

2023-2024 学年广东省珠海市紫荆中学高三下摸底统一考试数学试题

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 不等式 $\begin{cases} 4x - y \leq 2, \\ x + y \geq 3 \end{cases}$ 的解集记为 D , 有下面四个命题: $p_1: \forall (x, y) \in D, 2y - x \leq 5$; $p_2: \exists (x, y) \in D, 2y - x \leq 2$;

$p_3: \forall (x, y) \in D, 2y - x \leq 2$; $p_4: \exists (x, y) \in D, 2y - x \leq 4$. 其中的真命题是 ()

- A. p_1, p_2 B. p_2, p_3 C. p_1, p_3 D. p_2, p_4

2. 下列函数中, 在区间 $(0, +\infty)$ 上为减函数的是 ()

- A. $y = \sqrt{x+1}$ B. $y = x^2 - 1$ C. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ D. $y = \log_2 x$

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x > 0 \\ \frac{1}{2}x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 若 $m < n$, 且 $f(m) = f(n)$, 则 $n - m$ 的取值范围为 ()

- A. $[3 - 2\ln 2, 2)$ B. $[3 - 2\ln 2, 2]$ C. $[e - 1, 2)$ D. $[e - 1, 2]$

4. 二项式 $\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x}\right)^7$ 展开式中, $\frac{1}{x}$ 项的系数为 ()

- A. $-\frac{945}{16}$ B. $-\frac{189}{32}$ C. $-\frac{21}{64}$ D. $\frac{2835}{8}$

5. 若复数 $z = \frac{5}{2-i}$ (i 为虚数单位), 则 $\bar{z} =$ ()

- A. $2+i$ B. $2-i$ C. $1+2i$ D. $1-2i$

6. 阅读名著, 品味人生, 是中华民族的优良传统. 学生李华计划在高一年级每周星期一至星期五的每天阅读半个小时中国四大名著:《红楼梦》、《三国演义》、《水浒传》及《西游记》, 其中每天阅读一种, 每种至少阅读一次, 则每周不同的阅读计划共有 ()

- A. 120 种 B. 240 种 C. 480 种 D. 600 种

7. 已知抛物线 $x^2 = 4y$ 上一点 A 的纵坐标为 4, 则点 A 到抛物线焦点的距离为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

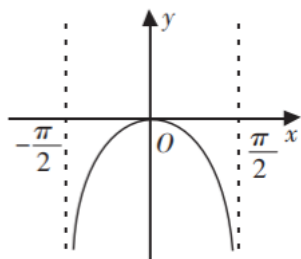
8. 大衍数列，米源于我国古代文献《乾坤谱》中对易传“大衍之数五十”的推论，主要用于解释我国传统文化中的太极衍生原理，数列中的每一项，都代表太极衍生过程中，曾经经历过的两仪数量总和.已知该数列前 10 项是 0, 2, 4, 8, 12, 18, 24, 32, 40, 50, ..., 则大衍数列中奇数项的通项公式为 ()

- A. $\frac{n^2-n}{2}$ B. $\frac{n^2-1}{2}$ C. $\frac{(n-1)^2}{2}$ D. $\frac{n^2}{2}$

9. 已知函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 在区间 $[m, 2m]$ 上的值域为 $[m, 2m]$, 则 $a =$ ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{16}$ 或 $\sqrt{2}$ D. $\frac{1}{4}$ 或 4

10. 函数 $y = f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的大致图象如图所示, 则 $f(x)$ 可能是 ()



- A. $f(x) = \ln|\sin x|$
 B. $f(x) = \ln(\cos x)$
 C. $f(x) = -\sin|\tan x|$
 D. $f(x) = -\tan|\cos x|$

11. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, -2)$, $\vec{c} = (\lambda, -1)$, 若 $\vec{c} \parallel (2\vec{a} + \vec{b})$, 则 $\lambda =$ ()

- A. -2 B. -1 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

12. 已知直线 m, n 和平面 α , 若 $m \perp \alpha$, 则“ $m \perp n$ ”是“ $n \parallel \alpha$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 不充分不必要

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中，常数项为_____；系数最大的项是_____.

