

江苏省睢宁县菁华高级中学 2024 届高三下学期联考数学试题

注意事项

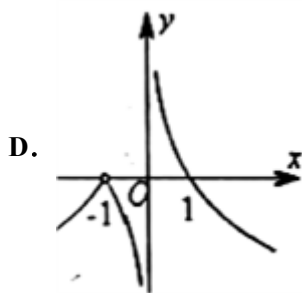
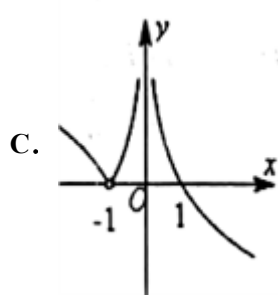
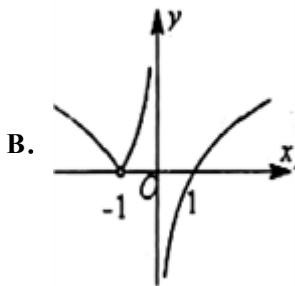
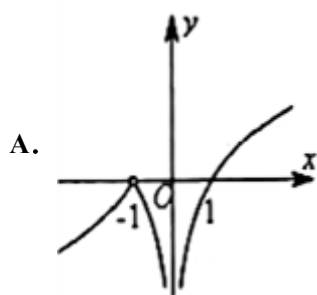
1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率是 3，焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{2}$ ，则双曲线 C 的焦距为 ()

- A. 3 B. $3\sqrt{2}$ C. 6 D. $6\sqrt{2}$

2. 函数 $f(x) = \frac{x+1}{|x+1|} \log_a |x|$ ($0 < a < 1$) 的图象的大致形状是 ()



3. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ 2x - 3y \leq 9 \\ x \geq 0 \end{cases}$ ，则目标函数 $z = 2x + y$ 的最大值是 ()

- A. 7 B. 5 C. 3 D. 2

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = a$ ($a \neq 0$)，且 $a_{n+1} = ka_n + t$ ，其中 $k, t \in \mathbb{R}$ ， $n \in \mathbb{N}^*$ ，下列叙述正确的是 ()

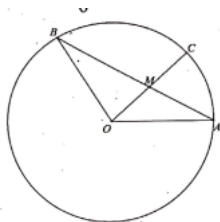
- A. 若 $\{a_n\}$ 是等差数列，则一定有 $k = 1$ B. 若 $\{a_n\}$ 是等比数列，则一定有 $t = 0$
C. 若 $\{a_n\}$ 不是等差数列，则一定有 $k \neq 1$ D. 若 $\{a_n\}$ 不是等比数列，则一定有 $t \neq 0$

5. 直线 $ax + by + \sqrt{2ab} = 0 (ab > 0)$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的位置关系是 ()

- A. 相交 B. 相切 C. 相离 D. 相交或相切

6. 点 A, B, C 是单位圆 O 上不同的三点, 线段 OC 与线段 AB 交于圆内一点 M , 若

$\vec{OC} = m\vec{OA} + n\vec{OB}, (m > 0, n > 0), m + n = 2$, 则 $\angle AOB$ 的最小值为 ()



- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

7. 设 $m \in \mathbf{R}$, 命题“存在 $m > 0$, 使方程 $x^2 + x - m = 0$ 有实根”的否定是()

A. 任意 $m > 0$, 使方程 $x^2 + x - m = 0$ 无实根

B. 任意 $m \leq 0$, 使方程 $x^2 + x - m = 0$ 有实根

C. 存在 $m > 0$, 使方程 $x^2 + x - m = 0$ 无实根

D. 存在 $m \leq 0$, 使方程 $x^2 + x - m = 0$ 有实根

8. 直线 $x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} = 0$ 经过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点 F , 交椭圆于 A, B 两点, 交 y 轴于 C 点, 若 $\vec{AC} = 2\vec{CB}$,

则该椭圆的离心率是 ()

- A. $\sqrt{3} - 1$ B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ C. $2\sqrt{2} - 2$ D. $\sqrt{2} - 1$

9. $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, CD 平分 $\angle ACB$, 若 $\vec{CB} = \vec{a}$, $\vec{CA} = \vec{b}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, 则 $\vec{CD} =$ ()

- A. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ B. $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ C. $\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}$ D. $\frac{4}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$

10. 幻方最早起源于我国, 由正整数 $1, 2, 3, \dots, n^2$ 这 n^2 个数填入 $n \times n$ 方格中, 使得每行、每列、每条对角线上的数的和相等, 这个正方形数阵就叫 n 阶幻方. 定义 $f(n)$ 为 n 阶幻方对角线上所有数的和, 如 $f(3) = 15$, 则 $f(10) =$ ()

