} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6}$, 所以 $A + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, $A = \frac{2\pi}{3}$;

(2) 选① O 为 $\triangle ABC$ 的内心, 如图, D, E, F 分别是内切圆在各边上的切点,

在 $\triangle ABC$ 中由余弦定理得 $BC = \sqrt{6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \cos \frac{2\pi}{3}} = 14$.

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \sin \frac{2\pi}{3} = 15\sqrt{3}$.

设内切圆半径为 r , 则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(a+b+c)r = 15r = 15\sqrt{3}$, $r = \sqrt{3}$.

所以 $S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2}BC \cdot r = \frac{1}{2} \times 14 \times \sqrt{3} = 7\sqrt{3}$;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/625234003011012020>