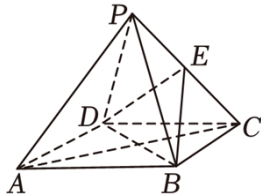


## 重难点突破 07 立体几何中求角度、线段、距离

1. 四棱锥  $P-ABCD$  中, 四边形  $ABCD$  为菱形,  $AD=2$ ,  $\angle BAD=60^\circ$ , 平面  $PBD \perp$  平面  $ABCD$ .

(1) 证明:  $PB \perp AC$ ;

(2) 若  $PB=PD$ , 且  $PA$  与平面  $ABCD$  成角为  $60^\circ$ , 点  $E$  在棱  $PC$  上, 且  $\overrightarrow{PE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$ , 求平面  $EBD$  与平面  $BCD$  的夹角的余弦值.



【解答】解: (1) 证明: 因为四边形  $ABCD$  为菱形,

所以  $BD \perp AC$ ,

因为平面  $PBD \perp$  平面  $ABCD$ , 平面  $PBD \cap$  平面  $ABCD = BD$ ,  $AC \subset$  平面  $ABCD$ ,

所以  $AC \perp$  平面  $PBD$ ,

因为  $PB \subset$  平面  $PBD$ , 故  $AC \perp PB$ .

(2) 设  $AC \cap BD = O$ , 则  $O$  为  $AC$ 、 $BD$  的中点,

又因为  $PB = PD$ ,

所以  $PO \perp BD$ ,

又因为  $AC \perp$  平面  $PBD$ ,  $PO \subset$  平面  $PBD$ ,

所以  $PO \perp AC$ ,

因为  $AC \cap BD = O$ ,  $AC$ 、 $BD \subset$  平面  $ABCD$ ,

所以  $PO \perp$  平面  $ABCD$ ,

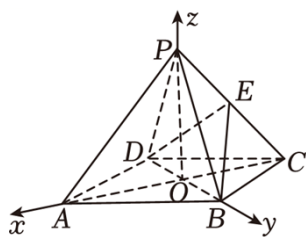
所以  $\angle PAO$  为  $PA$  与平面  $ABCD$  所成角, 故  $\angle PAO = 60^\circ$ ,

由于四边形  $ABCD$  为边长为  $AD=2$ ,  $\angle BAD=60^\circ$  的菱形,

所以  $AO = AD \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ ,  $PO = AO \tan \angle PAO = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ ,

以点  $O$  为坐标原点,  $OA$ 、 $OB$ 、 $OP$  所在直线分别为  $x$ 、 $y$ 、 $z$

轴建立如下图所示的空间直角坐标系：



则  $A(\sqrt{3}, 0, 0)$  ,  $C(-\sqrt{3}, 0, 0)$  ,  $B(0, 1, 0)$  ,  $D(0, -1, 0)$  ,  $P(0, 0, 3)$  ,

由  $\vec{PE} = \frac{1}{3}\vec{PC} = \frac{1}{3}(-\sqrt{3}, 0, -3) = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -1)$  ,

得  $\vec{BE} = \vec{BP} + \vec{PE} = (0, -1, 3) + (-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -1) = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, -1, 2)$  , 且  $\vec{DB} = (0, 2, 0)$  ,

设平面  $BEC$  的法向量为  $\vec{m} = (x, y, z)$  ,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{DB} = 2y = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{BE} = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - y + 2z = 0 \end{cases} ,$$

取  $x = 2\sqrt{3}$  , 则  $z = 1$  ,  $y = 0$  ,

所以  $\vec{m} = (2\sqrt{3}, 0, 1)$  ,

又平面  $BCD$  的一个法向量为  $\vec{n} = (0, 0, 1)$  ,

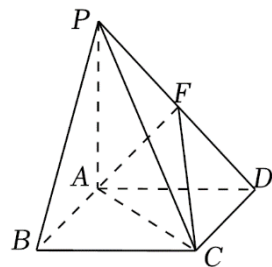
所以  $|\cos\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{13} \times 1} = \frac{\sqrt{13}}{13}$  ,

所以平面  $EBD$  与平面  $BCD$  的夹角的余弦值为  $\frac{\sqrt{13}}{13}$  .