8	1	6
3	5	7
4	9	2

- A. 55 B. 500 C. 505 D. 5050

11. 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, $3 + ai = b - (2a - 1)i$, 则 ()

- A. $b = 3a$ B. $b = 6a$ C. $b = 9a$ D. $b = 12a$

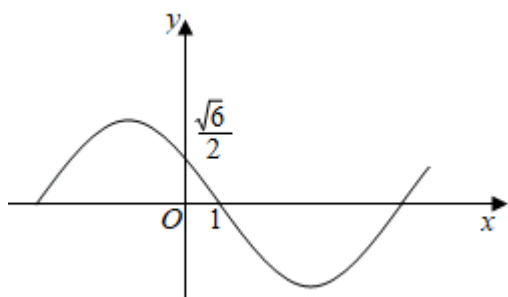
12. 已知复数 $z = \frac{4i}{1+i}$, 则 z 对应的点在复平面内位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 从 2、3、5、7、11、13 这六个质数中任取两个数，这两个数的和仍是质数的概率是_____（结果用最简分数表示）

14. 函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin(\omega x + \varphi)$ ($\varphi > 0, \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$) 的图像如图所示，则该函数的最小正周期为_____.



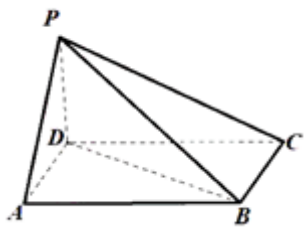
15. 若非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{6}$, $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$, 则 $|\vec{b}| =$ _____.

16. $\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中，常数项为_____；系数最大的项是_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在四棱锥 $P - ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形， $PD \perp$ 底面

$$ABCD, \quad PD = AD = 1, \quad AB = \sqrt{5}, \quad \sin \angle ABD = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$



(1) 证明: $PA \perp BD$;

(2) 求二面角 $A-PB-C$ 的正弦值.

18. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知向量 $\vec{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\vec{b} = \left(\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right), \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right)$, 其中 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

(1) 求 $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{a}$ 的值;

(2) 若 $\vec{c} = (1, 1)$, 且 $(\vec{b} + \vec{c}) \perp \vec{a}$, 求 α 的值.

19. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + 2n - 1 (n \geq 2)$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = a_n + 2n + 3$.

(I) 求证数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(II) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

20. (12 分) 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,

曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2 \cos \theta$.

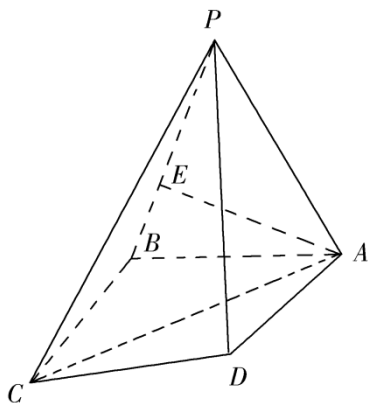
(1) 求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 设点 $P(\frac{1}{2}, 0)$, 直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 求 $|PA| + |PB|$ 的值.

21. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\triangle PAB$ 是等边三角形, $BC \perp AB$, $BC = CD = 2\sqrt{3}$, $AB = AD = 2$.

(1) 若 $PB = 3BE$, 求证: $AE \perp$ 平面 PCD ;

(2) 若 $PC = 4$, 求二面角 $A-PC-B$ 的正弦值.



22. (10 分) 在全面抗击新冠肺炎疫情这一特殊时期，我市教育局提出“停课不停学”的口号，鼓励学生线上学习.某校数学教师为了调查高三学生数学成绩与线上学习时间之间的相关关系，对高三年级随机选取 45 名学生进行跟踪问卷，其中每周线上学习数学时间不少于 5 小时的有 19 人，余下的人中，在检测考试中数学平均成绩不足 120 分的占 $\frac{8}{13}$ ，统计成绩后得到如下 2×2 列联表：

	分数不少于 120 分	分数不足 120 分	合计
线上学习时间不少于 5 小时		4	19
线上学习时间不足 5 小时			
合计			45

- (1) 请完成上面 2×2 列联表；并判断是否有 99% 的把握认为“高三学生的数学成绩与学生线上学习时间有关”；
- (2) ①按照分层抽样的方法，在上述样本中从分数不少于 120 分和分数不足 120 分的两组学生中抽取 9 名学生，设抽到不足 120 分且每周线上学习时间不足 5 小时的人数是 X ，求 X 的分布列（概率用组合数算式表示）；
- ②若将频率视为概率，从全校高三该次检测数学成绩不少于 120 分的学生中随机抽取 20 人，求这些人中每周线上学习时间不少于 5 小时的人数的期望和方差.