14. 在直角坐标系中，某等腰直角三角形的两个顶点坐标分别为 $(1, 1), (2, 2)$, 函数

$f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ $\left(A > 0, 0 < \omega < \frac{\pi}{2}, |\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$ 的图象经过该三角形的三个顶点，则 $f(x)$ 的解析式为

$$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

15. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$, 直线 l 与圆 O 交于 P, Q 两点, $A(2, 2)$, 若 $AP^2 + AQ^2 = 40$, 则弦 PQ 的长度的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知正实数 x, y 满足 $xy = 1$, 则 $(\frac{x}{y} + y)(\frac{y}{x} + x)$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 某超市计划按月订购一种酸奶, 每天进货量相同, 进货成本每瓶 4 元, 售价每瓶 6 元, 未售出的酸奶降价处理, 以每瓶 2 元的价格当天全部处理完。根据往年销售经验, 每天需求量与当天最高气温 (单位: $^{\circ}\text{C}$) 有关。如果最高气温不低于 25, 需求量为 500 瓶; 如果最高气温位于区间 $[20, 25)$, 需求量为 300 瓶; 如果最高气温低于 20, 需求量为 200 瓶。为了确定六月份的订购计划, 统计了前三年六月份各天的最高气温数据, 得下面的频数分布表:

最高气温	$[10, 15)$	$[15, 20)$	$[20, 25)$	$[25, 30)$	$[30, 35)$	$[35, 40)$
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率估计最高气温位于该区间的概率。

- (1) 求六月份这种酸奶一天的需求量不超过 300 瓶的概率;
- (2) 设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y (单位: 元), 当六月份这种酸奶一天的进货量为 450 瓶时, 写出 Y 的所有可能值, 并估计 Y 大于零的概率。

18. (12 分) 对于正整数 n , 如果 $k (k \in \mathbb{N}^*)$ 个整数 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 满足 $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq n$,

且 $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$, 则称数组 $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ 为 n 的一个“正整数分拆”。记 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 均为偶数的“正整数分拆”的个数为 f_n , $a_1, a_2, \dots, a_k$ 均为奇数的“正整数分拆”的个数为 g_n 。

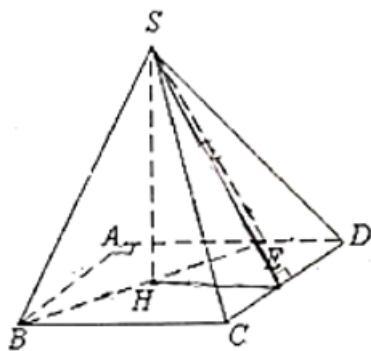
(I) 写出整数 4 的所有“正整数分拆”;

(II) 对于给定的整数 $n (n \geq 4)$, 设 $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ 是 n 的一个“正整数分拆”, 且 $a_1 = 2$, 求 k 的最大值;

(III) 对所有的正整数 n , 证明: $f_n \leq g_n$; 并求出使得等号成立的 n 的值。

(注: 对于 n 的两个“正整数分拆” $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ 与 $(b_1, b_2, \dots, b_m)$, 当且仅当 $k = m$ 且 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_k = b_m$ 时, 称这两个“正整数分拆”是相同的.)

