关于空间力系的受力分析

空间力系：力的作用线不位于同一平面内。

空间力系包括：

空间汇交力系

空间力偶系

空间任意力系

§3-1 力在空间直角坐标轴上的投影

一、空间力沿直角坐标轴的投影和分解

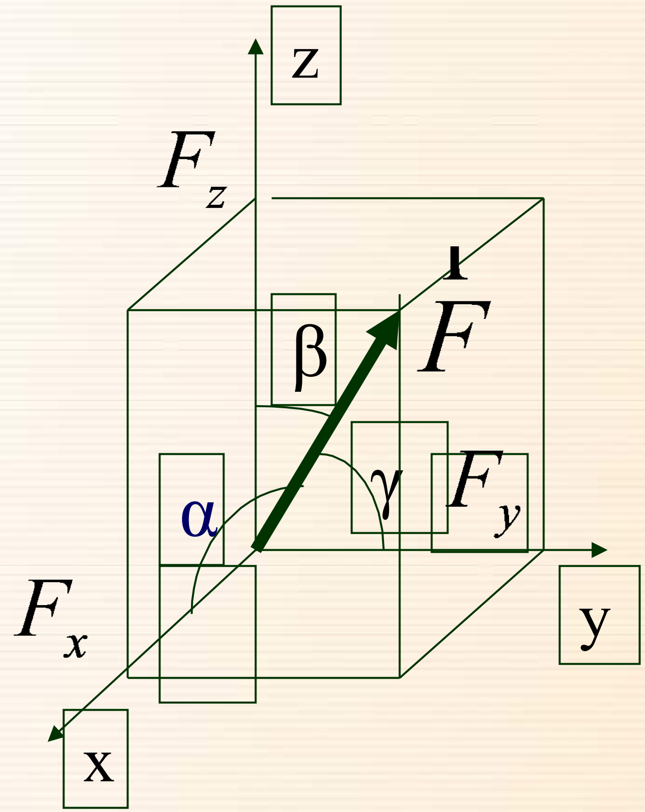
1、直接投影法

已知力 F 与三个坐标轴的夹角，则该力在三个轴上的投影为

$$F_x = F \cos \alpha$$

$$F_y = F \cos \beta$$

$$F_z = F \cos \gamma$$



2、二次投影法

已知力 F 与 z 轴的夹角 γ

第一次投影：

$$F_{xy} = F \sin \gamma$$

$$F_z = F \cos \gamma$$

若再知道 Fxy 与x轴的夹角 φ

第二次投影

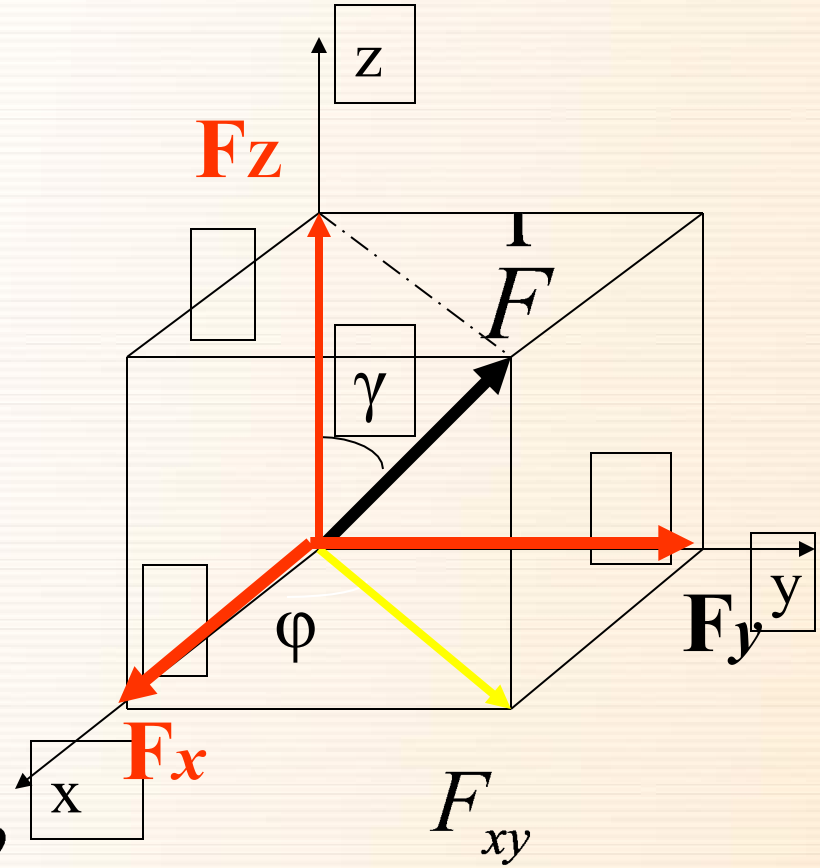
$$F_x = F_{xy} \cos \varphi$$

$$F_y = F_{xy} \sin \varphi$$

$$F_x = F \sin \gamma \cos \varphi$$

$$F_y = F \sin \gamma \sin \varphi$$

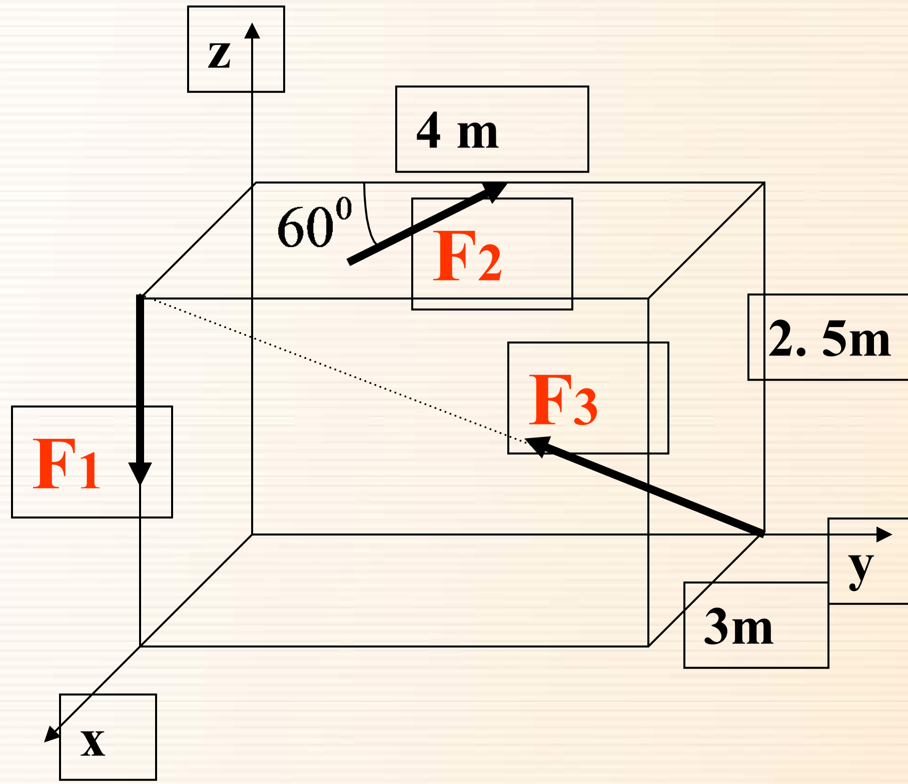
$$F_z = F \cos \gamma$$



例题　已知：$F_1=500N$，$F_2=1000N$，$F3=1500N$，

求：各力在坐标轴上的投影

解：　F_1、F_2 可用直接投影法



$$F_x = F\cos\alpha$$

$$F_y = F\cos\beta$$

$$F_z = F\cos\gamma$$

$$F_{x1} = 0$$

$$F_{y1} = 0$$

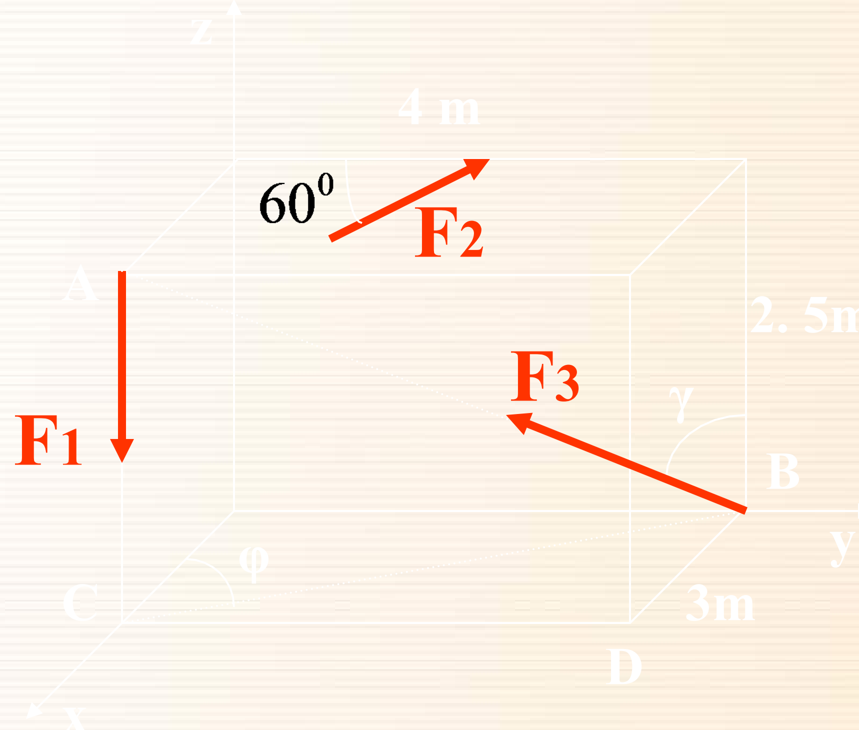
$$F_{z1} = -F_1 = -500\ N$$

$$F_{x2} = -F_2 \sin 60^0 = -1000 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -866\ N$$

$$F_{y2} = F_2 \cos 60^0 = 500\ N$$

$$F_{z2} = 0$$

$$F_x = F \sin\gamma \cos\varphi$$
$$F_y = F \sin\gamma \sin\varphi$$
$$F_z = F \cos\gamma$$



$$\sin\gamma = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{4^2+3^2}}{\sqrt{4^2+3^2+2.5^2}} = 0.8944$$

$$\cos\gamma = 0.4472$$

