

最优倒煤装卸安排

摘 要

本文是针对煤矿装卸安排的讨论。由于装煤列车每日的抵达时间不固定，且没有任何数据用来做先验分析，所以我们将其看作随机事件，使用概率论知识作为本文的主要解题方法。首先建立了关于第二工作班调用次数期望和月滞期费期望的两个概率模型，然后给出了列车抵达时间可控条件下的最优列车调度安排，接着讨论了是否增加第三个工作班有利于降低装煤费用和能否加入第四辆标准列车的问题，最后使用计算机模拟对整个求解作检验。

对于问题一，对平日相互独立的情况，运用几何概型的方法求出调用次数的分布律，并根据分布律得出调用期望；对于星期四的情况，我们采用近似处理的方法；又因为发现每天之间相互影响的概率较小，也可以做近似求解。最后得到一年调用第二个工作班的次数期望为：839 次。

对于问题二，继续问题一的思路：在每天相互独立的情况下，通过联合概率密度函数对二维连续随机变量期望进行求解；对星期四和每天相互影响的情况分别进行近似处理。最后得到的月滞期费用期望为：3.08 百万元。

对于问题三、四，通过分析得出了最优列车调度安排，可使年滞期费降低为 7.02 百万元，年总装卸劳务费用降为 44.62 百万。并且说明了调用第三个工作班能降低装煤费用，每天(除星期四)也能满足再装第四辆标准列车的要求。

最后，我们用计算机模拟的方法求得：一问：一年应调用第二个工作班的次数为：740-780。二问：预期的月滞期费用是：3.55 百万元。三问：在模拟出的日调度安排下，各部分总费用都有减少，减少后的费用为年滞期费：6.79 百万元、年装卸劳务费：44.34 百万元。四问：要调用第三个工作班，其中装卸劳务费可以减少 31.11 百万元，滞期费减少 10.87 百万元。通过计算机模拟结果的检验，我们发现对各个问题的分析和求解都较为符合模拟结果。