2. 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是菱形,  $PA \perp$  平面  $ABCD$  ,  $PA = AB = 2$  ,  $PD$  的中点为  $F$  .

(1) 求证:  $PB \parallel$  平面  $ACF$  .

(2) 若  $AD \perp CF$  , 求二面角  $F-AC-D$  的余弦值.



【解答】解：（1）证明：设  $AC \cap BD = O$ ，连接  $OF$ ，

由于  $O, F$  分别是  $BD, PD$  的中点，

所以  $OF \parallel PB$ ，

由于  $PB \not\subset$  平面  $ACF$ ， $OF \subset$  平面  $ACF$ ，

所以  $PB \parallel$  平面  $ACF$ 。

（2）设  $E$  是  $AD$  的中点，连接  $EF, EC$ ，

则  $EF \parallel PA$ ，

所以  $EF \perp$  平面  $ABCD$ ，

由于  $AD, EC \subset$  平面  $ABCD$ ，

所以  $EF \perp AD, EF \perp EC$ ，

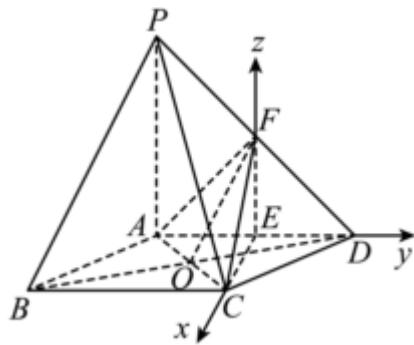
由于  $AD \perp CF, EF \cap CF = F, EF, CF \subset$  平面  $CEF$ ，

所以  $AD \perp$  平面  $CEF$ ，

因为  $EC \subset$  平面  $CEF$ ，

所以  $AD \perp EC$ ，则  $EC = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ，

以  $E$  为空间坐标原点建立如图所示空间直角坐标系：



平面  $ACD$  的一个法向量为  $\vec{m} = (0, 0, 1)$ ，

$F(0, 0, 1), A(0, -1, 0), C(\sqrt{3}, 0, 0)$ ， $\vec{FA} = (0, -1, -1), \vec{FC} = (\sqrt{3}, 0, -1)$ ，

设平面  $ACF$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{FA} = -y - z = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{FC} = \sqrt{3}x - z = 0 \end{cases},$$

令  $x = 1$ ，则  $y = -\sqrt{3}$ ， $z = \sqrt{3}$ ，

故可设  $\vec{r}_n = (1, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ,

设二面角  $F-AC-D$  为  $\theta$ , 由图可知  $\theta$  为锐角,

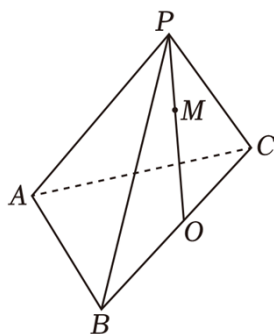
$$\text{所以 } \cos \theta = \left| \frac{\vec{r}_m \cdot \vec{r}_n}{|\vec{r}_m| \cdot |\vec{r}_n|} \right| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

所以二面角  $F-AC-D$  的余弦值为  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ .

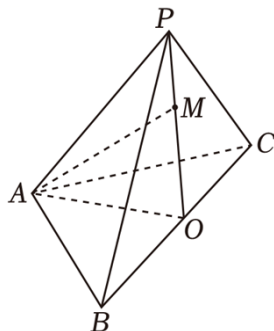
3. 在三棱锥  $P-ABC$  中, 底面  $ABC$  是边长为 2 的等边三角形, 点  $P$  在底面  $ABC$  上的射影为棱  $BC$  的中点  $O$ , 且  $PB$  与底面  $ABC$  所成角为  $\frac{\pi}{3}$ , 点  $M$  为线段  $PO$  上一动点.