$$\sin\varphi = \frac{CD}{BC} = \frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}} = 0.8$$

$$\cos\varphi = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}} = 0.6$$

$$F_x = F\sin\gamma\cos\varphi = 1500\times 0.8944\times 0.6 = 805\ N$$

$$F_y = -F\sin\gamma\sin\varphi = -1500\times 0.8944\times 0.8 = -1073\ N$$

$$F_z = F\cos\gamma = 1500\times 0.4472 = 671\ N$$

二、空间汇交力系的合成和平衡

- 1、合成

空间汇交力系的合力等于各分力的矢量和，合力作用点（线）通过汇交点。

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

空间合力投影定理：合力在某一轴上的投影等于力系中各分力在同一轴上投影的代数和。

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^{n} F_{xi}$$

$$F_{Ry} = \sum_{i=1}^{n} F_{yi}$$

$$F_{Rz} = \sum_{i=1}^{n} F_{zi}$$

根据空间合力投影定理，合力的大小和方向可按照以下公式进行计算。

$$\vec{F}_R = F_{Rx}\vec{i} + F_{Ry}\vec{j} + F_{Rz}\vec{k}$$

合力的大小：

$$F_R = \sqrt{(F_{Rx})^2 + (F_{Ry})^2 + (F_{Rz})^2} = \sqrt{\left(\sum F_{xi}\right)^2 + \left(\sum F_{yi}\right)^2 + \left(\sum F_{zi}\right)^2}$$

合力的方向：

$$\cos(\vec{F}_R, \vec{i}) = \frac{F_{Rx}}{F_R}$$

$$\cos(\vec{F}_R, \vec{j}) = \frac{F_{Ry}}{F_R}$$

$$\cos(\vec{F}_R, \vec{k}) = \frac{F_{Rz}}{F_R}$$

2、空间汇交力系的平衡

- 空间汇交力系平衡的充要条件为：合力 ＝ 0。

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$

由于

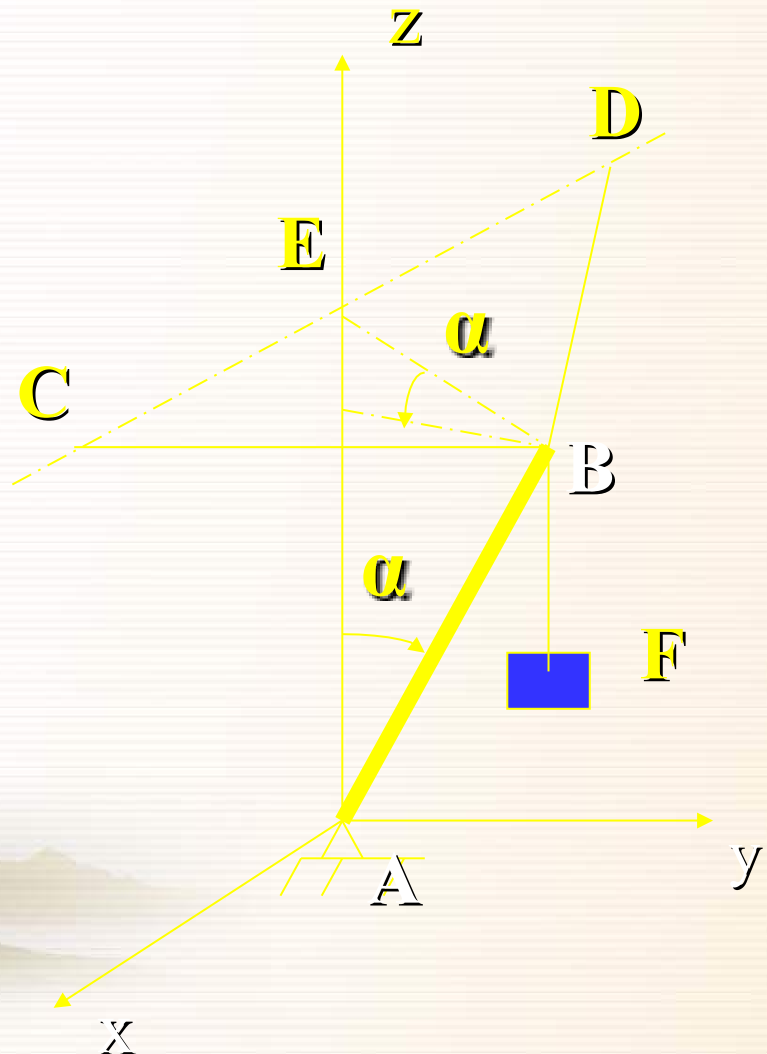
$$F_R = \sqrt{\left(\sum F_{xi}\right)^2 + \left(\sum F_{yi}\right)^2 + \left(\sum F_{zi}\right)^2}$$