关键词：均匀分布 几何概型 随机模拟

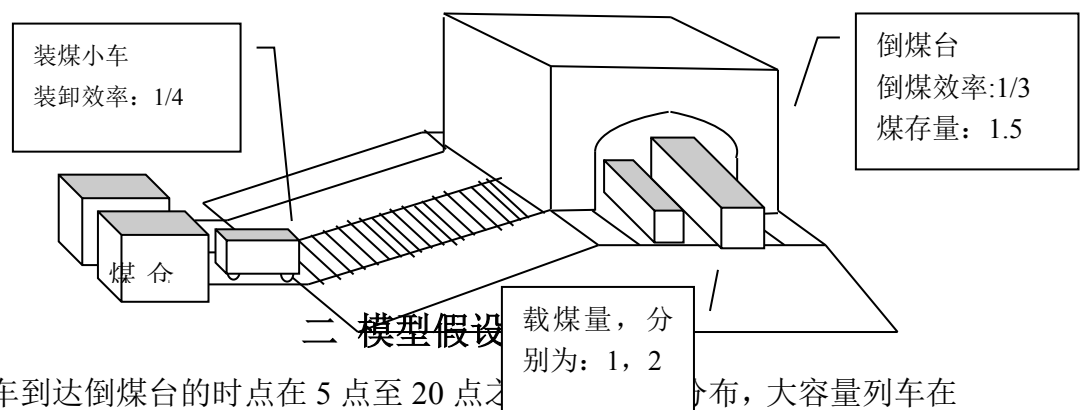
一 问题重述

某煤矿公司经营一个包括一个单个的大型倒煤台(煤矿小车将煤翻卸在煤仓内，再从煤仓滑到铁路货车)在内的装煤设施。当装煤列车到达时，从倒煤台往上装煤。一列标准列车要用 3 小时装满，而倒煤台的容量是一列半标准列车。每天，铁道部门向这个装煤设施发送三列标准列车。这些列车可在当地时间上午 5 点到下午 8 点的任何时间内到达。每列列车有三辆机车。如果一列车到达后因等待装煤而停滞在那里（即处于等待服务状态）的话，铁道部门要征收一种称为滞期费的特别费用，每小时每辆机车 5000 元。此外，每周星期四上午 11 点到下午 1 点之间有一列大容量列车到达。这种特殊的列车有五辆机车并能装两列标准列车的煤。一个装煤工作班要用 6 个小时直接从煤矿运煤来把空的倒煤台装满。这个工作班（包括它用的设备）的费用是每小时 9000 元。可以调用第二个工作班运行一个附加的倒煤台操作系统来提高装煤速度，而费用为每小时 12000 元，出于安全的原因，当往倒煤台装煤时，不能往列车上装煤。每当由于往倒煤台装煤而中断往列车上装煤时，就要征收滞期费。

一、如何决定该倒煤台的装煤操作的年预期开支，应包括考虑以下的问题：

- 1、应调用几次第二个工作班？
- 2、预期的月滞期费是多少？
- 3、标准列车能按调度准时抵达，什么样的日调度安排能使装煤费用最少？
- 4、调用第三个费用为每小时 12000 元的倒煤台操作系统工作班，能否降低年操作费用？该倒煤台每天能否再装第四辆标准列车的煤？

二、用计算机模拟的方法检验你对上述问题的分析和求解。



周四 11 点至下午 1 点均匀随机分布。

- 2、增加装煤工作班不能提高装车速度，每增加一个班倒煤的效率增加一倍。
- 3、先倒煤后装车，且倒煤台的库存要至少足够装满下一列车才停止装煤。
- 4、假设一年 52 周，364 天。
- 5、每个星期四所有能调用的工作班都调用。
- 6、滞后到第二天的情况相对均匀的分布在一年中。
- 7、不考虑节假日对工作的影响。
- 8、平时日指的是周五、周六、周日、周一、周二、周三。
- 9、装煤工作班可在任意时间调用，可调用任意时间。
- 10、装煤工作班的在一个时段里的时间所作的事情是均匀的。

三 符号说明

x, y, z	第一、二、三列列车抵达倒煤台的时刻
t_1, t_2	第二和一系列列车抵达、第三和第二列列车抵达的时间间隔
$F(x, y, z)$	调用第二个工作班的次数关于 $x y z$ 的函数
$F(t_1, t_2)$	调用次数关于 t_1, t_2 的函数
n	一天的调用次数
$G(t_1)$	第二列火车的滞期时间关于 t_1 的函数
$G(t_1, t_2)$	第三列火车的滞期时间关于 t_1, t_2 的函数
T	一天的总滞期时间

四 模型的建立与求解

4.1 问题一

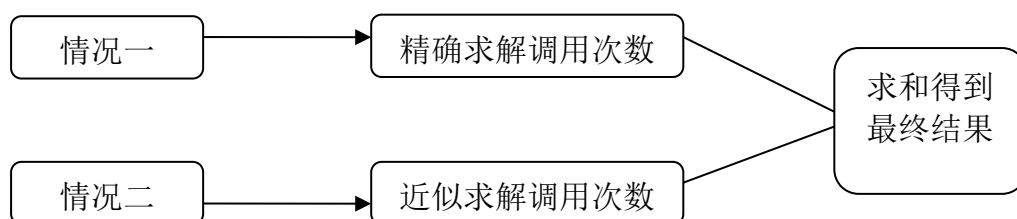
4.1.1 模型一的分析与建立

将此问题的所有情况分两部分考虑：

第一种情况：当天第一列车抵达倒煤台的时候，倒煤台煤量满，即当天第一列车的装煤任务不受前一天的影响，那么当天第一列车不需要调用第二个工作班。不包含星期四。

第二种情况：受到前一天的影响，当天第一列车要调用第二个工作班。包含星期四的情况。

于是问题总的求解思路是：



1) 情况一，天与天的装煤任务是相互独立的，于是我们建立如下概率模型：

i. 用 x, y, z 表示出调用次数关于列车抵达时刻的函数：

$$F(x, y, z)$$

ii. 设 $t_1=y-x, t_2=z-y$ 分别表示列车抵达的时间间隔，于是将上式 $F(x, y, z)$ 降维转化为关于 t_1 和 t_2 的函数：

$$F(t_1, t_2)$$

iii. 随机变量 (t_1, t_2) 服从区域 D 上均匀分布，其中 D 为 x 轴、 y 轴以及直线 $t_1+t_2=15$ 所围成的区域，其面积 $S_{\text{总}}$ 为 112.5，于是由几何概率的方法可得：

