《高等流体力学》复习题

一、基本概念

1．什么是流体，什么是流体质点？

答：在任何微小剪切应力作用下，都会发生连续不断变形的物质称为流体。

宏观无限小，微观无限大，由大量流体分子组成，能够反映流体运动状态的集合称为流体质点。

2. 什么事连续介质模型？在流体力学中为什么要建立连续介质这一理论模型？

答：认为流体内的每一点都被确定的流体质点所占据，其中并无间隙，于是流体的任一参数（密度、压力、速度等）都可表示为空间坐标和时间的连续函数 (x,y,z,t)，而且是连续可微函数，这就是流体连续介质假说，即流体连续介质模型。

建立“连续介质”模型，是对流体物质结构的简化，使在分析流体问题得到两大方便：

第一、 可以不考虑流体复杂的微观粒子运动，只考虑在外力作用下的微观运动；

第二、 能用数学分析的连续函数工具。

3．给出流体压缩性系数和膨胀性系数的定义及表达式。

答：压缩性系数：单位体积的相对减小所需的压强增值。

$$(d\quad/\quad)/d$$

膨胀性系数：在一定压强下，单位温度升高所引起的液体体积的相对增加值。

$$a_v \quad (dV/V)dT \quad (d\quad/\quad)/dT$$

4．什么是理想流体，正压流体，不可压缩流体？

答：当流体物质的粘度较小，同时其内部运动的相对速度也不大，所产生的粘性应力比起其它类型的力来说可以忽略不计时，可把流体近似地看为是无粘性的，这样无粘性的流体称为理想流体。

内部任一点的压力只是密度的函数的流体，称为正压流体。

流体的体积或密度的相对变化量很小时，一般可以看成是不可压缩的，这种流体就被称为不可压缩流体。

5．什么是定常场；均匀场；并用数学形式表达。

答：如果一个场不随时间的变化而变化，则这个场就被称为定常场。

其数学表达式为：$(\vec{r})$

如果一个场不随空间的变化而变化，即场中不显含空间坐标变量 $\vec{r}$，则这个场就被称为均匀场。其数学表达式为：(t)

6．分别用数学表达式给出拉格朗日法和欧拉法的流体加速度表达式。

答：拉格朗日法：$a_x \quad \frac{u_x}{t} \quad a_y \quad \frac{u_y}{t} \quad a_z \quad \frac{u_z}{t}$ （点）

欧拉法：$\vec{a} \quad \frac{d\vec{u}}{dt} \quad \frac{\vec{u}}{t} \quad (\vec{u}\quad)\vec{u}$ （场）

7:理想流体运动时有无切应力？粘性流体静止时有无切应力？静止时无切应力是否无年限？为什么？

答：理想流体运动时无切应力;粘性流体静止时无切应力。但是，静止时无切应力，而有粘性，因为粘性是流体的固有特性。

8 流体有势运动指的是什么？什么是速度势函数？无旋运动与有势运动有何关系？

[答]：

如果流体运动是无旋的，则称此流体运动为有势运动。

对于无旋流动来说，其速度场 总可以由某个速度标量函数（场） 的速度梯度来表示，即 ，则这个标量函数（场） 称为速度场 的速度势函数。

无旋运动与有势运动的关系：

势流运动与无旋运动是等价的，即有势运动是无旋的，无旋运动的速度场等同于某个势函数的梯度场。

9:什么是流函数？存在流函数的流体具有哪些条件（性质）？

答：

1:由平面不可压缩流体的连续性知： 即 =0，即 + =0,我们设法找出这样一个可微的标量函数 （x，y，t)，使得 = ，Uy=- .这时我们称标量函数 （x，y，t）为不可压缩流动(Uy）的流函数。

2：流函数的性质：①流函数 加减一个常数 C，所描述的流动相同

②流函数 的等值线 =c 是流线，即是说其切线与其流动方向一致，事实上，在 =c 上有 d dx+ dy=-Uydx+Uxdy=0 于是有 = ，可见，等值线的切线方向与速度方向一致，即为流线