(1) 证明:  $BC \perp AM$ ;

(2) 若  $\frac{PM}{MO} = \frac{1}{2}$ , 求点  $M$  到平面  $PAB$  的距离.



【解答】证明: (1) 分别连接  $AO$ ,  $AM$ ,  $QO$  为  $BC$  中点,  $\triangle ABC$  为等边三角形,



$\therefore AO \perp BC$ , 点  $P$  在底面  $ABC$  上的投影为点  $O$ ,  $\therefore PO \perp$  平面  $ABC$ ,

又  $BC \subset$  平面  $ABC$ ,  $\therefore PO \perp BC$ ,

又  $AO \perp PO = O$ ,  $AO \subset$  平面  $APO$ ,  $PO \subset$  平面  $APO$ ,

$\therefore BC \perp$  面  $APO$ ,

又  $AM \subset$  面  $APO$ ,  $\therefore BC \perp AM$ .

解: (2) 设点  $M$  到平面  $PAB$  的距离为  $h$ , 点  $O$  到面  $PAB$  的距离为  $d$ ,

$$\therefore \frac{PM}{MO} = \frac{1}{2}, \therefore h = \frac{1}{3}d,$$

$Q$   $BO$  为  $PB$  在底面  $ABC$  上的投影,  $\therefore \angle PBO$  为  $PB$  与面  $ABC$  所成角,  $\therefore \angle PBO = \frac{\pi}{3}$ ,

$Q$   $PO$  垂直平分  $BC$ ,  $\therefore PB = PC$ ,  $\therefore \triangle PBC$  为正三角形,  $\therefore PB = 2$ ,

$Rt\triangle AOP$  中, 易得  $AO = OP = \sqrt{3}AP = \sqrt{AO^2 + PO^2} = \sqrt{6}$ ,

$Q$   $BA = BP = 2$ ,  $\therefore B$  到  $PA$  的距离为  $\sqrt{2^2 - (\frac{\sqrt{6}}{2})^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ,

$$\therefore S_{\triangle PAB} = \frac{\sqrt{15}}{2}, \text{ 又 } S_{\triangle AOB} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

由  $V_{P-AOB} = V_{O-PAB}$ ,  $\therefore \frac{1}{3}S_{\triangle AOB} \cdot PO = \frac{1}{3}S_{\triangle PAB} \cdot d$ ,

$$\therefore d = \frac{S_{\triangle AOB} \cdot PO}{S_{\triangle PAB}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{5},$$

$$\therefore h = \frac{1}{3}d = \frac{\sqrt{15}}{15},$$

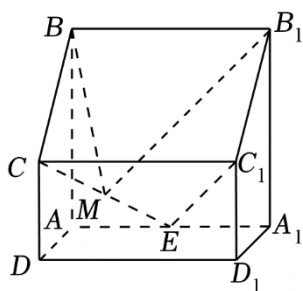
$\therefore$  点  $M$  到平面  $PAB$  的距离为  $\frac{\sqrt{15}}{15}$ .

4. 如图, 在四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 侧棱  $A_1A \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AB \parallel DC$ ,  $AB \perp AD$ ,

$AD = CD = 2$ ,  $AA_1 = AB = 4$ ,  $E$  为棱  $AA_1$  的中点.

(1) 证明:  $BC \perp C_1E$ .

(2) 设  $\vec{CM} = \lambda \vec{CE}$  ( $0 < \lambda < 1$ ), 若  $C_1$  到平面  $BB_1M$  的距离为  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 求  $\lambda$ .



