难点特训（三）和分式及分式方程有关的压轴大题

1.（2019 秋·江苏南通·八年级校考期末）某公司为增加员工收入，提高效益，今年提出如下目标，和去年相比，在产品的出厂价增加10% 的前提下，将产品成本降低 20%，使产品的利润率（利润率 $=\frac{\text{利润}}{\text{成本}}\times 100\%$）较去年翻一番，求今年该公司产品的利润率.

【答案】今年该公司产品的利润率120% .

【分析】设去年产品出厂价为 a，去年产品成本为 b，根据利润率计算公式列出方程，求出 a 和 b 的数量关系，进而求出产品的利润率.

【详解】解：设去年产品出厂价为 a，去年产品成本为 b，根据题意，

$\frac{(1+10\%)a-(1-20\%)b}{(1-20\%)b}\cdot 100\%=\frac{a-b}{b}\cdot 2\cdot 100\%$，

整理得：$\frac{1.1a-0.8b}{0.8}=2a-2b$，

解得：$a=\frac{8}{5}b$，

∴今年的利润率为 $\frac{a-b}{b}\cdot 2=\frac{\frac{8}{5}b-b}{b}\cdot 2=120\%$.

答：今年该公司产品的利润率120% .

【点睛】本题主要考查了分式方程的应用，解答本题的关键是正确设出产品的出厂价和成本价，并表示今年的出厂价和成本，利用今年的利润率较去年翻一番列出方程.

2.（2017 春·江苏南通·八年级统考期末）某物流公司要把 3000 吨货物从 M 市运到 W 市.（每日的运输量为固定值）

（1）从运输开始，每天运输的货物吨数 y（单位：吨）与运输时间 x（单位：天）之间有怎样的函数关系式？

（2）因受到沿线道路改扩建工程影响，实际每天的运输量比原计划少 20%，以致推迟 1 天完成运输任务，求原计划完成运输任务的天数.

【答案】（1）$y=\frac{3000}{x}(x>0)$　（2）4 天

【详解】试题分析：（1）根据每天运量×天数=总运量即可列出函数解析式，注意实际问题的取值范围；

（2）根据“实际每天比原计划每天少运 20%，则推迟 1 天完成任务”列分式方程即可求解.

试题解析：（1）∵每天运量×天数＝总运量，∴xy＝3000，

∴$y=\frac{3000}{x}$（$x>0$）

（2）设原计划 x 天完成，根据题意得：

$\frac{3000}{x}$（1 - 20%）$=\frac{3000}{x+1}$，

解得：$x=4$

经检验：$x=4$ 是原方程的根，

答：原计划 4 天完成.

3.（2023 春·江苏·八年级专题练习）阅读下列材料：

在学习“分式方程及其解法”的过程中，老师提出一个问题：若关于 x 的分式方程 $\frac{a}{x-4}=1$ 的解为正数，求 a 的取值范围．经过独立思考与分析后，小明和小聪开始交流解题思路，小明说：解这个关于 x 的方程，得到方程的解为 $x=a+4$，由题目可得 $a+4>0$，所以 $a>-4$，问题解决．小聪说：你考虑的不全面，还必须保证 $a\neq 0$ 才行．

(1)请回答：_____的说法是正确的，正确的理由是 _____.

完成下列问题：

(2)已知关于 x 的方程 $\frac{m}{x-3}-\frac{x}{3-x}=2$ 的解为非负数，求 m 的取值范围；

(3)若关于 x 的方程 $\frac{3-2x}{x-3}+\frac{nx-2}{x-3}=-1$ 无解，求 n 的值.

【答案】(1)小聪，分式的分母不能为 0；

(2) $m\geq -6$ 且 $m\neq -3$；

(3) $n=1$ 或 $\frac{5}{3}$.

【分析】（1）根据分式有意义的条件：分母不能为 0，即可知道小聪说得对；

（2）首先按照解分式方程的步骤得到方程的解，再利用解是非负数即可求出 m 的取值范围；

（3）按照解分式方程的步骤去分母得到整式方程，若分式方程无解，则得到增根或者整式方程无解，即可求出 n 的范围.

【详解】（1）解：∵分式方程的解不能是增根，即不能使分式的分母为 0

∴小聪说得对，分式的分母不能为 0.