$$P = \frac{S}{S_{\text{总}}}$$

iv. 得出调用次数 n 的分布律 $P(n)$ ，根据分布律求出调用次数 n 的期望：

$$E(n) = \sum_{n=0}^2 P(n) \cdot n$$

2) 情况二由于问题的复杂性，需认为进行假设、近似求解：

首先我们需要分析，作出假设并探讨其合理性：

- i. 由于我们不知道列车到达的具体时间，所以我们假设只要没有装车工作就开始倒煤，且在下一列车到达前只调用一个工作班，直到将倒煤台满库。
- ii. 每调用一个工作班增加 12000 每小时，每列车滞期费至少增加 15000 每小时，为使得总费用最小所以我们更愿意通过增调工作班来减少滞期时间。
- iii. 作为煤矿公司，当天的事情会尽量当天去做完，尽量不让其拖到第二天 5 点以后。所以，如果发生第一天的工作可能滞后到第二天时，我们假设最后装完第三列车后就调用第二个工作班，将倒煤台尽量在 5 点时填满。若无论如何调用仍要滞后则同调用两个班工作 3 小时。
- iv. 由于以上分析，我们将平时的一天考虑为独立的，刚开始时为满库 1.5 列，第 3 列车走后花 6 个小时将倒煤台填满，由此算出调用第二个班次数的期望。最后再补算一年中第三辆车走后要调用第二个班来尽快结束当天工作的次数和由于滞后造成第二天本来不用调用第二个班却不得不调用的次数（我们考虑一种极端情况，三列车都在 8 点来，平时第一天的影响肯定能被第二天吸收掉，不会拖到第三天，第三天吸收的影响只会是第二天的）。
- v. 对于周四，即使是全天调用两个班也做不完，必会做 25 小时以上，既然我们知道当天是完不成工作的，而 4 列车到达的具体时点是不知道的，那么我们只能让其尽量快的完成，于是我们假设一到星期四，全天的倒煤作业都用两个班，于是周四的调用次数就固定为 5 次，而周四的滞后对于后面的影响的极限是这种情况：大车 14 点来，3 辆标准车都是当天 8 点来，于是滞后时间为 $3*3+6=15$ 加上 $10-(20-14)=4$ 小时减去晚上的 9 个小时总共 10 小时，影响到周五的 15 点而周五即使是 3 列车都在 8 点到所造成的影响也能被周六吸收掉，我们将周四与周五绑定在一起看做一个特殊的平时日则通过挪移则一定能分别在

平时日各自的空闲时间中处理掉，而这个平时日的影响看做是周五对周六的影响，但是挪是挪到这整个特殊平时日的空闲时间中。因为 $25+21=46<48$ ，所以这整个特殊平时日的工作都能在这个特殊平时日处理掉。