③在平面上，任意 2 点 M 和 M0 间任意连线上的速度通量仅与流函数 在这 2 点值的差有关，即 Q= Uydx+Uxdy）= dx+ dy）= =

④：在单连通域上的不可压缩流体过其上任意封闭曲线 L 上的通量为零，并且相应的流函数在其上单值；过任意 2 点间连线上的速度通量与这 2 点的连线的路径无关；而在多连通域上，过任意封闭曲线的速度通量则科恩那个不为零，流函数 也可能是多值的。

10：半面流动中用复变位势描述的流体具有哪些条件（性质）？

答：复位势 W （z）相差一个常数 C，所描述的平面流动不变。

复位势 W （z）的等值线族 W （z）=C 为等势线族 =c 和等流线族 =c。它们在复平面上组成相互正交的曲线网。

共轭附属度 = 在复平面上的沿 Zo 到 Z 这 2 点间任意曲线上的复积分为

Γ+iQ

的实部为 Z0 到 Z 这 2 点间曲线上的速度环量，虚部为 Z0 到 Z 这两点间曲线上的速度通量或流量。

在单连通域上复位势 w （z）是单值的，在复连通域上 w （z）可能多值。

对于不可压缩流体的平面无旋运动，其势函数 和流函数 都应该满足 Laplace方程，即 =0，=0.

11:什么是第一粘性系数和第二粘性系数？在什么条件下可以不考虑第二粘性系数？Stokes 假设的基本事实依据是什么？

[答]：

第一粘性系数μ：反映了剪切变形对应力张量的贡献，因此称为剪切变形粘性系数；

第二粘性系数μ’：反映了体变形对应力张量的贡献，因而称为体变形粘性系数。

对于不可压缩流体，可不考虑第二粘性系数。

Stokes假设的基本事实依据：平均法向正应力 就是压力函数的负值，即体变形粘性系数 。

12 作用在流体微团上的力分为哪两种？表面应力 τ_{ij} 的两个下标分别表示？ τ_{ij} 的正负如何规定？

答：作用在流体微团上的力分为体力和面力。τ_{ij}两下标：第一个字母表示应力所在面的外法线方向，第二个字母表示应力分量的方向。τ_{ij}正负：应力分量在作用面法线方向的分量称为正应力。

13 从分子运动学观点看流体与固体比较有什么不同？

答：⑴若物质分子的平均动能远小于其结合能，即：$1/2mv^2 \ll \Delta E$，这时物质分子间所形成的对偶结构十分稳定，分子间的运动被严格地限定在很小的范围内，物质的分子只能在自己的平衡位置周围运动。这时物质表现为固态。

⑵若物质分子的平均动能远大于其结合能，即：$1/2mv^2 \gg \Delta E$，物质分子间几乎不能形成任何对偶结构，这时候，物质表现为气态。

⑶若物质分子的平均动能与其结合能大致相等，即：$1/2mv^2 \approx \Delta E$，其分子间的对偶结构不断的遭到破坏，又不断地形成新的对偶结构。这时，物质分子间不能形成固定的稳定的对偶结构，而表现出没有固定明确形状的也液态。

14 试述流体运动的 Helmhottz 速度分解定律并给出其表达式。

答：流体微团一点的速度可分解为平均速度分量与转动运动分量和变形运动分量之和，这称为流体微团的 Helmhottz速度分解定律。

表达式：$V \quad V_0 \quad \omega \quad \delta r \quad S \bullet \delta r$

15 流体微团有哪些运动形式？它们的数学表达式是什么？

答：$V \quad V_0 \quad \omega \quad \delta r \quad S \bullet \delta r$。⑴平均运动：$V \quad V_0$

⑵转动运动：$\omega \quad \delta r$；$\omega \quad \frac{1}{2} r_0 \quad V$ ⑶变形运动：$S \bullet \quad r$