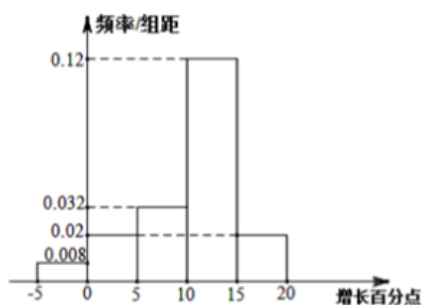
19. (12 分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $BC = 3$, 点 E 是边 AD 上一点, 且 $AE = 2ED$, 点 H 是 BE 的中点, 将 $\triangle ABE$ 沿着 BE 折起, 使点 A 运动到点 S 处, 且满足 $SC = SD$ 。



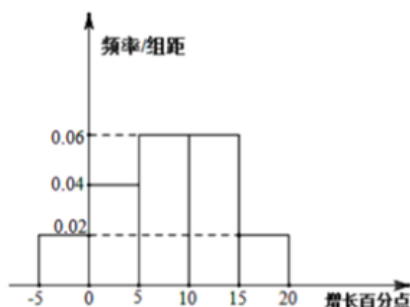
- (1) 证明: $SH \perp$ 平面 $BCDE$;
- (2) 求二面角 $C-SB-E$ 的余弦值.

20. (12 分) 新型冠状病毒肺炎疫情发生以来, 电子购物平台成为人们的热门选择. 为提高市场销售业绩, 某公司设计了一套产品促销方案, 并在某地区部分营销网点进行试点. 运作一年后, 对“采用促销”和“没有采用促销”的营销网点各选取了 50 个, 对比上一年度的销售情况, 分别统计了它们的年销售总额, 并按年销售总额增长的百分点分成 5 组: $[-5, 0)$, $[0, 5)$, $[5, 10)$, $[10, 15)$, $[15, 20]$, 分别统计后制成如图所示的频率分布直方图, 并规定年销售总额增长 10 个百分点及以上的营销网点为“精英店”.

“采用促销”的销售网点



“没有采用促销”的销售网点



(1) 请你根据题中信息填充下面的列联表, 并判断是否有的把握认为“精英店与采用促销活动有关”;

	采用促销	没有采用促销	合计
精英店			
非精英店			
合计	50	50	100

(2) 某“精英店”为了创造更大的利润, 通过分析上一年度的售价 x_i (单位: 元) 和日销量 y_i (单位: 件) ($i = 1, 2, \dots, 10$) 的一组数据后决定选择 $y = a + bx^2$ 作为回归模型进行拟合. 具体数据如下表, 表中的 $w_i = x_i^2$:

$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{w}$	$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^{10} (w_i - \bar{w})^2$	$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^{10} (w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y})$
45.8	395.5	2413.5	4.6	21.6	- 2.3	-7.2

- ①根据上表数据计算 a, b 的值;
- ②已知该公司成本为 10 元/件, 促销费用平均 5 元/件, 根据所求出的回归模型, 分析售价 x 定为多少时日利润 z 可以达到最大.

附①:
$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k	2.706	3.841	6.635	10.828

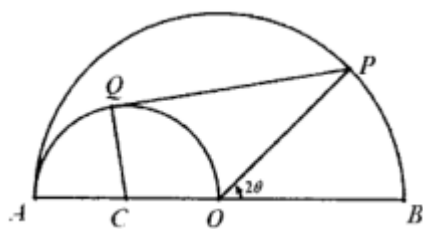
附②: 对应一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3), \dots, (u_n, v_n)$, 其回归直线 $v = \alpha + \beta u$ 的斜率和截距的最小二乘法估计分

别为
$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{10} (v_i - \bar{v})(u_i - \bar{u})}{\sum_{i=1}^{10} (u_i - \bar{u})^2}, \alpha = \bar{v} - \beta \bar{u}.$$

21. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$
 以原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2 = 6\rho(\cos \theta + \sin \theta) - 14$.

- (1) 写出圆 C 的直角坐标方程;
- (2) 设直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, $P(2, 0)$, 求 $|PA|^2 + |PB|^2$ 的值.

