

第二十二章 一元二次方程



22

- 22.1 一元二次方程
- 22.2 降次——解一元二次方程
- 22.3 实际问题与一元二次方程

我们来看一个问题.

要设计一座2m高的人体雕像,使雕像的上部(腰以上)与下部(腰以下)的高度比,等于下部与全部的高度比,雕像的下部应设计为多高?

雕像上部的高度AC,下部的高度BC应有如下关系:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{2} \quad \text{即} \quad BC^2 = 2AC.$$

设雕像下部高 x m, 于是得方程

$$x^2 = 2(2-x).$$

整理得

$$x^2 + 2x - 4 = 0.$$

你会发现这个方程与以前学习过的一次方程不同, 其中未知数 x 的最高次数是2. 怎样解这样的方程从而得到问题的答案呢?

本章中, 我们将认识一种新方程——一元二次方程, 讨论解这种方程的方法, 并运用这种方程解决一些实际问题. 通过本章的学习, 对方程的认识将从一次方程扩展到二次方程.



22.1 一元二次方程

引言中的方程

$$x^2 + 2x - 4 = 0 \quad ①$$

有一个未知数 x ， x 的最高次数是 2. 像这样的方程有广泛的应用，请看下面的问题.



图 22.1-1

问题 1 如图 22.1-1，有一块矩形铁皮，长 100 cm，宽 50 cm，在它的四角各切去一个正方形，然后将四周突出部分折起，就能制作一个无盖方盒. 如果要制作的无盖方盒的底面积为 3 600 cm²，那么铁皮各角应切去多大的正方形？

设切去的正方形的边长为 x cm，则盒底的长为 $(100-2x)$ cm，宽为 $(50-2x)$ cm. 根据方盒的底面积为 3 600 cm²，得

$$(100-2x)(50-2x)=3\,600.$$

整理，得

$$4x^2 - 300x + 1400 = 0.$$

化简，得

$$x^2 - 75x + 350 = 0. \quad ②$$

由方程②可以得出所切正方形的具体尺寸.

方程②中未知数的个数和次数各是多少？



问题 2 要组织一次排球邀请赛，参赛的每两个队之间都要比赛一场. 根据场地和时间等条件，赛程计划安排 7 天，每天安排 4 场比赛，比赛组织者应邀请多少个队参赛？

全部比赛共 $4 \times 7 = 28$ (场).

设应邀请 x 个队参赛，每个队要与其他 $(x-1)$

个队各赛 1 场，由于甲队对乙队的比赛和乙队对甲队的比赛是同一场比赛，所以全部比赛共 $\frac{1}{2}x(x-1)$ 场。

列方程

$$\frac{1}{2}x(x-1)=28.$$

整理，得

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x = 28.$$

化简，得

$$x^2 - x = 56. \quad \textcircled{3}$$

由方程③可以得出参赛队数。

方程③中未知数的个数和次数各是多少？



观察

方程①②③有什么共同点？

可以发现，这些方程的两边都是整式，方程中只含有一个未知数，未知数的最高次数是 2。同样地，方程 $4x^2=9$ ， $x^2+3x=0$ ， $3y^2-5y=7$ 等也是这样的方程。像这样的等号两边都是整式，只含有一个未知数（一元），并且未知数的最高次数是 2（二次）的方程，叫做 **一元二次方程**（quadratic equation in one unknown）。

一般地，任何一个关于 x 的一元二次方程，经过整理，都能化成如下形式

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0).$$

这种形式叫做一元二次方程的一般形式，其中 ax^2 是二次项， a 是二次项系数； bx 是一次项， b 是一次项系数； c 是常数项。

为什么规定 $a \neq 0$ ？

例 将方程 $3x(x-1)=5(x+2)$ 化成一元二次方

程的一般形式，并写出其中的二次项系数、一次项系数及常数项。

解：去括号，得

$$3x^2 - 3x = 5x + 10.$$

移项，合并同类项，得一元一次方程的一般形式

$$3x^2 - 8x - 10 = 0.$$

其中二次项系数为 3，一次项系数为 -8，常数项为 -10.

练习

1. 将下列方程化成一元二次方程的一般形式，并写出其中的二次项系数、一次项系数及常数项：

(1) $5x^2 - 1 - 4x$;

(2) $4x^2 - 81$;

(3) $4x(x+2) - 25$;

(4) $(3x-2)(x+1) - 8x - 3$.