（2）解：原方程可化为 $\frac{m}{x-3}+\frac{x}{x-3}=2$

去分母得：$m+x=2(x-3)$

解得：$x=m+6$

∵解为非负数

∴$m+6\geq 0$，即$m\geq -6$

又∵$x-3\neq 0$

∴$m+6\neq 3$，即$m\neq -3$

∴$m\geq -6$且$m\neq -3$

（3）解：去分母得：$3-2x+nx-2=-(x-3)$

解得：$(n-1)x=2$

∵原方程无解

∴$n-1=0$或者$x=3$

①当$n-1=0$时，得：$n=1$

②当$x=3$时，$\frac{2}{(n-1)}=3$，得：$n=\frac{5}{3}$

综上：当$n=1$或$n=\frac{5}{3}$时原方程无解.

【点睛】本题考查了解分式方程以及根据分式方程的解确定参数范围，重点要掌握解分式方程的步骤：去分母化成整式方程；再解整式方程；验根．理解当分式方程无解时包含整式方程无解和有曾根两种情况.

4.（2022 春·江苏无锡·八年级校考阶段练习）我校科技兴趣小组利用机器人开展研究活动，在相距 150 个单位长度的直线跑道 AB 上，机器人甲从端点 A 出发，匀速往返于端点 A、B 之间，机器人乙同时从端点 B 出发，以大于甲的速度匀速往返于端点 B、A 之间．他们到达端点后立即转身折返，用时忽略不计，兴趣小组成员探究这两个机器人迎面相遇的情况，这里的“迎面相遇”包括面对面相遇、在端点处相遇这两种.

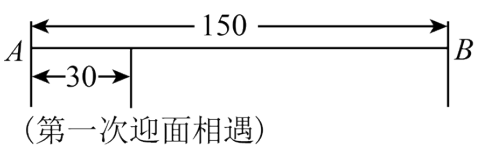


图1

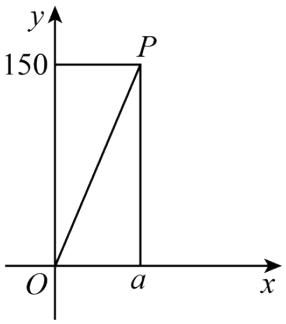


图2

(1)【观察】

①观察图 1，若这两个机器人第一次迎面相遇时，相遇地点与点 A 之间的距离为 30 个单位长度，则他们第二次迎面相遇时，相遇地点与点 A 之间的距离为_____个单位长度.

②若这两个机器人第一次迎面相遇时，相遇地点与点 A 之间的距离为 35 个单位长度，则他们第二

次迎面相遇时，相遇地点与点 A 之间的距离为_____个单位长度.

(2)【发现】设这两个机器人第一次迎面相遇时，相遇地点与点 A 之间的距离为 x 个单位长度，他们第二次迎面相遇时，相遇地点与点 A 之间的距离为 y 个单位长度，兴趣小组成员发现了 y 与 x 的函数关系，并画出了部分函数图像（线段 OP，不包括点 O，如图 2 所示）

①a=_____；

②分别求出各部分图像对应的函数解析式，并在图 2 中补全函数图像.

【答案】(1)①90；②105

(2)①50；② $y=\begin{cases}3x\left(0<x\le 50\right)\\-3x+300\left(50<x<75\right)\end{cases}$；图像见解析

【分析】（1）①设此时相遇点距点 A 为 m 个单位，根据题意列方程即可得到结论；②设此时相遇点距点 A 为 m 个单位，根据题意列方程即可得到结论；

（2）①当第二次相遇地点刚好在点 B 时，设出来两个机器人的速度，根据题意列出方程即可得到结论；②设机器人甲的速度为 v，则机器人乙的速度为 $\frac{150-x}{x}v$，根据题意列函数解析式即可得到结果.