(下面的临界值表供参考)

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

(参考公式 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 其中 $n = a + b + c + d$)

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

根据焦点到渐近线的距离，可得 b ，然后根据 $b^2 = c^2 - a^2, e = \frac{c}{a}$ ，可得结果.

【详解】

由题可知：双曲线的渐近线方程为 $bx \pm ay = 0$

取右焦点 $F(c, 0)$ ，一条渐近线 $l: bx - ay = 0$

则点 F 到 l 的距离为 $\frac{|bc|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \sqrt{2}$ ，由 $b^2 + a^2 = c^2$

所以 $b = \sqrt{2}$ ，则 $c^2 - a^2 = 2$

又 $\frac{c}{a} = 3 \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = 9 \Rightarrow a^2 = \frac{c^2}{9}$

所以 $c^2 - \frac{c^2}{9} = 2 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$

所以焦距为： $2c = 3$

故选：A

【点睛】

本题考查双曲线渐近线方程，以及 a, b, c, e 之间的关系，识记常用的结论：焦点到渐近线的距离为 b ，属基础题.

2、C

【解析】

对 x 分类讨论，去掉绝对值，即可作出图象.

【详解】

$$f(x) = \frac{x+1}{|x+1|} \log_a |x| = \begin{cases} -\log_a (-x), & x < -1, \\ \log_a (-x), & -1 < x < 0, \\ \log_a x, & x > 0. \end{cases}$$

故选 C.

【点睛】

识图常用的方法

(1)定性分析法：通过对问题进行定性的分析，从而得出图象的上升(或下降)的趋势，利用这一特征分析解决问题；

(2)定量计算法：通过定量的计算来分析解决问题；

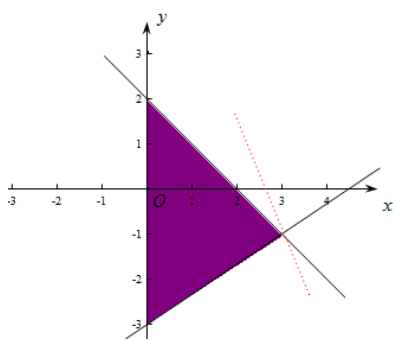
(3)函数模型法：由所提供的图象特征，联想相关函数模型，利用这一函数模型来分析解决问题.

3、B

【解析】

由约束条件作出可行域，化目标函数为直线方程的斜截式，数形结合得到最优解，联立方程组求得最优解的坐标，把最优解的坐标代入目标函数得结论.

【详解】



画出约束条件 $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ 2x - 3y \leq 9 \\ x \geq 0 \end{cases}$ 表示的可行域，如图，

由 $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - 3y - 9 = 0 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ ，

将 $z = 2x + y$ 变形为 $y = -2x + z$ ，

平移直线 $y = -2x + z$ ，

由图可知当直 $y = -2x + z$ 经过点 $(3, -1)$ 时，

直线在 y 轴上的截距最大，

z 最大值为 $z = 2 \times 3 - 1 = 5$ ，故选 B.

【点睛】

本题主要考查线性规划中，利用可行域求目标函数的最值，属于简单题.求目标函数最值的一般步骤是“一画、二移、三求”：(1) 作出可行域（一定要注意是实线还是虚线）；(2) 找到目标函数对应的最优解对应点（在可行域内平移变形后的目标函数，最先通过或最后通过的顶点就是最优解）；(3) 将最优解坐标代入目标函数求出最值.

4、C

【解析】

根据等差数列和等比数列的定义进行判断即可.

【详解】

A: 当 $k=0, t=a$ 时, $a_{n+1}=a$, 显然符合 $\{a_n\}$ 是等差数列, 但是此时 $k=1$ 不成立, 故本说法不正确;

B: 当 $k=0, t=a$ 时, $a_{n+1}=a$, 显然符合 $\{a_n\}$ 是等比数列, 但是此时 $t=0$ 不成立, 故本说法不正确;

C: 当 $k=1$ 时, 因此有 $a_{n+1}-a_n=ka_n+t-a_n=t=\text{常数}$, 因此 $\{a_n\}$ 是等差数列, 因此当 $\{a_n\}$ 不是等差数列时, 一定有 $k \neq 1$, 故本说法正确;

D: 当 $t=a \neq 0$ 时, 若 $k=0$ 时, 显然数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 故本说法不正确.

故选: C

【点睛】

本题考查了等差数列和等比数列的定义, 考查了推理论证能力, 属于基础题.

5、D

【解析】

由几何法求出圆心到直线的距离, 再与半径作比较, 由此可得出结论.