16 什么是随体导数（加速度）、局部导数（加速度）及位变导数（加速度）？

答：随机导数：流体质点在其运动过程中的加速度所对应的微商。

局部导数：流体位置不变时的加速度所对应的微商。

位变导数：质点位移所造成的加速度所对应的微商。

17 什么是流体的速度梯度张量？试述其对称和反对称张量的物理意义。

答：⑴对流体微团 M，其中 r_0 处的速度为 V_0，那么 r 处的速度可以表示为 $V \quad V_0 \quad \frac{V}{x_j} \delta x_j$

或者 $U_i \quad U_{0i} \quad \frac{u_i}{x_j} \delta x_j$ 即 $V \quad V_0 \quad \delta r(\ V)$，这里，$\frac{u_i}{x_j} \quad V$ 为二阶张量，它是速度的梯度，因此，称之为速度梯度张量。

⑵速度梯度张量可以分解为对称和反对称部分，即 $V \quad \frac{u_i}{x_j} \quad A \quad S$

反对称张量的物理意义：A 表征流体微团旋转运动，所对应的矢量 ω 为流体微团的角速度矢量。

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{v}{x}-\frac{u}{y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{x}-\frac{u}{z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{v}{x}-\frac{u}{y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{y}-\frac{v}{z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{x}-\frac{u}{z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{y}-\frac{v}{z}\right) & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\varepsilon_{ijk}\omega_k$$

$$\omega \quad \omega_1 e_x \quad \omega_2 e_y \quad \omega_3 e_z \quad \frac{1}{2} r_0 tv$$

对称张量的物理意义：S 表征了流体微团的变形运动，其中，对角线上的元素（$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$）表示了流体微团在 3 个坐标轴上的体变形分量，而三角元素（$\frac{1}{2}\theta_1$，$\frac{1}{2}\theta_2$，$\frac{1}{2}\theta_3$）表示了流体单元微团在 3 个坐标平面上的角变形分量的一半。

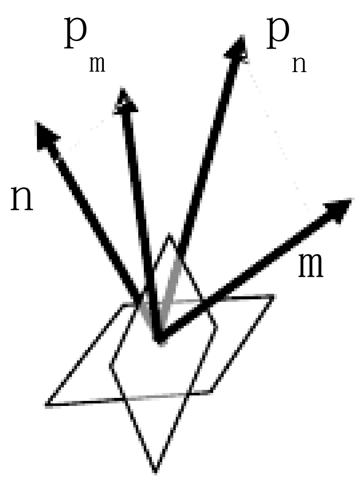
$$S=\begin{pmatrix} \frac{u}{x} & \frac{1}{2}\left(\frac{v}{x}+\frac{u}{y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{x}+\frac{u}{z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{v}{x}+\frac{u}{y}\right) & \frac{v}{y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{y}+\frac{v}{z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{x}+\frac{u}{z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{y}+\frac{v}{z}\right) & \frac{\omega}{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\theta_3 & \frac{1}{2}\theta_2 \\ \frac{1}{2}\theta_3 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\theta_1 \\ \frac{1}{2}\theta_2 & \frac{1}{2}\theta_1 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

18. 某平面上的应力与应力张量有什么关系？p_{mn} p_{nm} 的物理含义是什么？

[答]：教材 P71

应力 $\vec{p}_n$ 与应力张量 P 的关系：$\vec{p}_n \quad \vec{n} \; p_{ij} \quad \vec{n} \; P$ ，即：空间某点处任意平面上的应力等于这点处的应力张量与该平面法向单位矢量的左向内积。

p_{mn} p_{nm} 的物理意义：



$$p_{nm} \quad (n\;P)\;m \quad p_n\;m \quad n_i p_{ij} m_j \quad n_i p_{ji} m_j \quad m_j p_{ji} n_i$$