【解答】证明: (1) 以  $A$  为坐标原点, 分别以  $AD$ ,  $AA_1$ ,  $AB$  所在直线为  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴, 建立空间直角坐标系, 如图所示:

则  $B(0, 0, 4)$ ,  $D(2, 0, 0)$ ,  $C(2, 0, 2)$ ,  $E(0, 2, 0)$ ,  $C_1(2, 4, 2)$ ,  $B_1(0, 4,$

$4)$ , 所以  $\vec{BC} = (2, 0, -2)$ ,  $\vec{EC_1} = (2, 2, 2)$ ,

所以  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EC_1} = 2 \times 2 + 0 + 2 \times (-2) = 0$ ,

所以  $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{EC_1}$ , 即  $BC \perp C_1E$ ;

解: (2) 因为  $\overrightarrow{BB_1} = (0, 4, 0)$ ,  $\overrightarrow{CE} = (-2, 2, -2)$ ,

所以  $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BC} + \lambda \overrightarrow{CE} = (2 - 2\lambda, 2\lambda, -2 - 2\lambda)$ ,

设平面  $BB_1M$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ ,

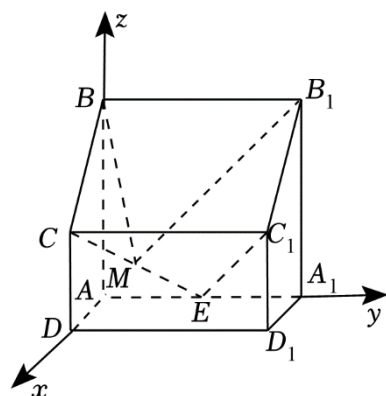
所以  $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \end{cases}$ , 即  $\begin{cases} 4y = 0 \\ (2 - 2\lambda)x + 2\lambda y - (2\lambda + 2)z = 0 \end{cases}$ , 令  $x = 1 + \lambda$ , 解得  $\vec{n} = (1 + \lambda, 0,$

$1 - \lambda)$ ,

因为  $\overrightarrow{B_1C_1} = (2, 0, -2)$ ,

所以  $C_1$  到平面  $BB_1M$  的距离  $d = \frac{|\overrightarrow{B_1C_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{4\lambda}{\sqrt{2 + 2\lambda^2}}$ ,

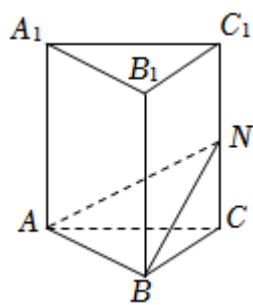
由题意可知  $\frac{4\lambda}{\sqrt{2 + 2\lambda^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 解得  $\lambda = \frac{1}{3}$ .



5. 如图, 正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 各棱长均为 4,  $N$  是  $CC_1$  的中点.

(1) 求点  $N$  到直线  $AB$  的距离;

(2) 求点  $C_1$  到平面  $ABN$  的距离.



【解答】解：建立如图所示的空间直角坐标系，

则  $A(0,0,0), B(2\sqrt{3},2,0), C(0,4,0), C_1(0,4,4)$  ,

$Q$   $N$  是  $CC_1$  的中点，

$\therefore N(0, 4, 2)$  .

(1)  $\vec{AN} = (0, 4, 2), \vec{AB} = (2\sqrt{3}, 2, 0)$  , 则  $|\vec{AN}| = 2\sqrt{5}, |\vec{AB}| = 4$  .

设点  $N$  到直线  $AB$  的距离为  $d_1$  ,

$$\text{则 } d_1 = \sqrt{|\vec{AN}|^2 - \left(\frac{\vec{AN} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}|}\right)^2} = \sqrt{20 - 4} = 4 .$$

(2) 设平面  $ABN$  的一个法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$  ,

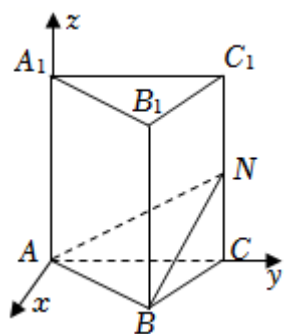
则由  $\vec{n} \perp \vec{AB}, \vec{n} \perp \vec{AN}$  ,

$$\text{得 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 2\sqrt{3}x + 2y = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AN} = 4y + 2z = 0 \end{cases} ,$$

令  $z = 2$  , 则  $y = -1, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$  , 即  $\vec{n} = (\frac{\sqrt{3}}{3}, -1, 2)$  .