4.1.2 模型一的求解

1) 情况一的模型精确求解：

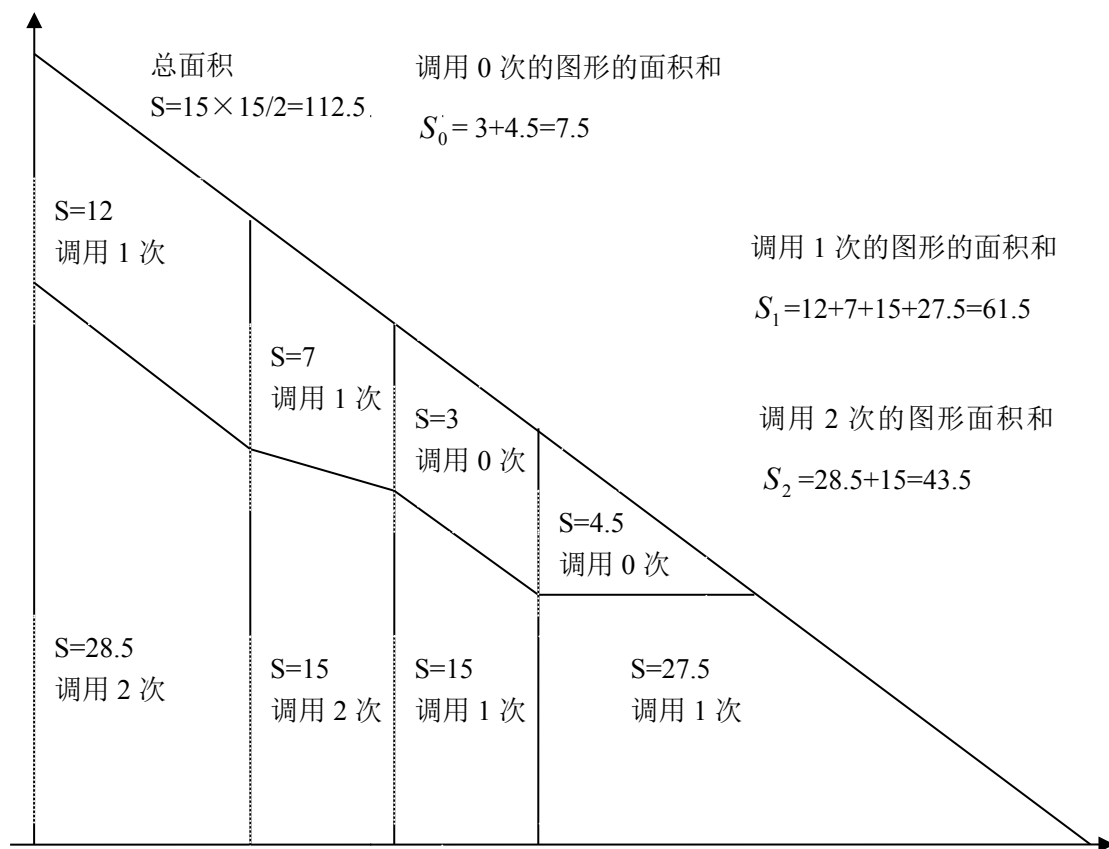
i. 求函数 $F(x, y, z)$ ：

条件 1	第二列车到达时是否需要调用第二个工作班	第二列车开始装煤的时刻 y'	第二列车装煤所需时间	只一个工作班第二次往倒煤台装煤所需时间	条件 2	第三列车到达时是否需要调用第二个工作班	调用第二个工作班的总次数 $F(x, y, z)$
$y-x \leq 3$	调用	$3-(y-x)+1+y=4+x$	3	4	$z-(4+x) \leq 7$	调用	2
					$z-(4+x) \geq 7$	不调用	1
$3 \leq y-x \leq 5$	调用	$\frac{5-(y-x)}{2}+y = \frac{5+x+y}{2}$	3	4	$z-\frac{5+x+y}{2} \leq 7$	调用	2
					$z-\frac{5+x+y}{2} \geq 7$	不调用	1
$5 \leq y-x \leq 7$	不调用	y	3	$4-(y-x-5)$	$\begin{matrix} z-y \leq \\ 7-(y-x-5) \end{matrix}$	调用	1
					$\begin{matrix} z-y \geq \\ 7-(y-x-5) \end{matrix}$	不调用	0
$y-x \geq 7$	不调用	y	3	2	$z-y \leq 5$	调用	1
					$z-y \geq 5$	不调用	0

ii. 用 $t_1=y-x, t_2=z-y$ 进行代换降维求解 $F(x, y, z)$ 得：

$$F(t_1, t_2) = \begin{cases} 2 & t_1 \leq 3 \text{ 且 } t_1 + t_2 \leq 11 \\ 1 & t_1 \leq 3 \text{ 且 } t_1 + t_2 \geq 11 \\ 2 & 3 \leq t_1 \leq 5 \text{ 且 } 2t_2 + t_1 \leq 19 \\ 1 & 3 \leq t_1 \leq 5 \text{ 且 } 2t_2 + t_1 \geq 19 \\ 1 & 5 \leq t_1 \leq 7 \text{ 且 } t_1 + t_2 \leq 12 \\ 0 & 5 \leq t_1 \leq 7 \text{ 且 } t_1 + t_2 \geq 12 \\ 1 & t_1 \geq 7 \text{ 且 } t_2 \leq 5 \\ 0 & t_1 \geq 7 \text{ 且 } t_2 \geq 5 \end{cases}$$