$$(m\;P)\;n \quad p_m\;n \quad p_{mn}$$

应力张量的对称性，使得在以 n 为法线的平面上的应力 p_n 在 m 方向上的投影等于（=）在以 m 为法线的平面上的应力 p_m 在 n 方向上的投影。

19. 什么是广义的牛顿流体和非牛顿流体？

[答]：教材 P86-87

牛顿内摩擦定律：流体微团的运动变形的的大小与其上所受的应力存在线性关系。

遵从或近似遵从牛顿内摩擦定律的一类流体称为牛顿流体。不遵从牛顿内摩擦定律的流

体称为非牛顿流体。

广义牛顿内摩擦定律：偏应力张量的各分量与速度梯度张量的各分量间存在线性关系。

遵从或近似遵从广义牛顿内摩擦定律的一类流体称为广义牛顿流体。

20. 粘性流动和理想流动的壁面边界条件有何不同？

[答]：粘性流动壁面边界条件 $V_n = 0$， $V_\tau \neq 0$

理想流动壁面边界条件 $V_n = 0$， $V_\tau = 0$

21. 在理想有势的流动假设条件下，绕流物体产生的升力主要受那些因素的影响，有何规律？

[答]：教材 P141

影响升力的主要因素：环量 Γ，来流速度 V_∞， 密度 ρ。 $R_y = \rho V_\infty \Gamma$

升力的大小准确地与环量 Γ成正比，与来流速度 V_∞ 及密度 ρ成正比，其方向为在来流速度方向上按逆环量方向旋转 90°。

22. 什么是层流运动、湍流运动、雷诺数和临界雷诺数？

[答]：层流流动是平稳有规律的流动状态，流体介质各部分之间分层流动，互不掺混，流体内部的微团具有连续而平滑的迹线，流场中各种有关物理量（参数）的变化较为缓慢，表现出明显的连续性和平稳性。

湍流流动是极不规则的流动形态，流体介质各部分之间，各层之间有着剧烈的掺混，其流体内部微团的运动迹线很不规则，杂乱无章，表征流体运动状态的各种物理量也表现出不同程度的跃变和随机性。

雷诺数：流体运动中，惯性力与粘性力的无量纲比值 $Re = \frac{\rho vd}{\mu} = \frac{vd}{\nu}$

下临界雷诺数：从湍流状态到层流状态的转折点；

上临界雷诺数：从层流状态到湍流状态的转折点。

23. 圆管中定常不可压层流和湍流运动的速度分布规律是什么？

[答]：层流：$u = \frac{p_0 - p_1}{4\mu l}(R^2 - r^2)$ （1） 定常流动的速度沿径向的分布规律，由式（1）可以看出，流动截面上的速度分布是一抛物回转面。

湍流：光滑圆管中的速度分布：$\frac{u}{U_*} = 5.756\lg(\frac{yU_*}{\nu}) + 5.394$

粗糙圆管中的速度分布与光滑圆管中的速度分布相同，只是改变方程的常数。

24. 流动相似的条件是什么？简述 定理的内容。

答：教材 P178-179

如果2个不稳定流动系统的均时性准数Ho 相等，则其速度场随时间的变化率是相似的。

$H_o \quad \frac{ut}{l} \quad \frac{t}{l/u}$ 不变量

如果 2 个不稳定流动系统的傅鲁德准数 Fr 相等，则对应的流体质点的压力势能和动能相似，相应的重力和惯性力也存在相似关系。$F_r \quad \frac{gl}{u^2} \quad \frac{gl}{u^2}$ 不变量

如果 2 个流动系统的欧拉维数 Eu 相等，则相应的压力场相似，相应的惯性力场也存在相似关系。$E_u \quad \frac{p}{u^2}$ 不变量

如果 2 个流动系统的雷诺维数 Re 相等，则相应的速度场（或速度分布）是相似的。

$R_e \quad \frac{ul}{\quad} \quad \frac{ul}{\quad}$ 不变量

定理：描述其物理过程的各物理量之间的关系可表示为相应的相似准数 $_1$，$_2$，，$_n$之间的函数关系：S $_1$，$_2$，，$_n$ 0。此关系式称为准则关系式或准则方程式。