【详解】

解: 由题意, 圆 $x^2+y^2=1$ 的圆心为 $O(0,0)$, 半径 $r=1$,

$$\because \text{圆心到直线的距离为 } d = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$Q a^2+b^2 \geq 2ab,$$

$$\therefore d \leq 1,$$

故选: D.

【点睛】

本题主要考查直线与圆的位置关系, 属于基础题.

6、D

【解析】

由题意得 $1=m^2+n^2+2mn \cos \angle AOB$, 再利用基本不等式即可求解.

【详解】

将 $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ 平方得 $1=m^2+n^2+2mn \cos \angle AOB$,

$$\cos \angle AOB = \frac{1-m^2-n^2}{2mn} = \frac{1-(m+n)^2+2mn}{2mn} = -\frac{3}{2mn} + 1 \leq -\frac{3}{2 \times (\frac{m+n}{2})^2} + 1 = -\frac{1}{2}$$

(当且仅当 $m = n = 1$ 时等号成立),

Q $0 < \angle AOB < \pi$,

$\therefore \angle AOB$ 的最小值为 $\frac{2\pi}{3}$,

故选: D.

【点睛】

本题主要考查平面向量数量积的应用, 考查基本不等式的应用, 属于中档题.

7、A

【解析】

只需将“存在”改成“任意”, 有实根改成无实根即可.

【详解】

由特称命题的否定是全称命题, 知“存在 $m > 0$, 使方程 $x^2 + x - m = 0$ 有实根”的否定是

“任意 $m > 0$, 使方程 $x^2 + x - m = 0$ 无实根”.

故选: A

【点睛】

本题考查含有一个量词的命题的否定, 此类问题要注意在两个方面作出变化: 1.量词, 2.结论, 是一道基础题.

8、A

【解析】

由直线 $x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} = 0$ 过椭圆的左焦点 F , 得到左焦点为 $F(-\sqrt{3}, 0)$, 且 $a^2 - b^2 = 3$,

再由 $\overrightarrow{PF} = 2\overrightarrow{PQ}$, 求得 $P(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$, 代入椭圆的方程, 求得 $a^2 = \frac{3\sqrt{3}+6}{2}$, 进而利用椭圆的离心率的计算公式, 即可求解.

【详解】

由题意, 直线 $x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} = 0$ 经过椭圆的左焦点 F , 令 $y = 0$, 解得 $x = -\sqrt{3}$,

所以 $c = \sqrt{3}$, 即椭圆的左焦点为 $F(-\sqrt{3}, 0)$, 且 $a^2 - b^2 = 3$ ①

直线交 y 轴于 $Q(0, 1)$, 所以, $|PF| = \sqrt{3}$, $|PQ| = 1$, $|FQ| = 2$,

因为 $\overrightarrow{PF} = 2\overrightarrow{PQ}$, 所以 $|PF| = 3$, 所以 $P(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$,

又由点 P 在椭圆上，得 $\frac{3}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 4$ ②

由 ①②，可得 $4a^2 - 24a^2 + 9 = 0$ ，解得 $a^2 = \frac{3\sqrt{3}+6}{2}$ ，

所以 $a^2 = \frac{a^2}{b^2} = \frac{6}{3\sqrt{3}+6} = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$ ，

所以椭圆的离心率为 $e = \sqrt{3} - 1$ 。

故选 A。

【点睛】

本题考查了椭圆的几何性质——离心率的求解，其中求椭圆的离心率(或范围)，常见有两种方法：①求出 a, b ，代入公式 $e = \frac{c}{a}$ ；②只需要根据一个条件得到关于 a, b, c 的齐次式，转化为 a, b 的齐次式，然后转化为关于 e 的方程，即可

得 e 的值(范围)。

9、B

【解析】

由 CD 平分 $\angle ACB$ ，根据三角形内角平分线定理可得 $\frac{BD}{DA} = \frac{CB}{CA}$ ，再根据平面向量的加减法运算即得答案。

【详解】

∵ CD 平分 $\angle ACB$ ，根据三角形内角平分线定理可得 $\frac{BD}{DA} = \frac{CB}{CA}$ ，

又 $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ ， $|\vec{a}| = 2$ ， $|\vec{b}| = 1$ ，

$\therefore \frac{BD}{DA} = 2, \therefore BD = 2DA$ ，

$\therefore \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} = \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ 。

故选：B。

【点睛】

本题主要考查平面向量的线性运算，属于基础题。

10、C

【解析】

因为幻方的每行、每列、每条对角线上的数的和相等，可得 $f(n) = \frac{1+2+3+\cdots+n^2}{n}$ ，即得解。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/627153013006006102>