（1）

解：①∵相遇地点与点 A 之间的距离为 30 个单位长度，

∴相遇地点与点 B 之间的距离为 150-30=120，

设机器人的甲的速度为 v，

∴机器人乙的速度为 $\frac{120}{30}v=4v$，

∴机器人甲从相遇点到点 B 所用的时间为 $\frac{120}{v}$，

机器人乙从相遇地点到点 A 再返回到点 B 所用时间为 $\frac{30+150}{4v}=\frac{45}{v}$，

而 $\frac{120}{v}>\frac{45}{v}$，

∴设机器人甲与机器人乙第二次相遇时，机器人乙从第一次相遇地点到点 A，返回到点 B，再返回向 A 时和机器人甲第二次迎面相遇，

设此时相遇点距点 A 为 m 个单位，

根据题意得，$30+150+150-m=4\left(m-30\right)$，

解得 m=90，

∴他们第二次迎面相遇时，相遇地点与点 A 之间的距离为 90 个单位长度；

②∵相遇地点与点 A 之间的距离为 35 个单位长度，

∴相遇地点与点 B 之间的距离为 150-35=115，

设机器人的甲的速度为 v，

∴机器人乙的速度为 $\frac{115}{35}v=\frac{23}{7}v$，

∴机器人甲从相遇点到点 B 所用的时间为 $\frac{115}{v}$，

机器人乙从相遇地点到点 A 再返回到点 B 所用时间为 $(35+150)\div\frac{23v}{7}=\frac{1295}{23v}$，

而 $\frac{115}{v}>\frac{1295}{23v}$，

∴设机器人甲与机器人乙第二次相遇时，机器人乙从第一次相遇地点到点 A，返回到点 B，再返回向 A 时和机器人甲第二次迎面相遇，

设此时相遇点距点 A 为 m 个单位，

根据题意得，$35+150+150-m=\frac{23}{7}(m-35)$，

解得 m=105，

∴他们第二次迎面相遇时，相遇地点与点 A 之间的距离为 105 个单位长度；

（2）

解：①当第二次相遇地点刚好在点 B 时，设机器人甲的速度为 v，则机器人乙的速度为 $\frac{150-x}{x}v$，

根据题意知，$x+150=\frac{150-x}{x}(150-x)$，

解得 x=50，

经检验：x=50 是分式方程的根，

即：a=50；

②当 $0<x\le 50$ 时，点 P(50，150)在线段 OP 上，

∴线段 OP 的表达式为 y=3x，

当 $v<\frac{150-x}{x}v$ 时，即当 $50<x<75$，此时，第二次相遇地点时机器人甲在到点 B 返回向点 A 时，

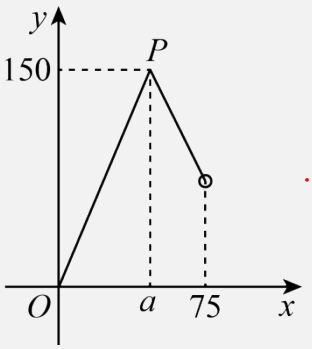
设机器人甲的速度为 v，则机器人乙的速度为 $\frac{150-x}{x}v$，

根据题意知，$x+y=\frac{150-x}{x}(150-x+150-y)$，

∴ $y=-3x+300$，

即函数解析式为$y=\begin{cases}3x(0<x\le 50)\\-3x+300(50<x<75)\end{cases}$，

函数图像如图：



【点睛】本题考查了一次函数的应用，两点间的距离，分式方程的应用，一元一次方程的应用，正确的理解题意是解题的关键.

5.（2022 秋·江苏·八年级期末）某兴趣小组利用计算机进行电子虫运动实验．如图 1，在相距 100 个单位长度的线段 AB 上，电子虫甲从端点 A 出发，匀速往返于端点 A、B 之间，电子虫乙同时从端点 B 出发，设定不低于甲的速度匀速往返于端点 B、A 之间．他们到达端点后立即转身折返，用时忽略不计．

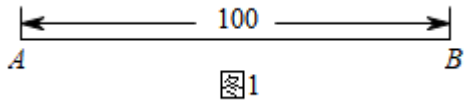


图1

兴趣小组成员重点探究了甲、乙迎面相遇的情况，这里的“迎面相遇”包括面对面相遇、在端点处相遇这两种．设甲、乙第一次迎面相遇时，相遇地点与点 A 之间的距离为 x 个单位长度，他们第二次迎面相遇时，相遇地点与点 A 之间的距离为 y 个单位长度．

(1)请直接写出：当 $x=20$ 时，y 的值为_____；当 $x=40$ 时，y 的值为_____；

(2)兴趣小组成员发现了 y 与 x 的函数关系，并画出了部分函数图像（如图 2 中的线段 OM，但不包括点 O，因此点 O 用空心画出）

①请直接写出：$a=$_____；

②分别求出各部分图像对应的函数解析式，并在图 2 中补全函数图像，标出关键点的坐标；

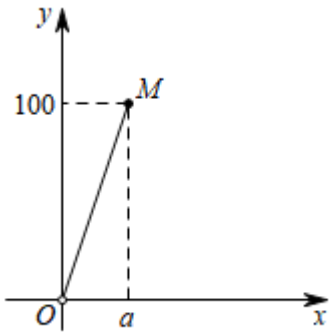


图2

(3)设甲、乙第一次迎面相遇时，相遇地点与点 A 之间的距离为 x 个单位长度，他们第三次迎面相遇时，相遇地点与点 A 之间的距离为 z 个单位长度．若 z 不超过 40，则 x 的取值范围是_____（直接写出结果）.