25. 流体的阻力可分为哪几种？管路中因阻力引起的损失通常分为哪几种？影响管路损失系数的主要因素有哪些？

答：粘性时产生阻力的根本原因，依据阻力产生的不同机理，可分为：摩擦阻力和压差阻力。

管路中的阻力通常分为：沿程阻力（即摩擦阻力）和局部阻力。

影响管路损失系数的主要因素有流体的粘度、流速、管道的内径以及管壁粗糙度等。

26. 怎样判断流动是否有旋，涡度与速度环量有何关系，流动是否有旋与流体质点的运动轨迹有关吗？

答：（1）看流体微团的旋转角速度是否等于零，旋转角速度不等于零的流动为有旋流动，旋转角速度等于零的流动为无旋流动。

（2）涡通量又称涡旋强度，由斯托克斯定理，在涡量场中，沿任意封闭周线的速度环量等于通过该周线所张曲面的涡通量。

（3）有旋流动和无旋流动仅由流体微团本身是否旋转来确定，与它的运动轨迹无关。

27. 试说明粘性流体流动的三个基本特征，它们与理想流体运动相比有何不同？

答：教材 P170-174

三个特征：（1）粘性运动的有旋性：粘性流体运动时，有旋是绝对的，粘性流体的无旋运动是不存在的。

（2）运动过程中有能量的损耗性：在粘性流动中永远伴随着机械能的损耗。这部分能量转换成热能形式传递给流体介质及相邻的固壁，使其温度升高而耗散。

（3）粘性涡旋运动的扩散性：在粘性流体中，涡旋强的地方要向涡旋弱的地方传送涡量，直至涡量相等为止。

与理想流体运动不同点：（1）粘性流体运动时，有旋是绝对的，几乎不存在粘性流体的无旋运动。而对于理想流体，当体力有势、流体正压时，理想流体的运动将遵从涡旋保持定律，即如果有旋将永远有旋，涡管保持为涡管，涡线保持为涡线。理想流体的运动如果无旋则将永远无旋。

（2）在粘性流动中，永远伴随着机械能的损耗。而理想流体运动时，则没有机械能的损耗。

（3）对于理想正压流体，当外力有势时，沿任意一封闭物质线上的速度环量以及过任意物质面上的涡通量在运动过程中保持不变；而在粘性流动中，涡旋强的地方要向涡旋弱的地方传送涡量，直至涡量相等为止。

28. 螺旋流、偶极子流和绕圆柱体有环流动分别是由哪些基本势流叠加而成？

答：螺旋流是由汇流和势涡叠加而成的；偶极子流是由源流和汇流叠加而成的；绕圆柱体有环流动是有均匀等速流、偶极子流和纯环流叠加而成的。

29. 试说明层流边界层和湍流边界层的速度分布特征。

答：层流边界层：层流边界层内的速度分布呈线性分布规律；

湍流边界层：分为层流底层和湍流核心区。层流底层内的速度分布呈线性分布，湍流核心区速度分布呈对数分布规律。

30. 试述平板湍流边界层的结构及其速度分布特征。

答：平板湍流边界层分为粘性底层和湍流核心区。

粘性底层内的速度分布是呈线性分布的，

湍流核心区的速度分布是呈对数分布规律。

31.边界层理论的基本思想是什么？平板不可呀定常层流边界层的厚度主要受哪些因素的影响？

大雷诺数流动可分成 2 个区域：一个是壁面附近很薄的流体层区域称为边界层；边界层内流体粘性作用即为重要不可忽略；另一个是边界层以外的区域，称为外流区，该区域内的流动可看成是理想流体的流动。

