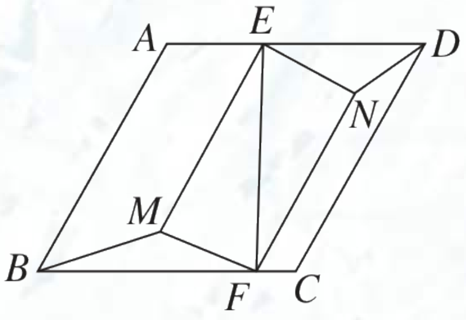
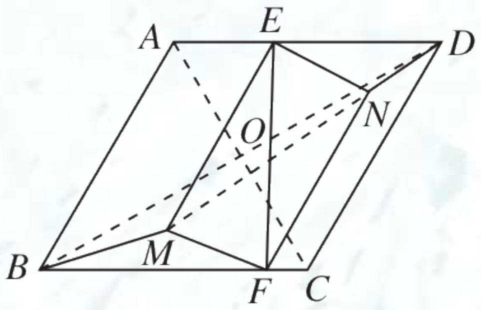
阶段拔尖专训7 特殊平行四边形中的动点问题

题型1 利用菱形的性质解动点问题



1.如图，在菱形$ABCD$中，$\angle ABC = 60°$，$AB = 4$，点E，F分别是边AD，BC上的两个动点，在菱形的内部构造一个矩形$EMFN$，连接EF,BM,DN，求$BM + EF + DN$的最小值.

【解】如图，连接AC，BD交于点O.



∵ 四边形$ABCD$为菱形，

$\therefore BC = AB = 4$，$AC \perp BD$，

$OA = OC$，$OB = OD$.

又$\because \angle ABC = 60°$，

$\therefore \triangle ABC$是等边三角形.

$\therefore AC = AB = 4. \therefore OA = OC = 2.$

$\therefore OB = \sqrt{AB^2 - AO^2} = 2\sqrt{3}. \therefore BD = 2OB = 4\sqrt{3}.$

连接$MN. \because$ 四边形$EMFN$是矩形，$\therefore MN = EF.$

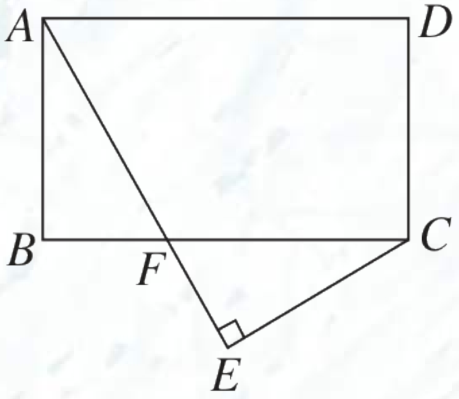
$\therefore BM + EF + DN = BM + MN + DN.$

$\therefore$ 当B，M，N，D四点共线时，$BM + EF + DN$的值最小,为BD的值.

$\therefore BM + EF + DN$的最小值为$4\sqrt{3}.$

题型2 利用矩形的性质解动点问题

2.[2024·泰安月考] 如图，在矩形$ABCD$中，点F是BC上一点，且$CF=2BF$，$CE\perp AF$，垂足为点E，$\angle BCE=30^{\circ}$.



(1) 求证：$AE=EF+CF$.

【证明】∵ 四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore \angle B = 90^\circ$.

$\because AF \perp CE$，$\therefore \angle E = 90^\circ = \angle B$.

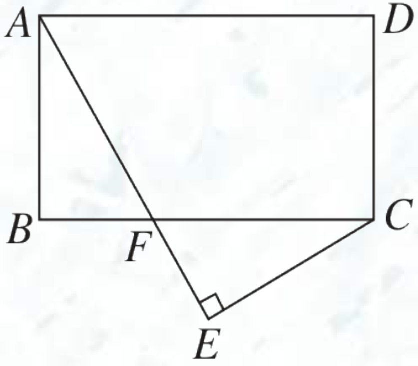
又$\because \angle ECF = 30^\circ$ ，$\therefore EF = \frac{1}{2}CF$.