- iii. 条件表达式中只含 t_1 、 t_2 ，并且 t_1 、 t_2 在 D 上是等可能的。于是可画图用几何概率求解方法求分布律：



- iv. 根据分布列求解期望

调用次数 n	0	1	2
对应概率 $P(n)$	$\frac{S_0}{S} = \frac{1}{15}$	$\frac{S_1}{S} = \frac{41}{75}$	$\frac{S_2}{S} = \frac{29}{75}$

所以，期望 $E_I(n) = 56/75 + 28/75 = 99/75$ ，一年内情况一下的总调用次数为：
 $E_I(n) \times (364 - 52) = 412$

2) 情况二的近似求解：

- i. 因为我们假设周四全用 2 个班来进行作业，所以一个周四定死为调用 5 次，全年的周四的第二工作班调用次数为 $5 \times 52 = 260$

- ii. 平时日最末尾为不把工作拖到第二天而调用的次数：

若第 1 列车在 8 点以后来则要调用，概率为： $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{64}{125}$

若第 2 列车在 15 点以后来则要调用，概率为： $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

重叠部分概率为 $\frac{4}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{45}$

所以平时日最末尾为不把工作拖到第二天而调用次数：

$$(364-52) \times (\frac{64}{125} + \frac{1}{9} - \frac{4}{45}) = 167$$

- i. 平时日对后一天的影响所造成的增加次数，平时日队后一天影响范围是 8 点到 11 点，若将这段时间看成是均匀分布，则第一天对第二天产生的影响程度的期望是 1.5 个小时，

$$\text{第 1 列车在 14 点以后来，概率 } \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$$

可以看出使得第二天本来不调用结果由于前一天的影响使其调用相当之小的，这里我们不再细算。

情况二下的近似期望值为：

$$E_2(n) = N_1 + N_2 = 260 + 167 = 427$$

- 3) 综上所述：一年来看，总调用第二个工作班的总次数为：

$$E_1(n) + E_2(n) = 412 + 427 = 839$$

4.2 问题二

4.2.1 模型二的建立

采用问题一的解题思路，我们将问题分为三个小部分求解：

第一是每天相互独立且不包含星期四的精确求解；

第二是对星期四的近似求解；

第三是对每天相互影响的情况的近似求解。

- 1) 对每天相互独立且不包含星期四的模型建立：

- i. 第二列列车的滞期时间与第一、二列车的到达时间有关，依据降维思想可以用 t_1 两车的抵达时间间隔代表，同理第三列列车的滞期时间与三列车都有关可用 t_1 、 t_2 表示：

$$G(t_1), G(t_1, t_2)$$

- ii. 用 $f'(t_1, t_2)$ 表示其联合概率密度函数，根据我们的假设，其满足均匀分布，于是可得：

$$f'(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{1}{112.5} & (t_1, t_2) \in D \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

- iii. 于是可得 $G(t_1, t_2)$ 的数学期望：

$$E[G(t_1, t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t_1, t_2) f'(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

同理可得 $G(t_1)$ 的数学期望（随机变量 t_1 服从区间 $[0, 15]$ 上的均匀分布），即：

$$E[G(t_1)] = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t_1) f(t_1) dt_1$$

则一天的总停滞时间为：

$$T_1 = E[G(t_1, t_2)] + E[G(t_1)]$$

2) 对星期四的近似求解的讨论:

由于大容量列车的存在,使得煤矿公司需用一段时间处理大容量列车,设煤矿公司处理大容量列车的时间为 T_2 。同时这个处理大车的过程使得标准列车的滞期时间增加 T' ,分析知道,处理大车用 T_2 的时间,因为大车处理时间为6小时,期间多辆标准列车滞留为大概率事件,基于近似计算,我们认为必须优先处理大车,所以标准列车滞期的时间期望也就应该增加 T_2 的时间。即: $T' = T_2$ 。此种情况下标准列车的滞期时间期望为: $T_1 + T'$,大车本身的滞期时间: T'_2 。