影响因素：将流体速度从 u=0 到 u=0.99uo的流体层厚度为边界层厚度。

$c\sqrt{\frac{rx}{u_0}}$，r 流体运动粘度，uo 来流速度，沿流动方向 x 板长。

32 边界层分离的概念和原因是什么？分离点处的流动特征是什么？

当流体绕弯曲壁面流动时，边界层内伴随产生的压差会使边界层从某一位置开始脱离物体表面，在壁面附近出现回流，这种现象叫做边界层分离现象或脱离现象。

原因：1.流体具有粘性 2.在物面上的压力分不存在逆压区

在分离点处物面外流体质点速度为 0，$\frac{u}{y}\ \ 0$

33. 以圆柱绕流为例，简述卡门涡街现象，并对涡街引发圆柱振动作简要说明。

中等雷诺数下的绕流 Re= $\frac{u_0 p}{v}$

当 80~90<Re<150 时，边界层分离点仍在圆柱体的背流面且在圆柱体背流面出现稳定的，非对称的，排列有规则的，旋转方向相反的，交替从物体脱落的漩涡，形成两行排列整齐的向下游运动的涡列，通常称为卡门涡街。

除了存在摩擦阻力和压差阻力外，交替脱落的旋涡背会在圆柱上的产生横向交变化作用力，迫使柱体振动，称为诱导振动。当诱导振动与物体的固有频率一致时，将会引起有破坏性的共振，这时物体的阻力以差压阻力为主。

34. 简述卡门涡街流量计测量流量的基本原理。

35. 简述湍流的特点，湍流模型的概念和主要分类。

湍流特点：湍流是一种不规则的运动，当流体绕过固体表面或当相邻的同类流体互相流过或绕过时，一般会在流体中出现这种不规则的运动。湍流有旋性，使得各流层的流体发生强烈的混掺。扩散性，耗散性。

湍流模型的概念：把湍流分解为平均运动与脉动运动，湍流的物理量可以表示时均值与脉动值之和。

稳态湍流：时均速度 u 稳定的湍流。

非稳态湍流：时均速度 u 随时间变化的湍流。

壁湍流：固壁附近的湍流运动。

自由湍流：不同速度流层间的湍流运动。

36. 什么是壁面函数?-引入避免函数的意义何在？

壁面函数是处理近壁区湍流的一种工程方法。常用的一种壁面函数是以混合长度模型为基础的,求出壁面应力后采用雷诺比拟求壁面热流。

壁面函数的基本思想是：对于湍流核心区的流动使用 k 模型求解，而在壁面区不进行求解，直接使用半经验公式将壁面上的物理量与湍流核心区内的求解变量联系起来。这样，不需要对壁面区内的流动进行求解，就可直接得到与壁面相邻控制体积的节点变量值。

主要目的是简化田间，方便处理此现象的问题
壁面函数的引入,为工程上准确预测飞行器在湍流流动中表面受力与气动热提供了保障。

37.粘性流动的动能方程

$$\frac{D}{dt}\frac{V^2}{2} \qquad \vec{f}\ \vec{V} \qquad \vec{T}\ \vec{V} \qquad p\vec{V} \qquad p \quad \vec{V} \quad \vec{T}:\vec{\vec{}}$$

中右边5项的物理意义依次为？

答：左端是单位质量流体动能的物质导数，表示流体微团单位质量的动能随时间的变化率；
右边第一项是单位时间内彻体力对单位质量所做的功；
第二项是单位时间内粘性力对运动着单位质量流体所输运的机械能；
第三项是单位时间内压力对单位质量的流体所做的功，即流动功；
第四项是单位时间的膨胀功；
第五项是单位时间内粘性力所做的变形功。

38.在流场中出现扰动时，亚超音速气流和超音速气流的流动状态有何本质上的区别？

答：如果在流场中，某处出现一个压力扰动，使该处的流体压强高于周围流体的压强，则这个扰动就以页面的形式在可压缩流体中传播开来，微弱压力扰动波可在压缩流体中的传播速度称为声速，记作C，某处的气流速度U 与该处的声速C 的比值，U/C 称为马赫数，记作 Ma 。