【答案】(1)60，80

(2)①$\frac{100}{3}$；②$y=\begin{cases}3x(0\le x\le\frac{100}{3})\\-3x+200(\frac{100}{3}<x\le 50)\end{cases}$，补全函数图像见解析，标出 N（50，50）

(3)0＜x≤8 或 32≤x≤48

【分析】（1）①根据题意可得相遇点与点 B 之间的距离为 80 个单位长度，设甲的速度为 v，乙的速度为 b，由所用时间相等得出 $b=4v$，求出甲从相遇点到 B 所用的时间为 $\frac{80}{v}$，乙从相遇点到点 A 再返回点 B 所用的时间为 $\frac{30}{v}$，根据题意列出方程求解即可得；

②解法与①方法类似，求解即可；

（2）①当第二次相遇点刚好在点 B 时，设甲的速度为 v，则乙的速度为：$\frac{100-x}{x}v$，根据题意得出方程求解可得；

②当 $0<x\le\frac{100}{3}$ 时，点 $M\left(\frac{100}{3},100\right)$ 在线段 OM 上，设直线的解析式为 $y=kx\left(k\ne 0\right)$，将点 M 代入可确定此段的函数解析式；当 $v<\frac{100-x}{x}v$ 时，$x\le 50$，即当 $\frac{100}{3}<x\le 50$ 时，此时第二次相遇点是甲在到点 B 返回向点 A 时，设设甲的速度为 v，则乙的速度为：$\frac{100-x}{x}v$，根据题意列出相应方程化简即可确定第二段函数解析式，然后描出特殊点，作出图象即可；

（3）甲乙第三次迎面相遇时，共有 3 种情况，结合图象进行分析，然后列出方程得出 z 与 x 的函数解析式，然后代入不等式求解即可得.