3) 每天相互影响的情况:

直接沿用第一问分析结论和结果。

4.2.2 模型二的求解

1) 对每天相互独立且不包括星期四的模型精确求解:

i. 求 $G(x, y)$ 和 $G(x, y, z)$ 滞后时间关于各列车到达时间 $x y z$ 的条件表达式

条件 1	第二列列车的滞期时间 $y - y'$	第二列车开始装煤的时刻 y'	第二列车装煤所需时间	一个工作班第二次往倒煤台装煤时间	条件 2	第三列车的滞期时间
$y-x \leq 3$	$3-(y-x)+1$	$4+x$	3	4	$z-(4+x) \leq 3$	$9-(z-x)$
					$3 \leq z-(4+x) \leq 7$	$\frac{11-(z-x)}{2}$
					$z-(4+x) \geq 7$	0
$3 \leq y-x \leq 5$	$\frac{5-(y-x)}{2}$	$\frac{5+x+y}{2}$	3	4	$\frac{2z-5+x+y}{2} \leq 3$	$\frac{15+x+y-2z}{2}$
					$3 \geq \frac{2z-5+x+y}{2} \geq 7$	$\frac{19+x+y-2z}{4}$
					$\frac{2z-5+x+y}{2} \geq 7$	0

$5 \leq y-x \leq 7$	0	y	3	4-(y-x-5)	$z-y \leq 3$	$\frac{15-2z+x+y}{2}$
					$3 \leq z-y \leq 7-(y-x-5)$	$\frac{12+x-z}{2}$
					$z-y \geq 7-(y-x-5)$	0
$y-x \geq 7$	0	y	3	2	$z-y \leq 3$	4-(z-y)
					$3 \leq z-y \leq 5$	$\frac{5-(z-y)}{2}$
					$z-y \geq 5$	0

上表计算基于以下原则：

- ①当上一班标准列车还未装好，而有后来的标准列车抵达，即采用两个工作班；
- ②当上一班标准列车装好煤离开后而下一班列车还未到达时，采用一个工作班；若这种情况下，倒煤台还没装满而下一班标准列车已经来了，立刻改用两个工作班。

i. 通过 $t_1 = y - x$ $t_2 = z - y$ 求出 $G(t_1)$ 和 $G(t_1, t_2)$ ：

$$G(t_1, t_2) = \begin{cases} 9 - t_1 - t_2 & t_1 \leq 3 \cap t_1 + t_2 \leq 7 \\ \frac{11 - t_1 - t_2}{2} & t_1 \leq 3 \cap 7 \leq t_1 + t_2 \leq 11 \\ \frac{15 - t_1 - 2t_2}{2} & 3 \leq t_1 \leq 5 \cap 2t_2 + t_1 \leq 11 \\ \frac{19 - t_1 - 2t_2}{4} & 3 \leq t_1 \leq 5 \cap 11 \leq 2t_2 + t_1 \leq 19 \\ \frac{15 - t_1 - 2t_2}{2} & 5 \leq t_1 \leq 7 \cap t_2 \leq 3 \\ \frac{12 - t_1 - t_2}{2} & 5 \leq t_1 \leq 7 \cap 3 \leq t_2 \leq 12 - t_1 \\ 4 - t_2 & t_1 \geq 7 \cap t_2 \leq 3 \\ \frac{5 - t_2}{2} & t_1 \geq 7 \cap 3 \leq t_2 \leq 5 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$G(t_1) = \begin{cases} 4 - t_1 & t_1 \leq 3 \\ \frac{5 - t_1}{2} & 3 \leq t_1 \leq 5 \\ 0 & 5 \leq t_1 \leq 7 \\ 0 & t_1 \geq 7 \end{cases}$$

iii. 通过期望的求解模型得滞后时间的期望为：

由于 $G(t_1, t_2)$ 和 $G(t_1)$ 属于分段函数，因此求出每个分段区间各自的期望计

算结果如下：

区间	区间 1	区间 2	区间 3	区间 4	区间 5	区间 6	区间 7	区间 8
期望 $E[G(t_1, t_2)]$	53/75	8/75	158/675	16/225	4/25	28/675	34/75	26/675