2. 根据下列问题，列出关于 x 的方程，并将其化成一元二次方程的一般形式：

(1) 4 个完全相同的正方形的面积之和是 25 m^2 ，求正方形的边长 x ;

(2) 一个矩形的长比宽多 2 m，面积是 100 m^2 ，求矩形的长 x ;

(3) 把 1 m 长的木条分成两段，使较短一段的长与全长的积，等于较长一段的长的平方，求较短一段的长 x ;

(4) 一个直角三角形的斜边长 10 cm，两条直角边相差 2 cm，求较长的直角边长 x .

前面有关排球邀请赛的问题中，我们列出方程③

$$x^2 - x = 56.$$

当 $x=1$ 时， $x^2 - x = 0$ ；当 $x=2$ 时， $x^2 - x = 2$

……我们可以得出下表：

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$x^2 - x$	0	2	6	12	20	30	42	56	72	90	...

可以发现, 当 $x=8$ 时, $x^2-x=56$, 所以 $x=8$ 是方程 $x^2-x=56$ 的解. 一元二次方程的解也叫做一元二次方程的根 (root).

是否只有 $x=8$ 是方程 $x^2-x=56$ 的根呢?

将 $x=-7$ 代入方程 $x^2-x=56$, 左边 $=(-7)^2-(-7)=56$ =右边, 所以 $x=-7$ 也是方程 $x^2-x=56$ 的根.

通过对后面 22.2 节的学习, 我们将能说明除 8 和 -7 外, 方程 $x^2-x=56$ 没有其他的根.

虽然方程 $x^2-x=56$ 有两个根 (8 和 -7), 但是排球邀请赛问题的答案只有一个, 即应邀请 8 个队参赛.

这就是说, 由实际问题列出方程并得出方程的解后, 还要考虑这些解是否确实是实际问题的解.

你能说出这是为什么吗?



你能想出下列方程的根吗?

(1) $x^2-36=0$; (2) $4x^2-9=0$.

练习

- 下面哪些数是方程 $x^2-x-6=0$ 的根?
-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.
- 试写出方程 $x^2-x=0$ 的根, 你能写出几个?

习题22.1

复习巩固

1. 将下列方程化成一元二次方程的一般形式，并写出它们的二次项系数、一次项系数及常数项：

(1) $3x^2+1=6x$; (2) $4x^2+5x=81$;
(3) $x(x+5)=0$; (4) $(2x-2)(x-1)=0$;
(5) $x(x+5)=5x-10$; (6) $(3x-2)(x+1)=x(2x-1)$.

2. 根据下列问题列方程，并将其化成一元二次方程的一般形式：

- (1) 一个圆的面积是 6.28 m^2 ，求半径 ($\pi \approx 3.14$)；
(2) 一个直角三角形的两条直角边相差 3 cm ，面积是 9 cm^2 ，求较长的直角边的长.

3. 下列哪些数是方程 $x^2+x-12=0$ 的根？

-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.

4. 写出下列方程的根：

(1) $9x^2=1$; (2) $25x^2-4=0$; (3) $4x^2=2$.

综合运用

根据下列问题列方程，并将其化成一元二次方程的一般形式（第5~7题）：

5. 一个矩形的长比宽多 1 cm ，对角线长 5 cm ，矩形的长和宽各是多少？
6. 有一根 1 m 长的铁丝，怎样用它围成一个面积为 0.06 m^2 的矩形？
7. 参加一次聚会的每两人都握了一次手，所有人共握手 10 次，有多少人参加聚会？

拓广探索

8. 你能想出下列方程的根吗？如果能，写出方程的根，并说出你是怎样想出的.

(1) $(x-2)^2=1$; (2) $9(x-2)^2=1$;
(3) $x^2+2x+1=4$; (4) $x^2-6x+9=0$.

9. 如果 2 是方程 $x^2-c=0$ 的一个根，那么常数 c 是几？你能得出这个方程的其他根吗？

22.2 降次——解一元二次方程

22.2.1 配方法



问题 1 一桶某种油漆可刷的面积为 $1\,500\text{ dm}^2$ ，李林用这桶油漆恰好刷完 10 个同样的正方体形状的盒子的全部外表面，你能算出盒子的棱长吗？