空间汇交力系的平衡条件：

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum F_z = 0$$

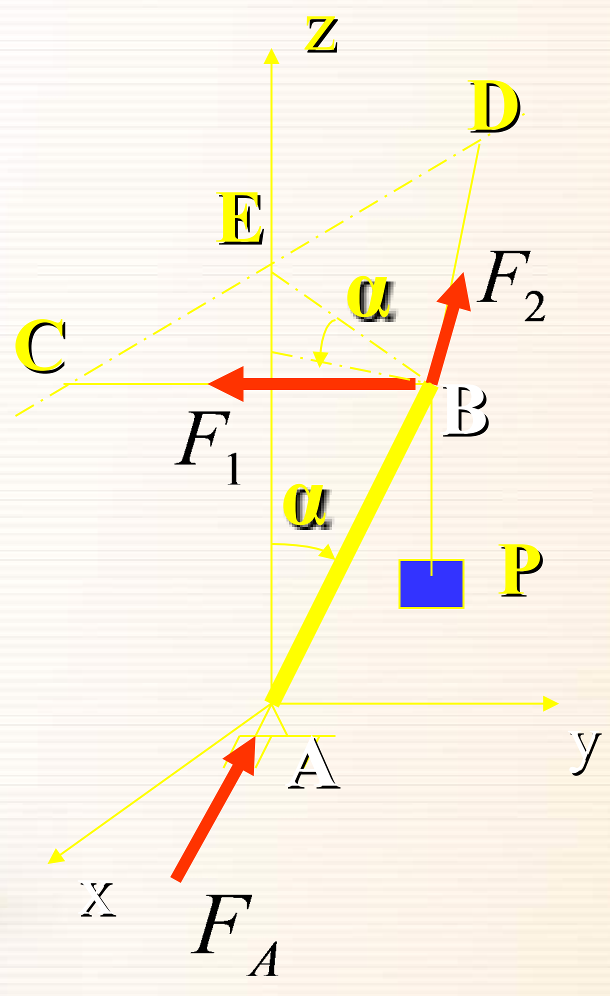
例题：已知： $CE = EB = ED, \alpha = 30^0, F = 10kN$

求：起重杆AB及绳子的拉力.



解：取起重杆AB为研究对象

建坐标系如图，



列平衡方程：

$$\sum F_x = 0$$

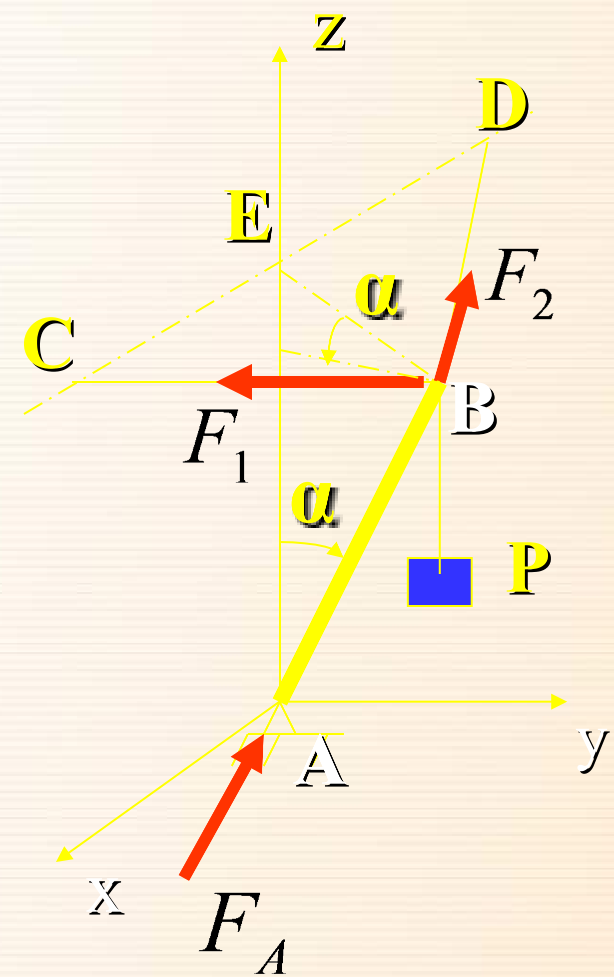
$$F_1 \sin 45^0 - F_2 \sin 45^0 = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_A \sin 30^0 - F_1 \cos 45^0 \cos 30^0$$
$$- F_2 \cos 45^0 \cos 30^0 = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$F_1 \cos 45^0 \sin 30^0 + F_2 \cos 45^0 \sin 30^0$$
$$+ F_A \cos 30^0 - P = 0$$