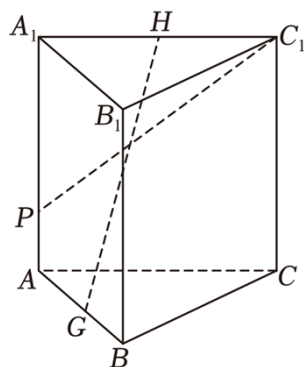
易知  $\vec{C_1N} = (0, 0, -2)$  , 设点  $C_1$  到平面  $ABN$  的距离为  $d_2$  ,

$$\text{则 } d_2 = \left| \frac{\vec{C_1N} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{-4}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} \right| = \sqrt{3} .$$



6. 如图，在正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中， $AA_1=3$ ，此三棱柱的体积为  $6\sqrt{3}$ ， $P$  为侧棱  $AA_1$  上点，且  $AP=1$ ， $H$ 、 $G$  分别为  $AB$ 、 $A_1C_1$  的中点。

- (1) 求此三棱柱的表面积；
- (2) 求异面直线  $GH$  与  $PC_1$  所成角的大小；
- (3) 求  $PC_1$  与平面  $AA_1B_1B$  所成角的大小。



【解答】解：(1) 设底面正三角形的边长为  $a$ ，则其面积为  $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ，

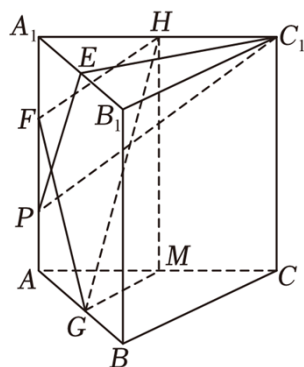
Q 三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  的体积为  $6\sqrt{3}$ ，

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times 3 = 6\sqrt{3}, \text{ 解得 } a = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{三棱柱的侧面积为 } S_1 = 3a \times AA_1 = 3 \times 2\sqrt{2} \times 3 = 18\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{三棱柱的表面积为 } S = S_1 + 2S_{\triangle ABC} = 18\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \times 8 \times 2 = 18\sqrt{2} + 4\sqrt{3}.$$

(2) 如图，



取  $A_1P$  的中点  $F$ ，连接  $HF$ ， $FG$ ，可得  $HF \parallel PC_1$ ，

$\therefore$  异面直线  $GH$  与  $PC_1$  所成角，即为直线  $GH$  与  $HF$  所成角，

Q  $AP=1$ ，

$\therefore$  在直角  $\triangle A_1HF$  中，有  $HF = \sqrt{A_1H^2 + A_1F^2} = \sqrt{3}$ ，

在直角  $\triangle AFG$  中，有  $FG = \sqrt{AG^2 + AF^2} = \sqrt{6}$ ，

取  $AC$  的中点  $M$ ，连接  $GM$ ， $HM$ ，

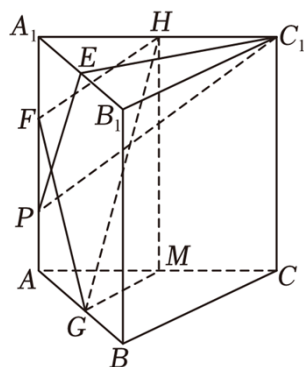
$\therefore$  在直角  $\triangle GHM$  中，有  $GH = \sqrt{GM^2 + HM^2} = \sqrt{11}$ ，

在  $\triangle HFG$  中，由余弦定理得：

$$\cos \angle GHF = \frac{3+11-6}{2\sqrt{3} \times \sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{33}}{33}，$$