设正方体的棱长为 $x\text{ dm}$ ，则一个正方体的表面积为 $6x^2\text{ dm}^2$ 。根据一桶油漆可刷的面积，列出方程

$$10 \times 6x^2 = 1\,500. \quad \text{①}$$

由此可得

$$x^2 = 25.$$

根据平方根的意义，得

$$x = \pm 5,$$

即

$$x_1 = 5, x_2 = -5.$$

可以验证，5 和 -5 是方程①的两根，但是棱长不能是负值，所以正方体的棱长为 5 dm。



对照上面解方程①的过程，你认为应怎样解方程 $(2x-1)^2=5$ 及方程 $x^2+6x+9=2$ ？

在解方程①时，由方程 $x^2=25$ 得 $x=\pm 5$ ，由此容易想到：由方程

$$(2x-1)^2=5, \quad \text{②}$$

得

$$2x-1=\pm\sqrt{5},$$

即

$$2x-1=\sqrt{5}, 2x-1=-\sqrt{5}. \quad ③$$

方程的两根为

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

上面的解法中,由方程②得到③,实质上是把一个一元二次方程“降次”,转化为两个一元一次方程,这样问题就容易解决了.

方程 $x^2+6x+9=2$ 的左边是完全平方形式,这个方程可以化成 $(x+3)^2=2$, 进行降次,得 _____, 方程的根为 $x_1=$ _____, $x_2=$ _____.

归 纳

如果方程能化成 $x^2=p$ 或 $(mx+n)^2=p(p\geq 0)$ 的形式,那么可得 $x=\pm\sqrt{p}$ 或 $mx+n=\pm\sqrt{p}$.

练习

解下列方程:

(1) $2x^2-8=0$;

(2) $9x^2-5=3$;

(3) $(x+6)^2-9=0$;

(4) $3(x-1)^2-6=0$;

(5) $x^2-4x+4=5$;

(6) $9x^2+6x+1=4$.

问题 2 要使一块矩形场地的长比宽多 6 m, 并且面积为 16 m^2 , 场地的长和宽应各是多少?

设场地宽 $x \text{ m}$, 长 $(x+6) \text{ m}$. 根据矩形面积为 16 m^2 , 列方程

$$x(x+6)=16,$$

即

$$x^2+6x-16=0. \quad ②$$

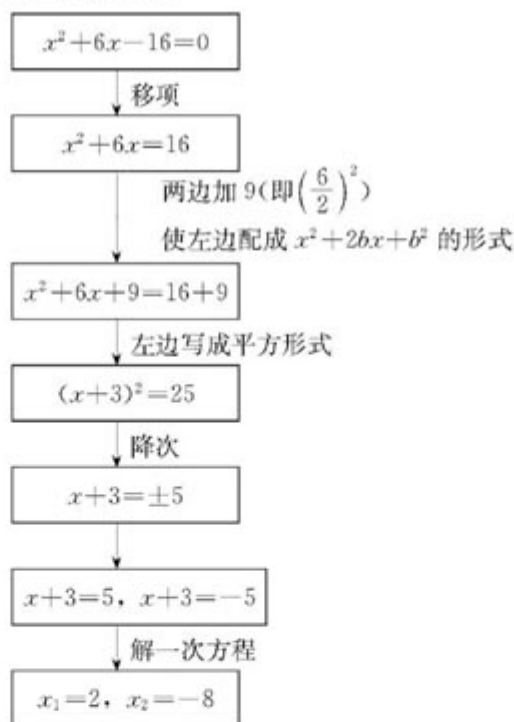


思考

怎样解方程 $x^2+6x-16=0$?

对比这个方程与前面讨论过的方程 $x^2+6x+9=2$, 可以发现方程 $x^2+6x+9=2$ 的左边是含有 x 的完全平方形式, 右边是非负数, 可以直接降次解方程; 而方程 $x^2+6x-16=0$ 不具有上述形式, 直接降次有困难. 能设法把 $x^2+6x-16=0$ 化为具有上述形式的方程吗?

请看下面的框图:



可以验证, 2 和 -8 是方程②的两根, 但是场地的宽不能是负值, 所以场地的宽为 2 m, 长为 8(即 $2+6$)m.



以上解法中, 为什么在方程 $x^2+6x=16$ 两边加 9? 加其他数行吗?

像上面那样, 通过配成完全平方形式来解一元二次方程的方法, 叫做**配方法**. 可以看出, 配方是为了降次, 把一个一元二次方程转化成两个一元一次方程来解.

例 1 解下列方程:

(1) $x^2-8x+1=0$; (2) $2x^2+1=3x$;

(3) $3x^2-6x+4=0$.