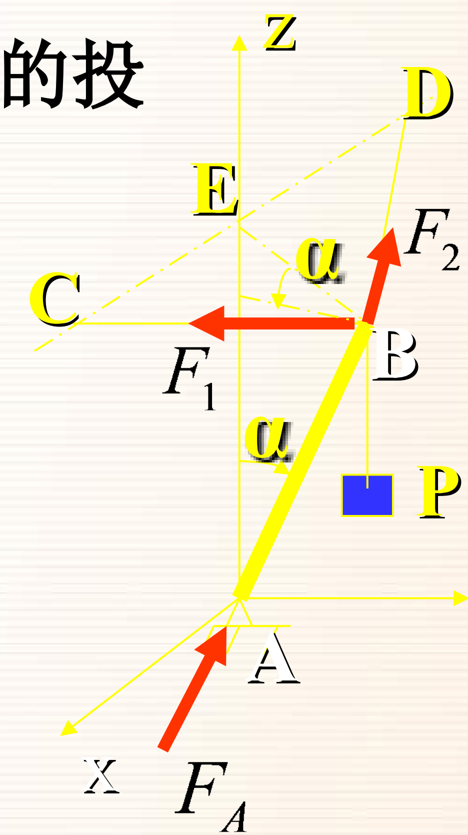
解得：

$$F_1 = F_2 = 10 / 2\sqrt{2} = 3.54kN$$

$$F_A = \sqrt{6} F_1 = 8.66kN$$

空间汇交力系在任一平面上的投影 →平面汇交力系

空间汇交 力系平衡，投影得到的平面汇交力系也必然平衡。

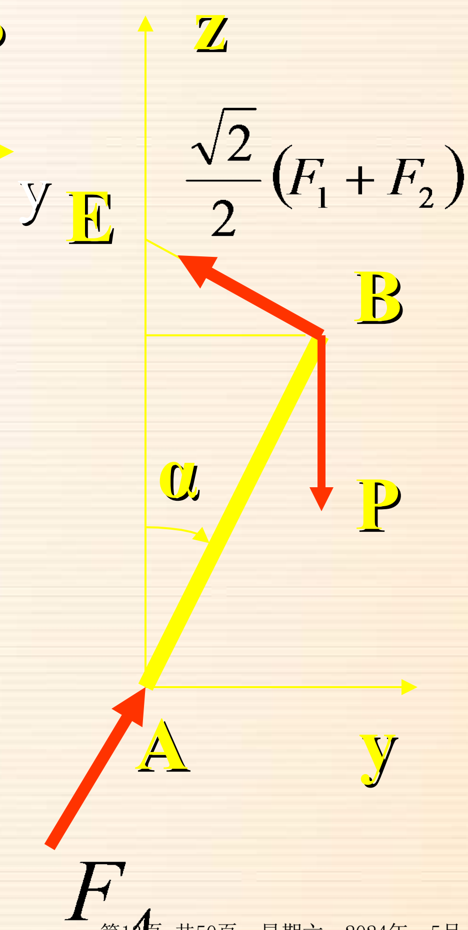


$$\sum F_y = 0,$$

$$F_A \sin 30^0 - F_1 \cos 45^0 \cos 30^0 - F_2 \cos 45^0 \cos 30^0 = 0$$

$$\sum F_z = 0,$$

$$F_1 \cos 45^0 \sin 30^0 + F_2 \cos 45^0 \sin 30^0 + F_A \cos 30^0 - P = 0$$



§3-2 力对轴的矩

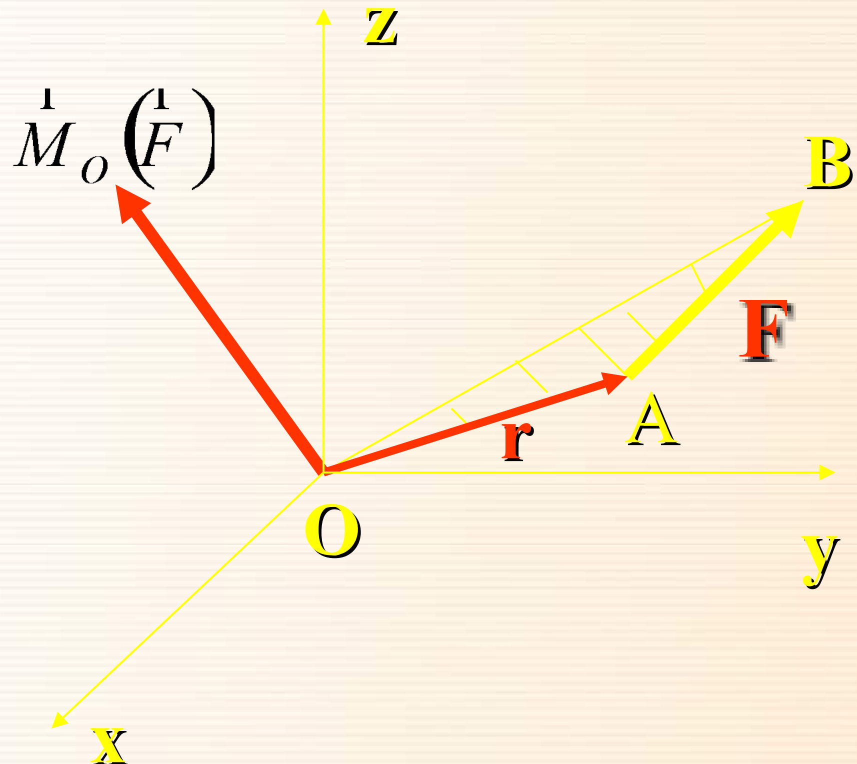
一、空间力对点的矩

空间力对点的矩取决于：

（1）力矩的大小

（2）力矩作用面的方位

（3）力矩在作用面内的转向



这三个因素可以用一个矢量来表示，记为：

$$\vec{M}_O(\vec{F})$$

空间力对点的矩的计算

（1）力矩的大小为：

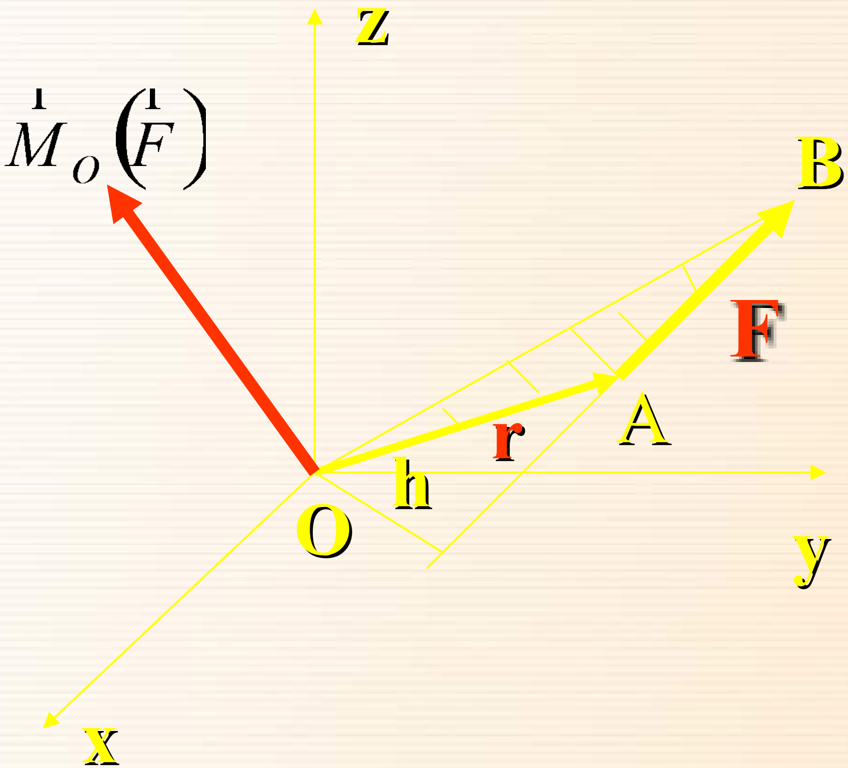
$$\left|\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)\right| = F \times h = 2\Delta OAB$$