$\therefore$  异面直线  $GH$  与  $PC_1$  所成角的大小为  $\arccos \frac{4\sqrt{33}}{33}$ ；

(3) 如图，



取  $A_1B_1$  的中点  $E$ ，可得  $C_1E \perp A_1B_1$ ，

由正三棱柱的结构特征易知平面  $A_1B_1C_1 \perp$  平面  $ABB_1A_1$ ，

又平面  $A_1B_1C_1 \cap$  平面  $ABB_1A_1 = A_1B_1$ ，

$\therefore C_1E \perp \text{平面 } ABB_1A_1$ ，

$\therefore$  直线  $PC_1$  与平面  $ABB_1A_1$  所成的角即为  $\angle C_1PE$ ，

在  $Rt \triangle A_1PE$  中， $PE = \sqrt{A_1P^2 + A_1E^2} = \sqrt{6}$ ，

又  $C_1E = \sqrt{A_1C_1^2 - A_1E^2} = \sqrt{6}$ ，

$\therefore$  在  $Rt \triangle PC_1E$  中，

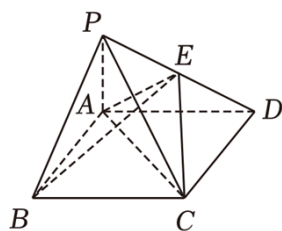
$$\tan \angle C_1PE = \frac{C_1E}{PE} = 1，$$

$\therefore \angle C_1PE = 45^\circ$ 。

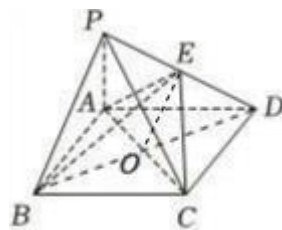
7. 如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  是矩形， $AB = 2AD = 2$ ， $PA \perp \text{平面 } ABCD$ ， $E$  为  $PD$  中点，且  $PA = 1$ 。

(1) 求证： $PB \parallel \text{平面 } ACE$ ；

(2) 求直线  $BE$  与平面  $PAB$  所成角的余弦值。



【解答】解：(1) 如图，



连接  $BD$ ，交  $AC$  于点  $O$ ，连接  $EO$ ，

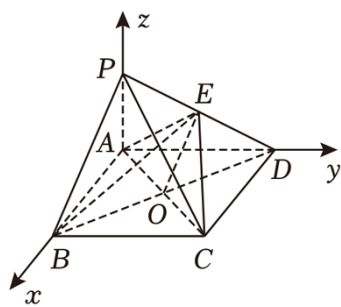
$QE$  为  $PD$  中点， $O$  为  $BD$  中点，

$\therefore EO \parallel PB$ ，

又  $QEO \subset \text{平面 } ACE$ ， $PB \not\subset \text{平面 } ACE$ ，

$\therefore PB \parallel \text{平面 } ACE$ ；

(2) 如图，以  $A$  为坐标原点， $AB$ ， $AD$ ， $AP$  所在直线分别为  $x$  轴， $y$  轴， $z$  轴建立空间直角坐标系，



则  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(2, 0, 0)$ ,  $C(2, 1, 0)$ ,  $P(0, 0, 1)$ ,

$D(0, 1, 0)$ ,  $E(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,

$\therefore \vec{BE} = (-2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,

由题有  $y$  轴  $\perp$  面  $PAB$ , 显然向量  $\vec{n} = (0, 1, 0)$  是平面  $PAB$  的一个法向量,

设直线  $BE$  与平面  $PAB$  所成角为  $\theta$ , 则  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,

$$\therefore \sin \theta = |\cos \langle \vec{BE}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{BE} \cdot \vec{n}|}{|\vec{BE}| |\vec{n}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{9}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{6},$$

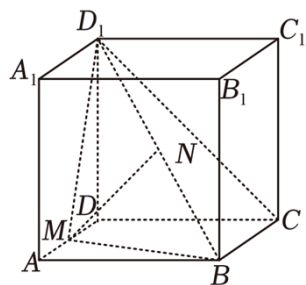
$$\therefore \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\sqrt{34}}{6},$$

即直线  $BE$  与平面  $PAB$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{34}}{6}$ .