解: (1) 移项, 得

$$x^2-8x=-1.$$

配方

$$x^2-8x+4^2=-1+4^2,$$

$$(x-4)^2=15.$$

由此可得

$$x-4=\pm\sqrt{15},$$

$$x_1=4+\sqrt{15}, x_2=4-\sqrt{15}.$$

(2) 移项, 得

$$2x^2-3x=-1.$$

二次项系数化为 1, 得

$$x^2-\frac{3}{2}x=-\frac{1}{2}.$$

配方

为什么方程两边都加 4^2 ? 加其他数行吗?

方程的二次项系数不是 1 时, 为便于配方, 可以让方程的各项除以二次项系数

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2,$$

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}.$$

为什么方程两边都加 $\left(\frac{3}{4}\right)^2$?

由此可得

$$x - \frac{3}{4} = \pm \frac{1}{4},$$

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}.$$

(3) 移项, 得

$$3x^2 - 6x = -4.$$

二次项系数化为 1, 得

$$x^2 - 2x = -\frac{4}{3}.$$

为什么方程两边都加 1^2 ?

配方

$$x^2 - 2x + 1^2 = -\frac{4}{3} + 1^2,$$

$$(x-1)^2 = -\frac{1}{3}.$$

因为实数的平方不会是负数, 所以 x 取任何实数时, $(x-1)^2$ 都是非负数, 上式都不成立, 即原方程无实数根.

练习

1. 填空:

$$(1) x^2 + 10x + \underline{\quad} = (x + \underline{\quad})^2; \quad (2) x^2 - 12x + \underline{\quad} = (x - \underline{\quad})^2;$$

$$(3) x^2 + 5x + \underline{\quad} = (x + \underline{\quad})^2; \quad (4) x^2 - \frac{2}{3}x + \underline{\quad} = (x - \underline{\quad})^2.$$

2. 解下列方程:

$$(1) x^2 + 10x + 9 = 0;$$

$$(2) x^2 - x - \frac{7}{4} = 0;$$

$$(3) 3x^2 + 6x - 4 = 0;$$

$$(4) 4x^2 - 6x - 3 = 0;$$

$$(5) x^2 + 4x - 9 = 2x - 11;$$

$$(6) x(x+4) = 8x+12.$$

22.2.2 公式法

任何一元二次方程都可以写成一般形式

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0). \quad ①$$

能否也用配方法得出①的解呢?

移项, 得

$$ax^2+bx=-c.$$

二次项系数化为1, 得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

配方

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

即

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \quad ②$$

因为 $a \neq 0$, $4a^2 > 0$. 当 $b^2-4ac \geq 0$ 时, $\frac{b^2-4ac}{4a^2} \geq 0$,

由②式得

$$x+\frac{b}{2a}=+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \quad ③$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

注意由②
到③的条件.

由上可知, 一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0)$$

的根由方程的系数 a , b , c 确定. 因此, 解一元二次方程时, 可以先将方程化为一般形式 $ax^2+bx+c=0$, 当 $b^2-4ac \geq 0$ 时, 将 a , b , c 代入式子

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

就得到方程的根. 这个式子叫做一元二次方程的**求根公式**, 利用它解一元二次方程的方法叫做**公式法**. 由求根公式可知, 一元二次方程最多有两个实数根.

例 2 解下列方程:

$$(1) 2x^2 - x - 1 = 0; \quad (2) x^2 + 1.5 = -3x;$$

$$(3) x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} = 0; \quad (4) 4x^2 - 3x + 2 = 0.$$

解: (1) $a=2, b=-1, c=-1$.

$$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 > 0.$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1 \pm 3}{4},$$

$$x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}.$$

(2) 将方程化为一般形式

$$x^2 + 3x + 1.5 = 0.$$

$$a=1, b=3, c=1.5.$$

$$b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 1.5 = 3 > 0.$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{2 \times 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{2},$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{3}}{2}.$$

(3) $a=1, b=-\sqrt{2}, c=\frac{1}{2}$.

$$b^2 - 4ac = (-\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = 0.$$

$$x = \frac{-(-\sqrt{2}) \pm \sqrt{0}}{2 \times 1} = \frac{\sqrt{2} \pm 0}{2}.$$

$$x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(4) $a=4, b=-3, c=2$.

$$b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 4 \times 2 = 9 - 32 = -23 < 0.$$

因为在实数范围负数不能开平方, 所以方程无实数根.

确定 a, b, c 的值时要注意符号.

当 $b^2 - 4ac = 0$ 时, $x_1 = x_2$, 即方程的两根相等.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/626212055232010104>