（2）力矩矢通过0点

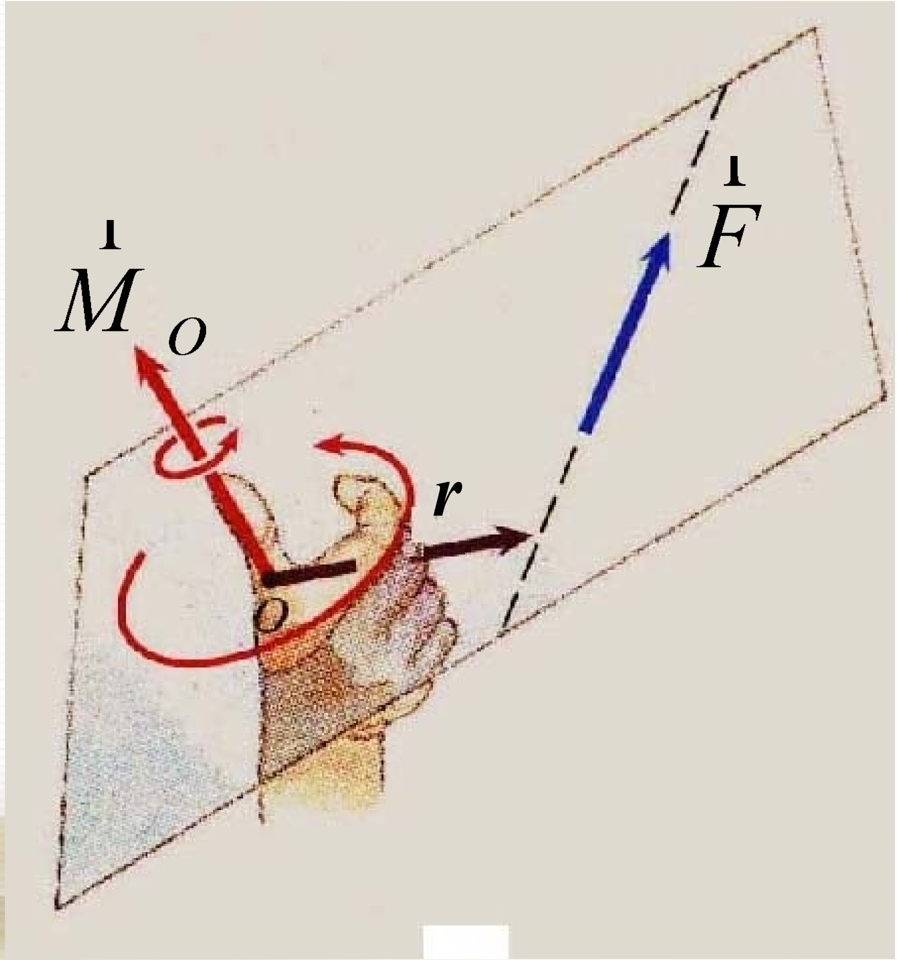
（3）力矩矢的方向：垂直于OAB平面，指向由右手螺旋法则决定之。

由矢量分析理论可知：

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$$



力矩矢量的方向



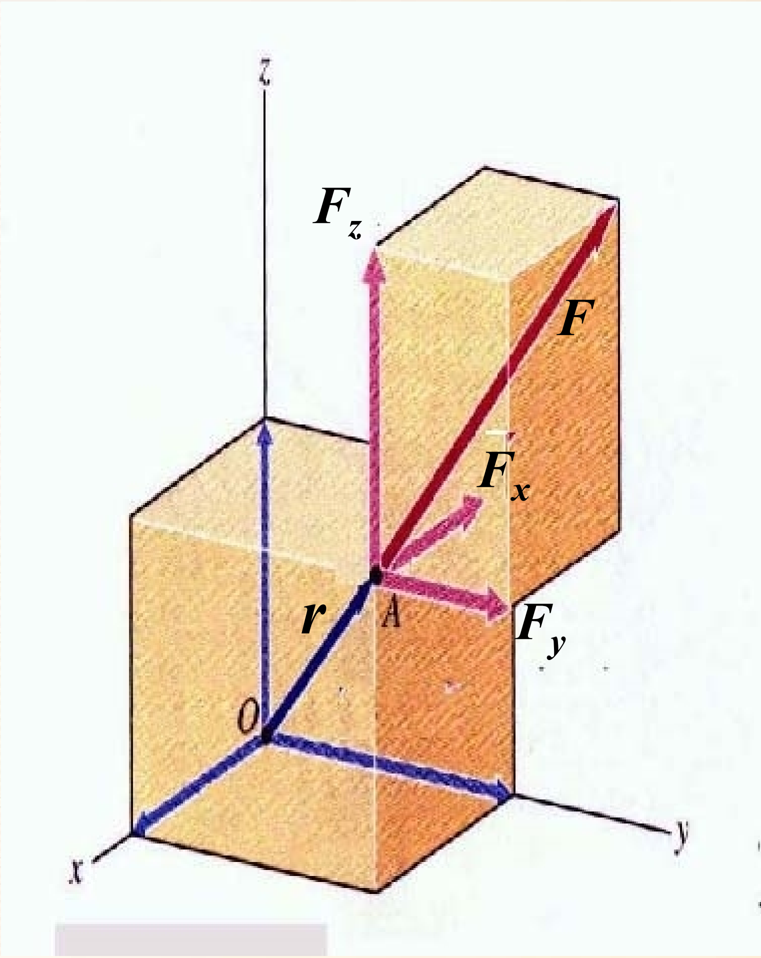
按右手定则

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

力对点之矩的矢量运算

由高等数学知：

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



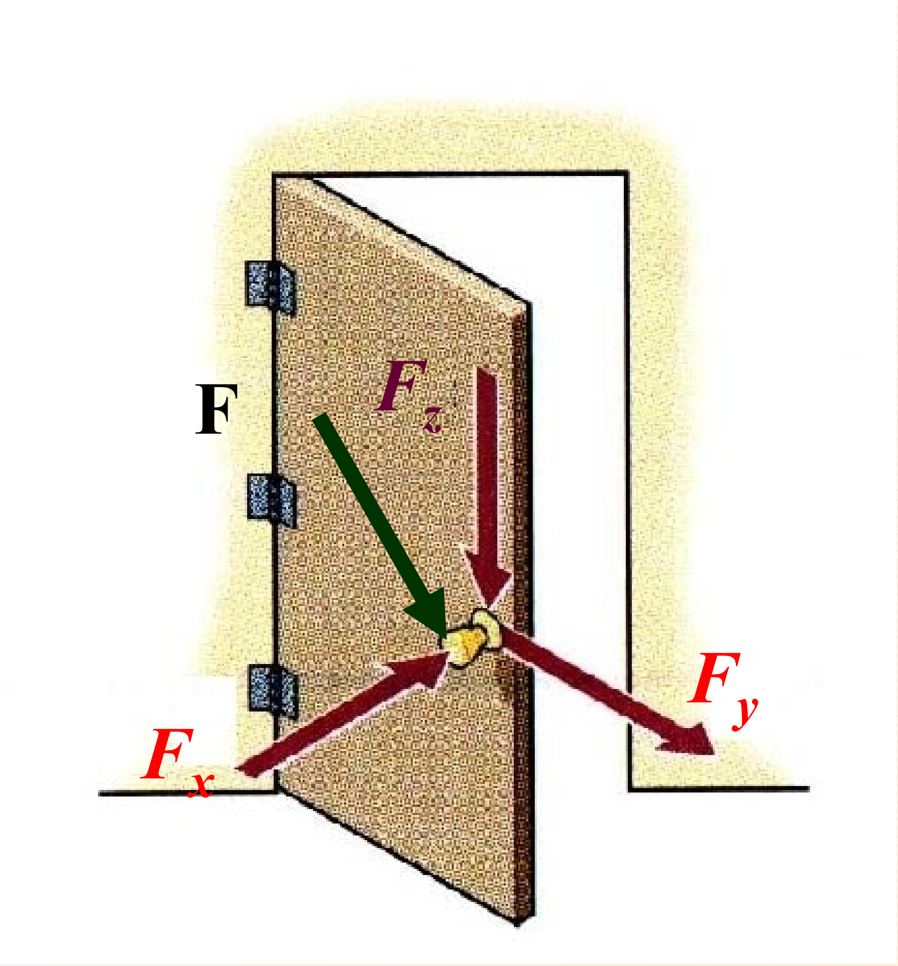
$$= (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

二、力对轴之矩

1、定义:

力使物体绕某一轴转动效应的量度,称为力对该轴之矩.