22. (10 分) 某广告商租用了一块如图所示的半圆形封闭区域用于产品展示, 该封闭区域由以 O 为圆心的半圆及直径 AB 围成. 在此区域内原有一个以 OA 为直径、 C 为圆心的半圆形展示区, 该广告商欲在此基础上, 将其改建成一个凸四边形的展示区 $COPQ$, 其中 P, Q 分别在半圆 O 与半圆 C 的圆弧上, 且 PQ 与半圆 C 相切于点 Q . 已知 AB 长为 40 米, 设 $\angle BOP$ 为 2θ . (上述图形均视作在同一平面内)



- (1) 记四边形 $COPQ$ 的周长为 $f(\theta)$, 求 $f(\theta)$ 的表达式;
- (2) 要使改建成的展示区 $COPQ$ 的面积最大, 求 $\sin \theta$ 的值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

作出 inequality 组表示的可行域，然后对四个选项一一分析可得结果.

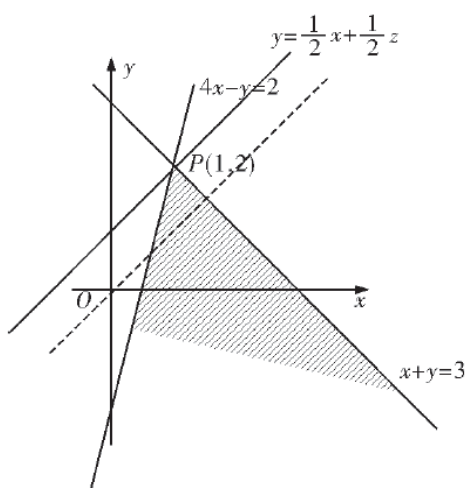
【详解】

作出可行域如图所示，当 $x=1, y=2$ 时， $(2y-x)_{\max}=3$ ，即 $2y-x$ 的取值范围为 $(-\infty, 3]$ ，所以

$\forall (x, y) \in D, 2y-x \leq 5, p_1$ 为真命题；

$\exists (x, y) \in D, 2y-x \leq 2, p_2$ 为真命题； p_3, p_4 为假命题.

故选：A



【点睛】

此题考查命题的真假判断与应用，着重考查作图能力，熟练作图，正确分析是关键，属于中档题.

2、C

【解析】

利用基本初等函数的单调性判断各选项中函数在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性，进而可得出结果.

【详解】

对于 A 选项，函数 $y = \sqrt{x+1}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数；

对于 B 选项，函数 $y = x^2 - 1$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数；

对于 C 选项，函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为减函数；

对于 D 选项，函数 $y = \log_2 x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数.

故选：C.

【点睛】

本题考查函数在区间上单调性的判断，熟悉一些常见的基本初等函数的单调性是判断的关键，属于基础题.

3、A

【解析】

分析：作出函数 $f(x)$ 的图象，利用消元法转化为关于 n 的函数，构造函数求得函数的导数，利用导数研究函数的单调性与最值，即可得到结论.

详解：作出函数 $f(x)$ 的图象，如图所示，若 $m < n$ ，且 $f(m) = f(n)$ ，

则当 $\ln(x+1) = 1$ 时，得 $x+1 = e$ ，即 $x = e-1$ ，

则满足 $0 < n < e-1, -2 < m \leq 0$ ，

则 $\ln(n+1) = \frac{1}{2}m+1$ ，即 $m = \ln(n+1) - 2$ ，则 $n - m = n + 2 - 2\ln(n+1)$ ，

设 $h(n) = n + 2 - 2\ln(n+1), 0 < n \leq e-1$ ，则 $h'(n) = 1 + \frac{2}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$ ，

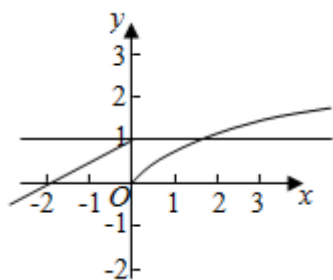
当 $h'(n) > 0$ ，解得 $1 < n \leq e-1$ ，当 $h'(n) < 0$ ，解得 $0 < n < 1$ ，