又$\because CF = 2BF$，$\therefore BF = EF$.

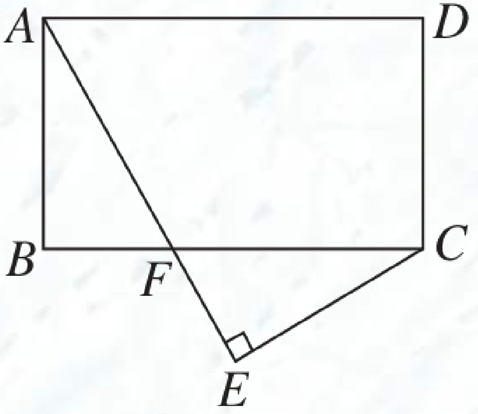
又$\because \angle AFB = \angle CFE$，

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CEF(\mathrm{ASA})$. $\therefore AF = CF$.

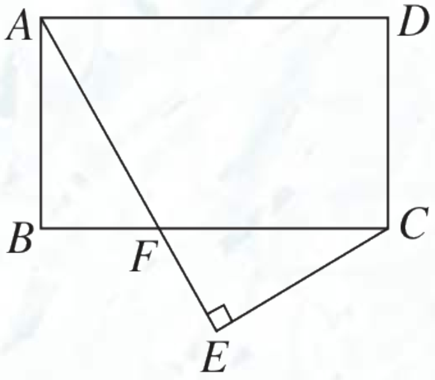
$\because AE = EF + AF$，$\therefore AE = EF + CF$.



（2）若$AD=6\text{ cm}$，点P是AD上一动点，以1 cm/s的速度从点A运动到点D，问：当点P运动多少秒时，四边形$AFCP$是菱形？请说明理由.



【解】当点P运动4 s时，四边形$AFCP$是菱形.理由如下：



设点P运动t s时，四边形$AFCP$是菱形.

$\because$ 四边形$AFCP$是菱形，

$\therefore AP = AF = CF = CP = t$ cm.

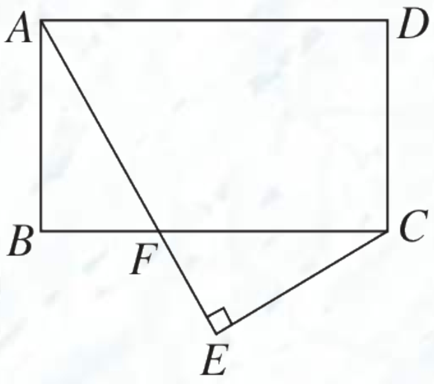
$\because CF = 2BF$，$\therefore BF = \frac{1}{2}t$ cm.

$\because$ 四边形$ABCD$是矩形，$AD=6$ cm，

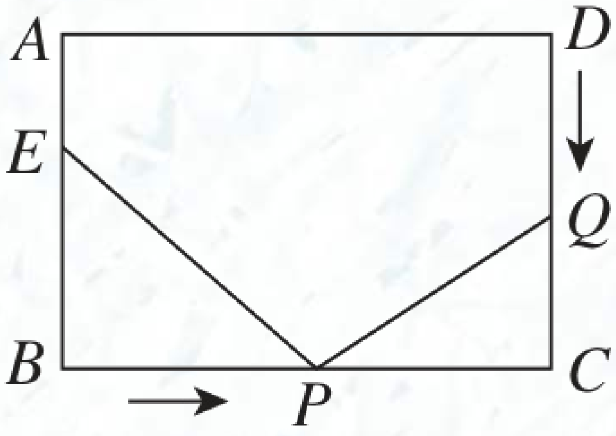
$\therefore BC=AD=6$ cm.

$\therefore \frac{1}{2}t+t=6$，解得$t=4$.