2、力对轴之矩实例



3、力对轴之矩的计算

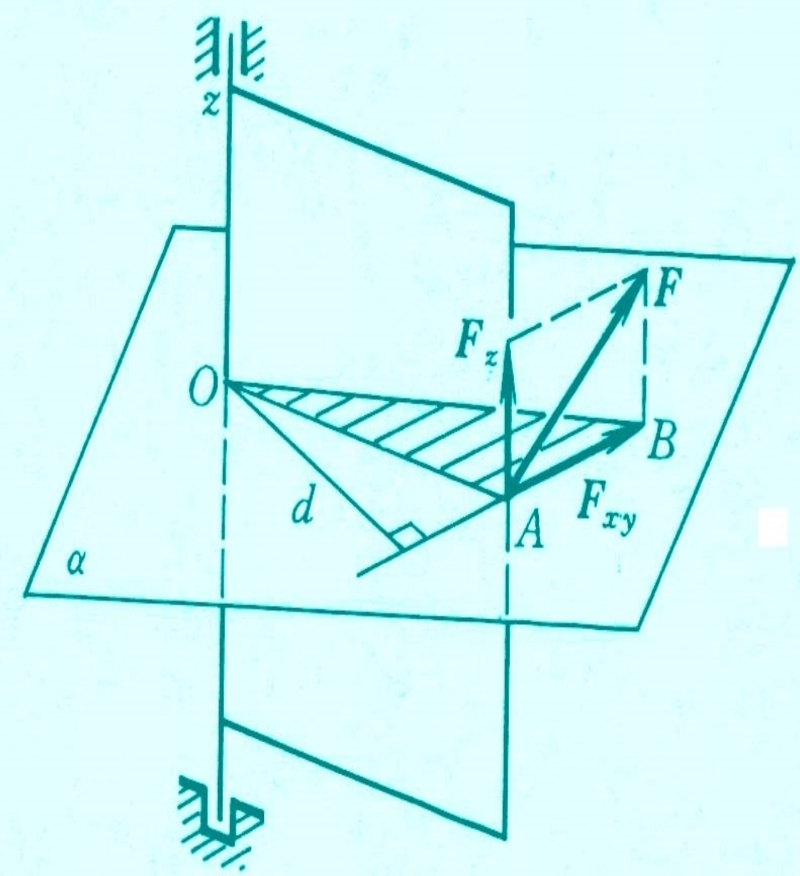
力F对z轴的矩等于该力在通过O点垂直于z轴的平面上的分量 F_{xy} 对于O点的矩。

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy})$$

方法一：

将力向垂直于该轴的平面投影，力对轴的矩等于力的投影与投影至轴的垂直距离的乘积.

$$M_z(F) = F_{xy} d$$
$$= \pm 2(\triangle OAB)$$



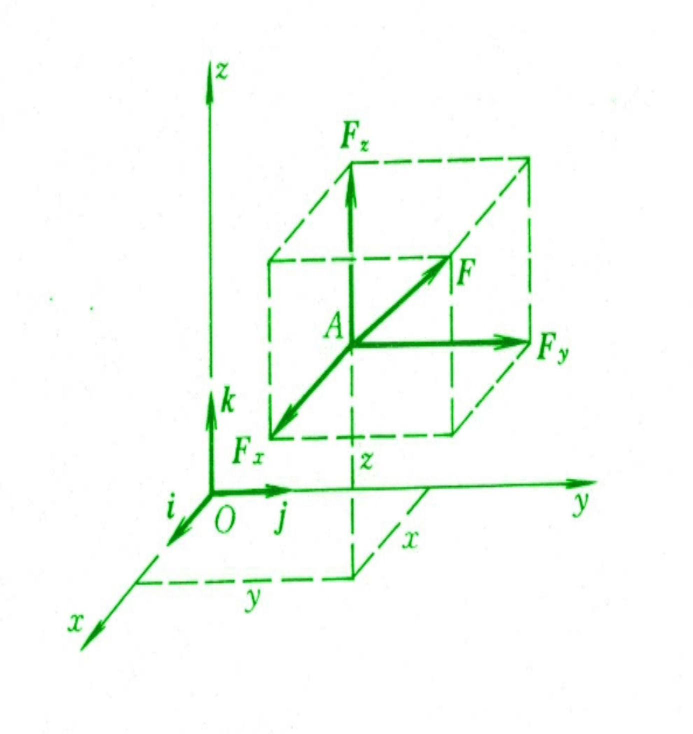
(a)

力对轴之矩的计算

方法二：

将力向三个坐标轴方向分解，分别求三个分力对轴之矩，然后将三个分力对轴之矩的代数值相加。

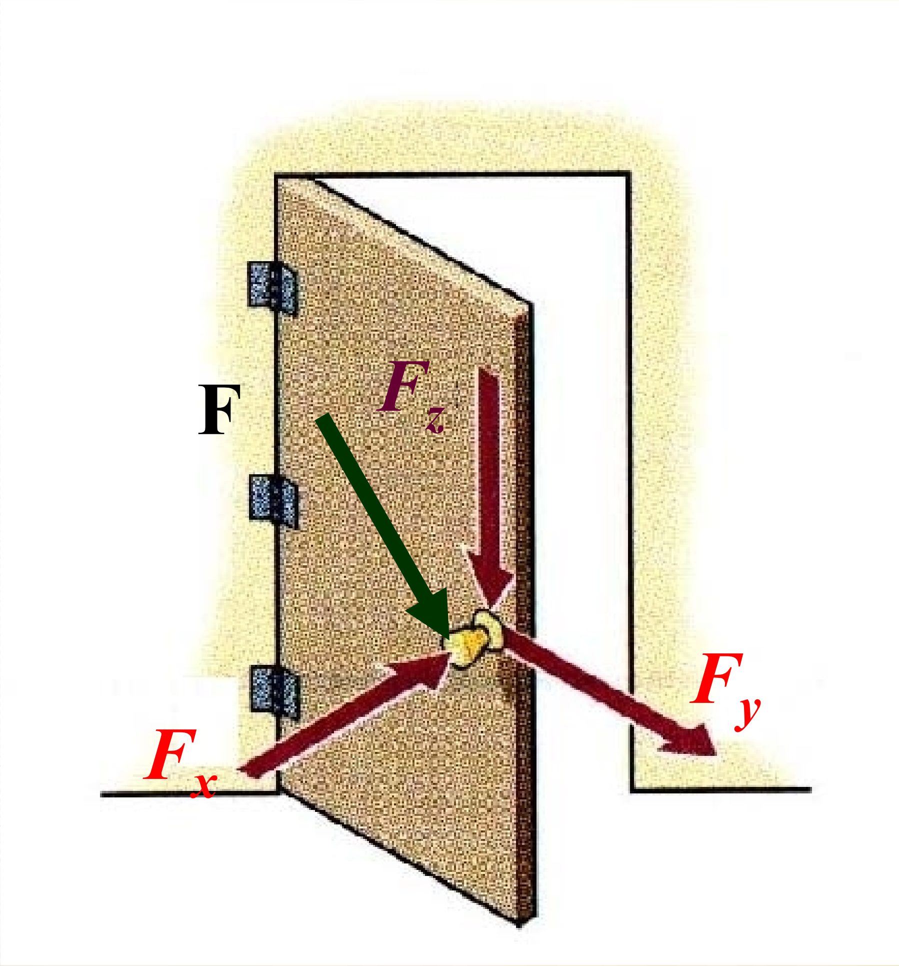
$$M_z(\vec{F}) = M_z(\vec{F}_x) + M_z(\vec{F}_y) + M_z(\vec{F}_z)$$