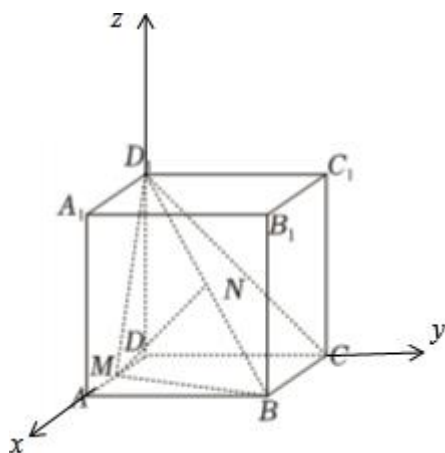
8. 如图正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 棱长为  $a$ ,  $M$ 、 $N$  分别为  $AD$ 、 $BD_1$  的中点.

(1) 求证:  $MN \perp AD$ ;

(2) 求  $D_1C$  与平面  $D_1MB$  所成角的大小.



【解答】解: (1) 证明: 如图,



以点  $D$  为坐标原点， $DA$  为  $x$  轴， $DC$  为  $y$  轴， $DD_1$  为  $z$  轴建立空间直角坐标系.

则  $D(0, 0, 0)$ ， $A(a, 0, 0)$ ， $C(0, a, 0)$ ， $A_1(a, 0, a)$ ，

$D_1(0, 0, a)$ ， $B(a, a, 0)$ ， $N(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ ， $M(\frac{a}{2}, 0, 0)$ ，

$$(1) \therefore \overrightarrow{MN} = (0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}), \overrightarrow{AD} = (-a, 0, 0),$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD} = 0,$$

$$\therefore MN \perp AD;$$

(2) 解:  $Q D_1(0, 0, a)$ ， $C(0, a, 0)$ ， $B(a, a, 0)$ ，

$$\overrightarrow{D_1C} = (0, a, -a), \overrightarrow{D_1M} = (\frac{a}{2}, 0, -a), \overrightarrow{D_1B} = (a, a, -a),$$

设平面  $D_1MB$  的一个法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ ，则  $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{D_1M} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{D_1B} = 0, \end{cases}$  即  $\begin{cases} \frac{a}{2}x - az = 0 \\ ax + ay - az = 0 \end{cases}$ ，

令  $z = 1$ ，则  $x = 2$ ， $y = -1$ ，所以  $\vec{n} = (2, -1, 1)$ ，

设  $D_1C$  与平面  $D_1MB$  所成角的大小为  $\theta$ ，

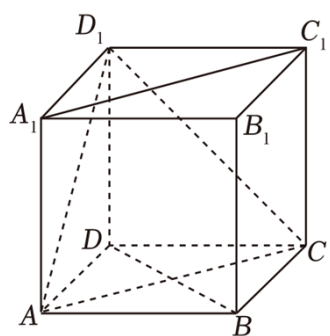
$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{D_1C}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{D_1C} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{D_1C}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|-2a|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore D_1C$  与平面  $D_1MB$  所成角的大小为  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

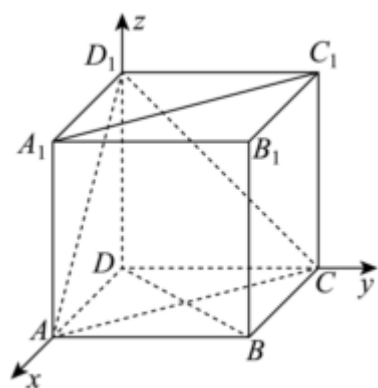
9. 如图，正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 2.

(1) 用空间向量方法证明:  $A_1C_1 \parallel$  平面  $ACD_1$ ;

(2) 求直线  $BD$  与平面  $ACD_1$  所成角的正弦值.