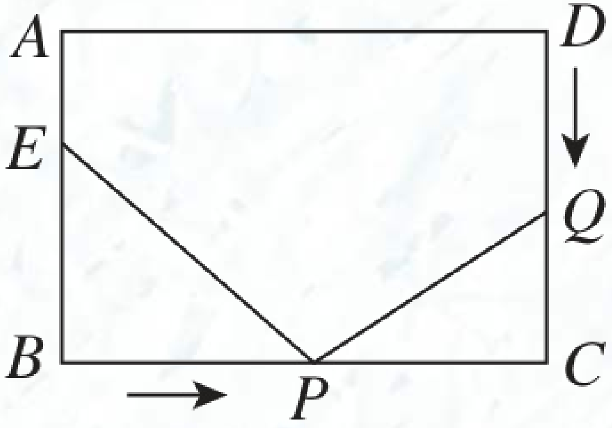
$\therefore$ 当点P运动4 s时，四边形$AFCP$是菱形.



3.[2024·威海文登区期中] 如图，已知矩形$ABCD$的边长$AB = 12\ \text{cm}$，$BC = 18\ \text{cm}$，点E在边AB上，$AE = 4\ \text{cm}$，点P从点B出发在线段BC上以2 cm/s的速度向点C运动，同时点Q在线段CD上由点D向点C运动，运动时间为t s，两个点有一个点停止运动则全部停止运动.



（1）当点Q运动的速度为$1\ cm/s$，且$\triangle PCQ$为等腰三角形时，求t的值.



【解】由题意得$BP=2t\ cm$，

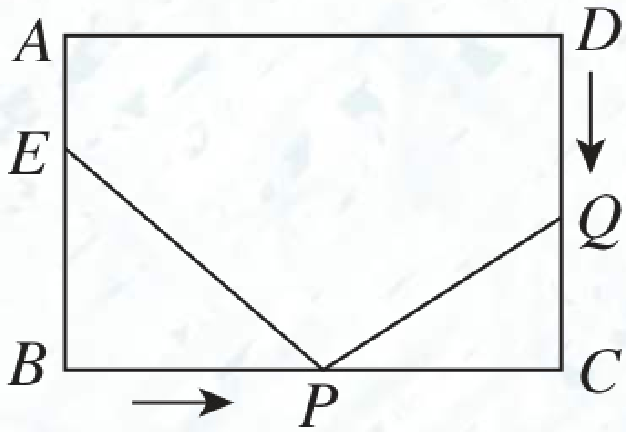
$DQ=t\ cm$，则$PC=(18-2t)cm$，

$CQ=(12-t)cm$.

$\because \triangle PCQ$为等腰三角形，

$\therefore PC=CQ$，即$18-2t=12-t$,解得$t=6$.

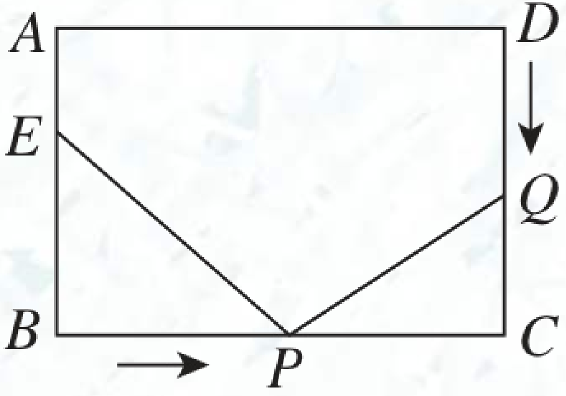
(2) 当$\triangle BPE$与$\triangle CQP$全等时，点Q运动的速度是多少？



分两种情况：

①当$EB = PC$，$BP = QC$时，

$\triangle BPE \cong \triangle CQP$.



$\because AB = 12\text{ cm}$，$AE = 4\text{ cm}$,

$\therefore BE = PC = 8\text{ cm}$.

又$\because BC = 18\text{ cm}$，$\therefore BP = CQ = 10\text{ cm}$.

$\because$ 点P从点B出发在线段BC上以2 cm/s的速度向点C运动，