空间力对轴的矩等于零的条件

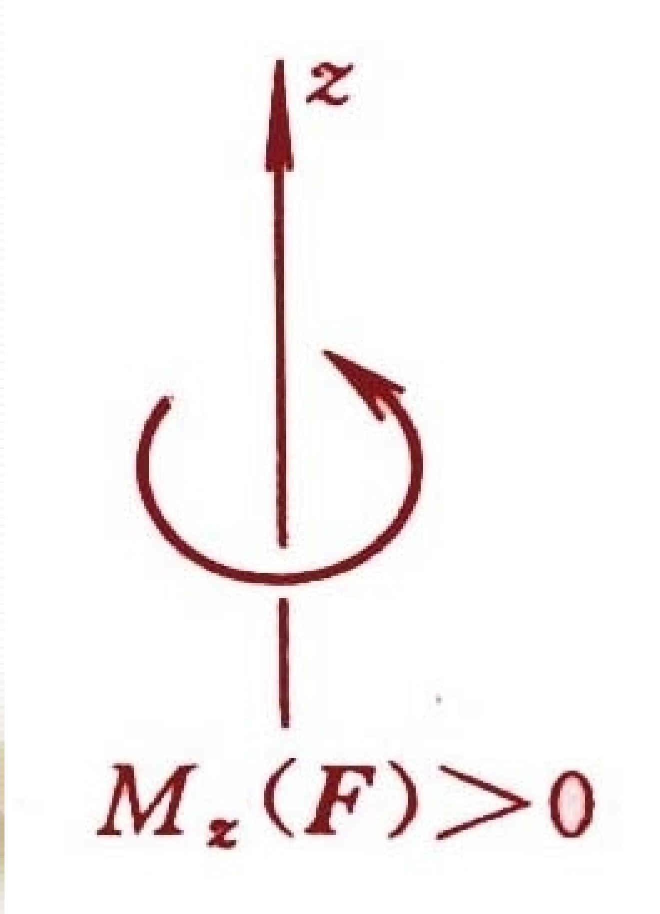
1、力通过轴线

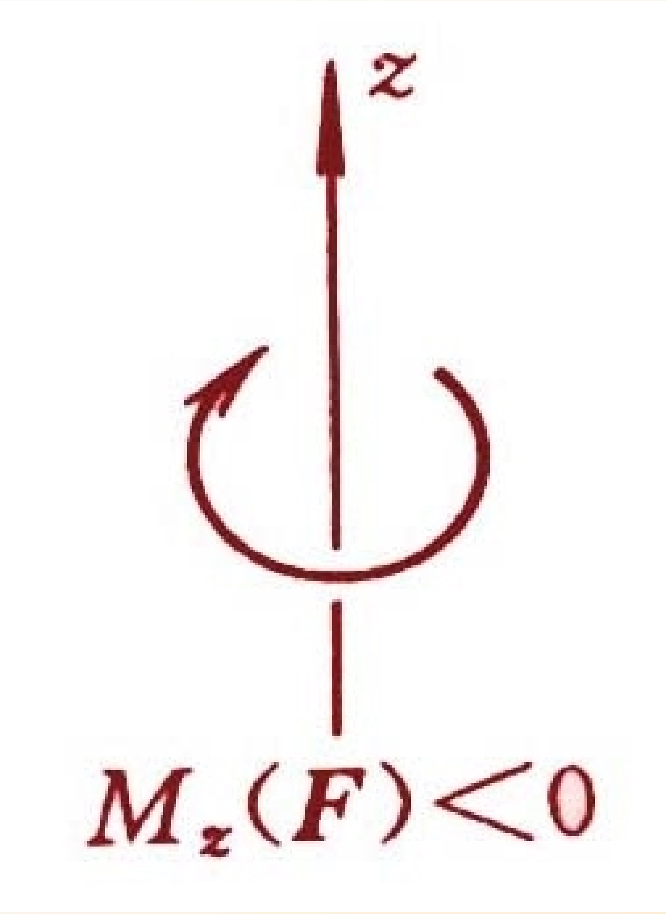
2、力与轴线平行



力对轴之矩代数量的正负号

（按照右手螺旋法则决定之）





三、力对轴之矩与力对点之矩的关系

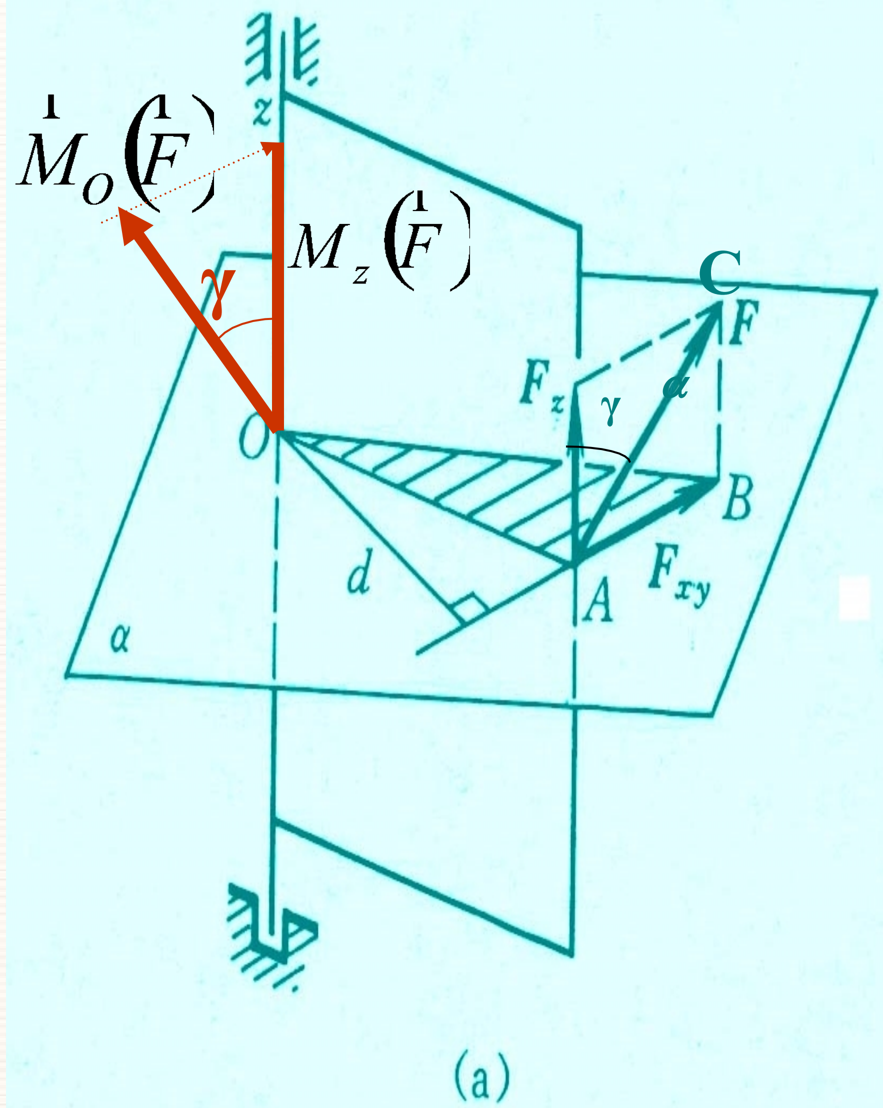
结论:

力对点之矩的矢量在某一轴上的投影,等于该力对该轴之矩。

$$M_z(\vec{F}) = [\vec{M}_O(\vec{F})]_z$$

即:

$$M_z(\vec{F}) = |\vec{M}_O(\vec{F})|\cos\gamma$$



结论的说明：

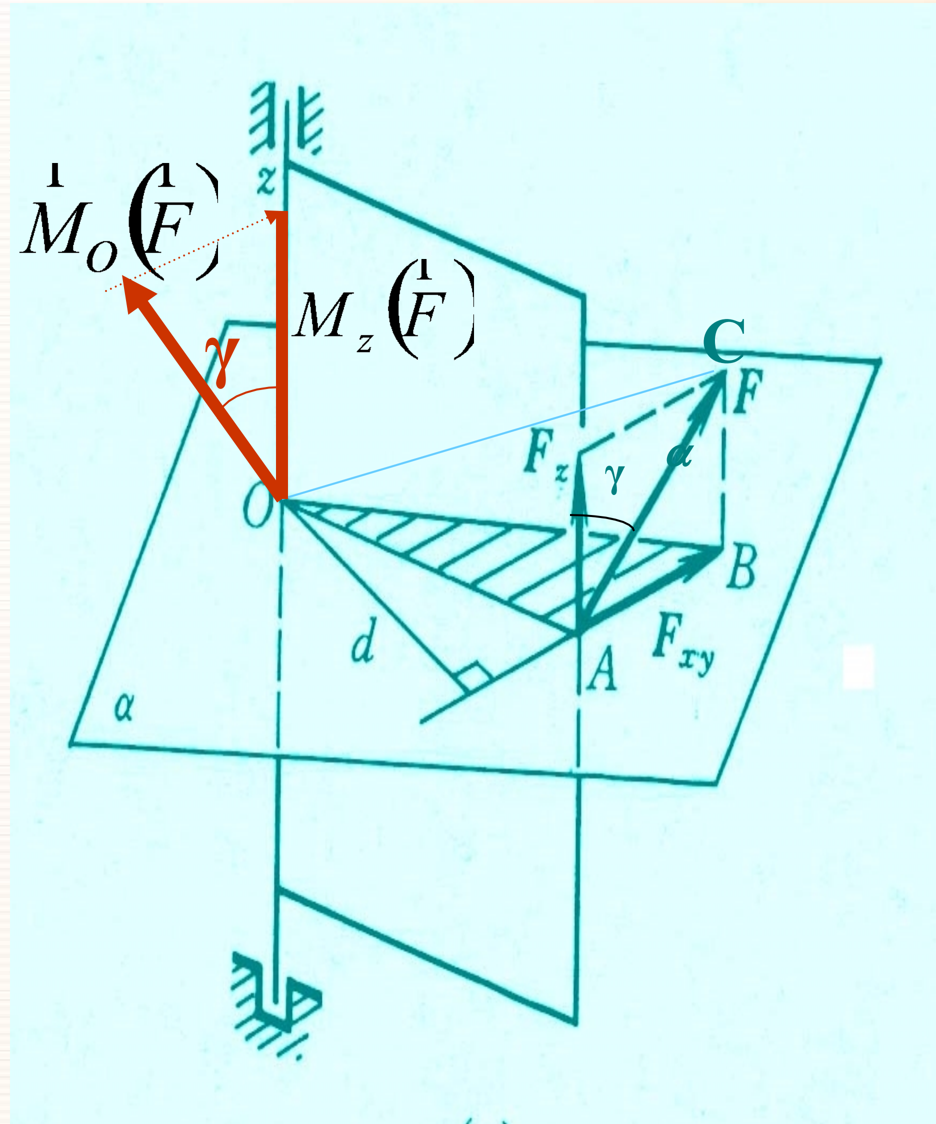
$$\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right| = 2\Delta OAC$$

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = 2\Delta OAB$$

由右图可见：

$$\Delta OAB = \Delta OAC\cos\gamma$$

$$M_z(\vec{F}) = \left|\vec{M}_O(\vec{F})\right|\cos\gamma$$



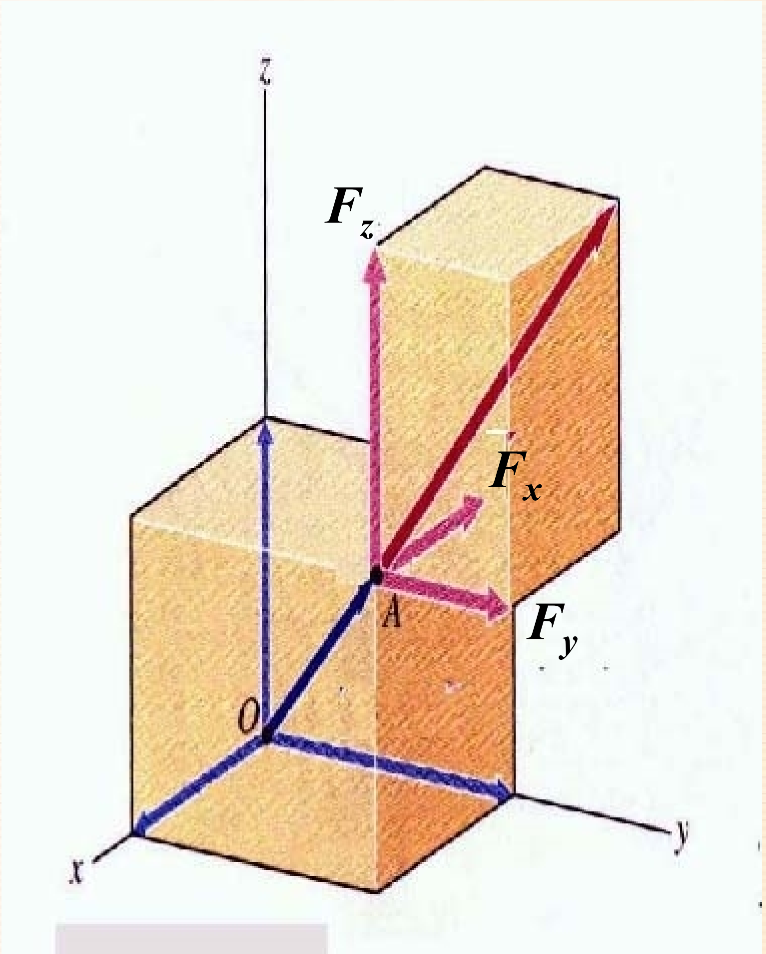
(a)

四、力对直角坐标轴之矩的解析表达式

前已述及：

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

$$= (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$



由此可得：

$$M_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y$$

$$M_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z$$

$$M_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x$$