【详解】（1）解：①∵相遇点与点 A 相距 20 个单位长度，

∴相遇点与点 B 之间的距离为：$100-20=80$ 个单位长度，

设甲的速度为 v，乙的速度为 b，

则 $\frac{20}{v}=\frac{80}{b}$，

$\therefore b=4v$，

∴甲从相遇点到 B 所用的时间为：$\frac{80}{v}$，

乙从相遇点到点 A 再返回点 B 所用的时间为：$\frac{20+100}{4v}=\frac{30}{v}$，

$\because \frac{30}{v}<\frac{80}{v}$，

∴甲与乙第二次相遇时，乙从第一次相遇点到点 A，返回到点 B，再返回向 A 时与甲第二次相遇，

此时相遇点距离点 A 为 y 个单位长度，

根据题意可得：

$20+100+100-y=4(y-20)$，

解得：$y=60$；

②∵相遇点与点 A 相距 40 个单位长度，

∴相遇点与点 B 之间的距离为：$100-40=60$ 个单位长度，

设甲的速度为 v，乙的速度为 b，

则 $\frac{40}{v}=\frac{60}{b}$，

$\therefore b=\frac{3}{2}v$，

∴甲从相遇点到 B 所用的时间为：$\frac{60}{v}$，

乙从相遇点到点 A 所用的时间为：$\frac{40}{\frac{3}{2}v}=\frac{80}{3v}$，

乙从相遇点到点 A 再返回点 B 所用的时间为：$\frac{40+100}{\frac{3}{2}v}=\frac{280}{3v}$，

$\because \frac{80}{3v}<\frac{60}{v}<\frac{280}{3v}$，

∴甲从相遇点到 A，然后返回，乙从相遇点到 B，然后返回途中，第二次迎面相遇，设相遇点距离点 A 为 y 个单位长度，

根据题意可得：

$40+y=\frac{3}{2}(60+100-y)$，

解得：$y=80$；

故答案为：60；80；

（2）解：①结合图象可得：当第二次相遇点刚好在点 B 时，设甲的速度为 v，

则乙的速度为：$\frac{100-x}{x}v$，

根据题意可得：$x+100=\frac{100-x}{x}(100-x)$，

解得：$x=\frac{100}{3}$，

经检验：$x=\frac{100}{3}$ 是分式方程的解，

$\therefore a=\frac{100}{3}$，

故答案为：$\frac{100}{3}$；

②当 $0<x\leq\frac{100}{3}$ 时，点 $M\left(\frac{100}{3},100\right)$ 在线段 OM 上，

设直线的解析式为 $y=kx(k\neq0)$，将点 M 代入可得：

$100=\frac{100}{3}k$，

解得：$k=3$，

$\therefore$ 当 $0<x\leq\frac{100}{3}$ 时，$y=3x$；

当 $v<\frac{100-x}{x}v$ 时，$x\leq50$，

即当 $\frac{100}{3}<x\leq50$ 时，此时第二次相遇点是甲在到点 B 返回向点 A 时，

设设甲的速度为 v，则乙的速度为：$\frac{100-x}{x}v$，

根据题意可得：$x+y=\frac{100-x}{x}(100-x+100-y)$，

化简得：$y=-3x+200(\frac{100}{3}<x\leq50)$，

当 $x=50$ 时，$y=50$，

$\therefore$ 经过点 $(50,50)$，描点，连接即可得出函数图象，

综上可得：$y=\begin{cases}3x(0<x\leq\frac{100}{3})\\-3x+200(\frac{100}{3}<x\leq50)\end{cases}$，

函数图象如图所示：

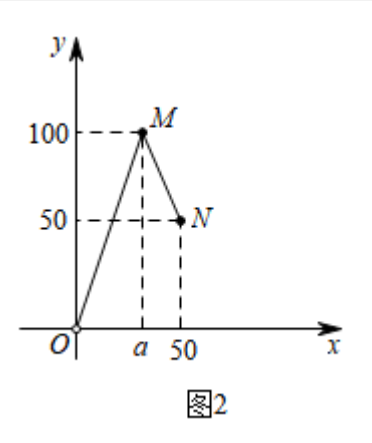
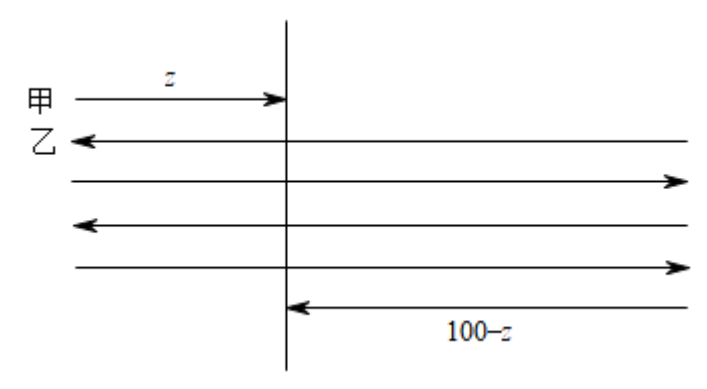