区间	区间 1	区间 2
期望 $E[G(t_1)]$	23/25	68/675

所以，

$$E[G(t_1, t_2)] = 1.82,$$

$$E[G(t_1)] = 1.02,$$

故，

$$T_1 = 2.84$$

月滞期费为： $T_1 \times (364 - 52) \times 5000 \times 3 \times 1/12 = 1.11$ 百万元

2) 对星期四的单独情况的近似求解

i. 星期四的滞期费比平日的增加

由于平时的 15 小时几乎全是在做事的，将周四单独的作业（从库满到库满）需要 10 小时，将其硬加进平时的作业很重，则加上大车的影响期望大致也就是 10 个小时的等待。而小车因为大车的加入，大概也有 10 小时的滞自费增加，受影响为 1 列车。近似计算： $10 \times 25000 + 10 \times 15000 = 400000$ ，一年的滞期费约为： $400000 \times 52 = 20800000$ 。

ii. 星期四造成的对于星期五的影响的大约期望

首先，我们有以下事实：

①大车来的时点的期望在 12 点；

②滞留的影响是从第二天的 5 点到 14 点共 9 个小时。

近似计算：我们仍采取一问中的用 9 小时乘以 1/3，估计出对第二天的滞后影响大概是 3 小时，费用为 $3 \times 15000 = 45000$ ，一年费用为： $45000 \times 52 = 2340000$

3) 对每天相互影响的情况近似求解：

根据第一问的讨论，一天有 0.064 的概率滞后 1.5 小时，近似计算：直接用 $0.064 \times 1.5 \times 15000 = 1440$ 得到每天受影响的期望滞期费，这样一年的费用为 $1440 \times 364 = 524160$ 。

4) 所有情况汇总结果：

一年总滞期费： $2.84 \times 312 \times 15000 + 20800000 + 2340000 + 524160 = 36964160$

月滞期费：

$$36964160/12 = 3.08 \text{ 百万元}$$

4.3 问题三

4.3.1 基本的调度安排

最优列车抵达时刻调度应满足一下原则，才能使装煤费用最少：

- 1) 不能让后面列车提前抵达因等待服务而产生滞期费。
- 2) 考虑倒煤台所需要的重新装够下一列车煤量的时间。
- 3) 保证每天最后有充足的时间使倒煤台在 5 点前装满。

便于分析，我们从简化的假设开始分析，没有大容量列车和只有一个工作班的情形。满足上述原则的最优调度安排见下表：

简化理想列车抵达时刻调度						
时刻	情形一	倒煤台煤量	装卸	情形二	倒煤台煤量	装卸
5:00	列车 A	1.5		列车 A	1.5	
8:00		0.5	+0.5			
10:00	列车 B	1		列车 B		
12:00					0.5	+0.5
13:00		0	+1			
15:00					0	+1
17:00	列车 C	1		列车 C	1	
20:00		0	+1.5		0	+1.5
2:00		1.5			1.5	

根据上表“装卸栏”数据知道两种情形的日装卸费用相同（并且没有滞期费）

可以算出具体的装煤费用为： $(2+4+6)hr \times 9000 = 108000$ 元

4.3.2 星期四的特殊调度安排

针对星期四有大容量列车的情形，前面已经说明至少需要两个工作班才能满足该天的运载需求，而且这样也不可避免地会产生滞期费，合理调度安排如下：

星期四特殊调度安排						
时刻	倒煤台煤量	列车 A	列车 B	列车 C	大容量列车	工作班装卸费用
5:00	1.5	抵达				
8:00	0.5	驶出				21000
9:00	1		抵达			
12:00	0		驶出			21000
13:00	0.5				抵达	
14:30	0					21000
15:00	0.25				25000	
16:00	0.75				25000	21000
17:00	1.25				25000	21000
17:30	1.5					
20:00	0.67			抵达		
22:00	0			30000	驶出	21000
23:00	0.5			15000		
24:00	1			15000		21000
3:00	0			驶出		63000
6:00						

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/627010103046006103>