【解答】(1) 证明：由题，以  $D$  为原点，以  $DA$ ， $DC$ ， $DD_1$  所在直线分别为  $x$ ， $y$ ， $z$  轴建立如图所示的空间直角坐标系，



Q 正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 2，

$\therefore A(2, 0, 0)$ ， $C(0, 2, 0)$ ， $C_1(0, 2, 2)$ ， $D_1(0, 0, 2)$ ， $A_1(2, 0, 2)$ ，

则  $\vec{A_1C_1} = (-2, 2, 0)$ ， $\vec{AC} = (-2, 2, 0)$ ， $\vec{CD_1} = (0, -2, 2)$ ，

设平面  $ACD_1$  的一个法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

则  $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AC} = -2x + 2y = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{CD_1} = -2y + 2z = 0 \end{cases}$ ，令  $z = 1$ ，则可得  $x = 1$ ， $y = 1$ ，即  $\vec{n} = (1, 1, 1)$ ；

$\therefore \vec{n} \cdot \vec{A_1C_1} = -2 + 2 + 0 = 0$ ，

$\therefore \vec{n} \perp \vec{A_1C_1}$ ，又  $A_1C_1 \notin$  平面  $ACD_1$ ，

$\therefore A_1C_1 \parallel$  平面  $ACD_1$ ；

(2) Q  $B(2, 2, 0)$ ， $D(0, 0, 0)$ ，

$\therefore \vec{BD} = (-2, -2, 0)$ ，

由(1)知平面  $ACD_1$  的一个法向量为  $\vec{n} = (1, 1, 1)$ ,

设直线  $BD$  与平面  $ACD_1$  所成的角为  $\theta$ ,

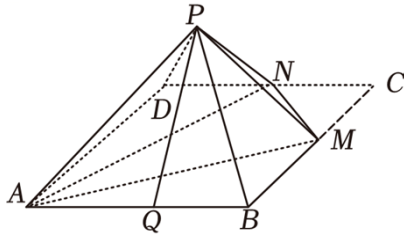
$$\therefore \sin \theta = |\cos \langle \vec{BD}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{BD} \cdot \vec{n}|}{|\vec{BD}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|-2-2|}{2\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

即直线  $BD$  与平面  $ACD_1$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

10. 如图, 在菱形  $ABCD$  中,  $AB = 2$ ,  $\angle DAB = 60^\circ$ ,  $M$ ,  $N$  分别为  $BC$ ,  $CD$  的中点, 将  $\triangle MNC$  沿  $MN$  折起, 使点  $C$  到点  $P$  的位置,  $AP = \sqrt{6}$ .

(1) 证明: 平面  $APN \perp$  平面  $PMN$ ;

(2) 若  $Q$  为线段  $AB$  上一点, 求  $PQ$  与平面  $APM$  所成角的正弦值的最大值.



【解答】(1) 证明: 连接  $AC$ ,  $BD$ ,  $AC$  与  $MN$  交于点  $O$ , 连接  $OP$ ,

则  $AC \perp BD$ ,

又  $M$ ,  $N$  分别为  $BC$ ,  $CD$  的中点, 所以  $MN \parallel BD$ ,

则  $AC \perp MN$ ,

因为  $MN \perp OA$ ,  $MN \perp OP$ ,  $OA \cap OP = O$ ,

所以  $MN \perp$  平面  $APO$ ,

又  $AP \subset$  平面  $APO$ , 所以  $MN \perp AP$ ,

在菱形  $ABCD$  中,  $AB = 2$ ,  $\angle DAB = 60^\circ$ ,

则在  $\triangle ADN$  中, 由余弦定理得

$$AN = \sqrt{AD^2 + DN^2 - 2AD \cdot DN \cos 120^\circ} = \sqrt{4 + 1 - 2 \times 2 \times 1 \times (-\frac{1}{2})} = \sqrt{7},$$

因为  $PN = CN = 1$ , 所以  $AP^2 + PN^2 = AN^2$ ,

则  $AP \perp PN$ ,

又  $PN \cap MN = N$ , 所以  $AP \perp$  平面  $PMN$ ,

因为  $AP \subset$  平面  $APN$ , 所以平面  $APN \perp$  平面  $PMN$ .

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/628055021067006130>