图2

（3）解：甲乙第三次迎面相遇时，共有 3 种情况：

①如图所示：



由题意可得：

$100\times 4+(100-z)=z\text{﹒}\dfrac{100-x}{x}$，

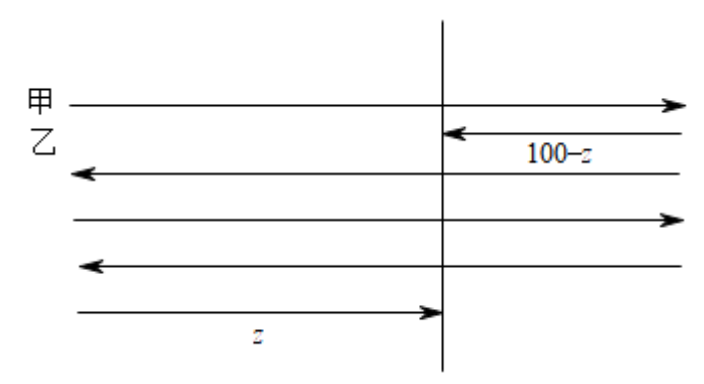
化简得：$z=5x$，

∵第三次迎面相遇时，相遇地点与点 A 之间的距离不超过 40 个单位长度，

$z\le 40$ 且 $x>0$，

解得：$0<x\le 8$；

②如图所示：



根据题意可得：$z+100\times3=\frac{100-x}{x}(100+100-z)$，

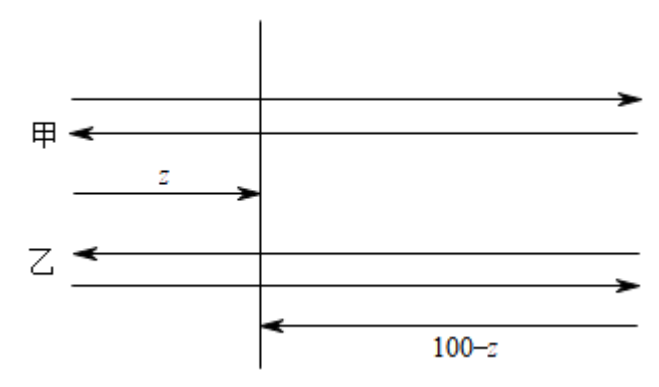
化简得：$z=-5x+200$，

$\because 0\le z\le 40$，

$\therefore 0\le -5x+200\le 40$，

解得：$32\le x\le 40$，

③如图所示：



根据题意可得：$100-z+100\times2=\frac{100-x}{x}(z+100\times2)$，

化简得：$z=5x-200$，

$\because 0\le z\le 40$，

$\therefore 0\le 5x-200\le 40$，

解得：$40\le x\le 48$，

综合①②③可得：相遇点与 A 点之间的距离 x 的取值范围为：$0<x\le 8$ 或 $32\le x\le 48$，

故答案为：$0<x\le 8$ 或 $32\le x\le 48$.

【点睛】题目主要考查一次函数、分式方程及不等式的应用，求解一次函数解析式，作函数图象等，理解题意，作出相应图形，列出方程及不等式是解题关键.

6.（2021 秋·河南信阳·八年级河南省淮滨县第一中学校考期末）“程，课程也，二物者二程，三物者三程，皆如物数程之，并列为行，故谓之方程”这是我国古代著名数学家刘徽在《九章算术》对方程一词给出的注释我们有如下两个约定：（Ⅰ）方程的整数解称之为“暖根”：（Ⅱ）若两个方程存在一个相同的解，则称这两个方程为“同源方程”.

（1）已知一元一次方程 $3x+2=2(x+2)-1$ ①与分式方程 $\frac{x+1}{x-1}-\frac{4}{x^2-1}=1$ ②：方程①有“暖根”吗？_填（有或没有）；方程②有“暖根”吗？_____填（有或没有）；它们是“同源方程”吗？_____填（是或不是）

（2）已知关于 x，y 二元一次方程：$y=4mx+6$ 和 $y=x+n$（其中 m，n 为常数）它们是“同源方程”

吗？如果是，请写出它们的公共解：如果不是，请说明理由；

（3）已知关于 x 的方程：$2x-k=kx-1$ 和 $\frac{1}{x+1}=\frac{k}{x}$（其中 k 为常数）分别都有“暖根”，求 k 的值．

【答案】（1）有；没有；不是；（2）当 $m=\frac{1}{4}$，n=6 时，有无数个公共解，公共解满足 $y=x+6$；当 $m\neq\frac{1}{4}$ 时，公共解为 $\begin{cases}x=\frac{n-6}{4m-1}\\ y=\frac{4mn-6}{4m-1}\end{cases}$；（3）k=$\frac{3}{2}$

【分析】（1）根据求出①②两个方程的解，然后根据“暖根”的定义和“同源方程”的定义即可得出结论；

（2）联立方程组，变形整理后对 m 的值分类讨论，分别求出方程的解即可；

（3）分别求出两个方程的解，然后由题意可得 $-1+\frac{1}{2-k}$ 和 $-1-\frac{1}{k-1}$ 都为整数，且 $-1-\frac{1}{k-1}$≠0 且 $-1-\frac{1}{k-1}$≠-1，设 $2-k=\frac{1}{n}$（n 为整数且 n≠0），根据方程的解为整数求出 n 的值，即可求出 k 的值．

【详解】解：（1）$3x+2=2(x+2)-1$

$3x+2=2x+4-1$

解得：$x=1$

∴方程①有“暖根”；

$\frac{x+1}{x-1}-\frac{4}{x^2-1}=1$

$x^2+2x+1-4=x^2-1$

解得：$x=1$

经检验，$x=1$ 是增根，原方程无解，

∴方程②没有“暖根”；

根据“同源方程”的定义，它们不是“同源方程”

故答案为：有；没有；不是；

（2）是，

联立 $\begin{cases}y=4mx+6①\\ y=x+n②\end{cases}$

①－②，得 $0=(4m-1)x+6-n$

整理，得 $(4m-1)x=n-6$

当 $4m-1$=0 且 $n-6$=0 时，方程有无数个解

即 $m=\frac{1}{4}$，n=6 时，有无数个公共解，公共解满足 $y=x+6$；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/628057027110006112