当 $n = 1$ 时，函数 $h(n)$ 取得最小值 $h(1) = 1 + 2 - 2\ln(1+1) = 3 - 2\ln 2$ ，

当 $n = 0$ 时， $h(0) = 2 - 2\ln 1 = 2$ ；

当 $n = e-1$ 时， $h(e-1) = e-1 + 2 - 2\ln(e-1+1) = e-1 < 2$ ，

所以 $3-2\ln 2 < h(n) < 2$ ，即 $n-m$ 的取值范围是 $[3-2\ln 2, 2)$ ，故选 A.



点睛：本题主要考查了分段函数的应用，构造新函数，求解新函数的导数，利用导数研究新函数的单调性和最值是解答本题的关键，着重考查了转化与化归的数学思想方法，以及分析问题和解答问题的能力，试题有一定的难度，属于中档试题.

4、D

【解析】

写出二项式的通项公式,再分析 x 的系数求解即可.

【详解】

二项式 $\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x}\right)^7$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_7^r \left(\frac{x}{2}\right)^{7-r} \left(-\frac{3}{x}\right)^r = C_7^r \left(\frac{1}{2}\right)^{7-r} (-3)^r x^{7-2r}$, 令 $7-2r = -1$, 得 $r = 4$, 故 $\frac{1}{x}$ 项的系数为 $C_7^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{7-4} (-3)^4 = \frac{2835}{8}$.

故选：D

【点睛】

本题主要考查了二项式定理的运算,属于基础题.

5、B

【解析】

根据复数的除法法则计算 z ，由共轭复数的概念写出 $\bar{z}$.

【详解】

$$Q z = \frac{5}{2-i} = \frac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{10+5i}{5} = 2+i,$$

$$\therefore \bar{z} = 2-i,$$

故选：B

【点睛】

本题主要考查了复数的除法计算，共轭复数的概念，属于容易题.

6、B

【解析】

首先将五天进行分组，再对名著进行分配，根据分步乘法计数原理求得结果.

【详解】

将周一至周五分为4组，每组至少1天，共有： $\frac{C_5^2 C_3^1 C_2^1}{A_3^3} = 10$ 种分组方法；

将四大名著安排到4组中，每组1种名著，共有： $A_4^4 = 24$ 种分配方法；

由分步乘法计数原理可得不同的阅读计划共有： $10 \times 24 = 240$ 种

本题正确选项：B

【点睛】

本题考查排列组合中的分组分配问题，涉及到分步乘法计数原理的应用，易错点是忽略分组中涉及到的平均分组问题.

7、D

【解析】

试题分析：抛物线 $x^2 = 4y$ 焦点在 y 轴上，开口向上，所以焦点坐标为 $(0,1)$ ，准线方程为 $y = -1$ ，因为点 A 的纵坐标为 4，所以点 A 到抛物线准线的距离为 $4+1=5$ ，因为抛物线上的点到焦点的距离等于到准线的距离，所以点 A 与抛物线焦点的距离为 5.

考点：本小题主要考查应用抛物线定义和抛物线上点的性质抛物线上的点到焦点的距离，考查学生的运算求解能力.

点评：抛物线上的点到焦点的距离等于到准线的距离，这条性质在解题时经常用到，可以简化运算.

8、B

【解析】

直接代入检验，排除其中三个即可.

【详解】

由题意 $a_1 = 0$ ，排除 D， $a_3 = 4$ ，排除 A，C. 同时 B 也满足 $a_5 = 12$ ， $a_7 = 24$ ， $a_9 = 40$ ，

故选：B.

【点睛】

本题考查由数列的项选择通项公式，解题时可代入检验，利用排除法求解.

9、C

【解析】

对 a 进行分类讨论，结合指数函数的单调性及值域求解.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/626113005040010232>