当 Ma<1 时的气流称为亚声速气流，此时速度随断面的增大而减慢，随断面的减小而加快；

当 Ma>1 时的气流称为超声速气流，此时速度随断面的增大而加快，随断面的减小而减慢；

当 U<C 时，微弱压力扰动以速度 C-U 向上游传播，以速度 C+U 向下游传播

当 U>C 时，微弱压力扰动只能传播到马赫锥面的内侧，此扰动不能传播到扰动源上游，也不能传播到马赫锥的外部。

39.什么是压气机的喘振现象，喘振和旋转失速有何关系？

答：压气机喘振是指气流沿压气机轴线方向发生的低频率、高振幅的气流振荡现象。
通道中逆压梯度下叶片吸力面发生失速,特别是叶片尖部的失速是导致压气机喘振的主要因素;

40.什么是激波，激波在什么条件下才会出现，激波通常分为哪三种？

答：激波---气体、液体和固体介质中应力(或压强)、密度和温度在波阵面上发生突跃变化的压缩波，又称冲击波。
条件：激波发生在超声速气流的压缩过程中。
正激波---波面与波的运动方向或气流方向垂直的激波称为正激波；
斜激波---面与波的运动方向或气流方向倾斜的激波称为斜激波；
离体激波---那种不依附于物体的激波称为离体激波，或者脱体激波。

二、推到及证明

1.根据质量守恒定律推导连续方程。

证明：

在体元素 中，若流体介质的密度为 ，那么其质量就为 m = ，于是有限体积分 中的质量m 为m= 。

根据质量守恒定律的物理含义：体积分　中的质量 m 在其运动过程中保持不变，即：

$$\frac{dm}{dt} \quad \frac{d}{dt}(\qquad) \quad 0$$

又因为

$$\frac{d}{dt}(\qquad) \quad (\frac{d}{dt} \qquad \frac{d}{dt} \quad)$$【注：就是将积分号与微分号互换】

且 $\frac{d}{dt} \qquad \bullet V$ 【注：记住就可以了】代入上式得：

$$(\frac{d}{dt} \qquad \bullet V) \quad 0$$ 或者写成 $$(\frac{}{t} \qquad \bullet \ V) \quad 0$$

所以当被积函数为零可直接得到微分形式的连续性方程：

$$\frac{d}{dt} \qquad \bullet \vec{V} \ 0$$ 或 $$\frac{}{t} \qquad \bullet (\ V) \quad 0$$

2.根据动量定律推导出微分形式的动量方程

证明：

封闭曲面 $\vec{S}$ 所围成的体积　中流体的动量积分为：　V

该物质体　上所受的外力为质量力和面力：　$F \qquad p_n \ S(\ n \bullet P \ S)$

由动量定理可得：某物质体的动量变化等于该物体所受外力之和。

所以：

$$\frac{d}{dt}(\ V \ ) \qquad F \qquad \oint_S p_n \ S \qquad F \qquad \oint_S (\ n \bullet P \ S)$$

对左边进行处理

$$\frac{d}{dt}(\ \vec{V} \ ) \quad \frac{d}{dt}(\ V) \qquad V \frac{d}{dt} \qquad (V \frac{d}{dt} \quad \frac{dV}{dt}) \qquad V(\ \bullet V)$$

$$\frac{dV}{dt} \qquad V(\frac{d}{dt} \qquad \bullet V)$$

因为 $\frac{d}{dt} \qquad \bullet V$ =0，所以上式第二项为 0.所以：

$$\frac{d}{dt}(\ V \ ) \qquad \frac{dV}{dt} = F \qquad \oint_S p_n \ S \qquad F \qquad \oint_S (\ n \bullet P \ S)$$

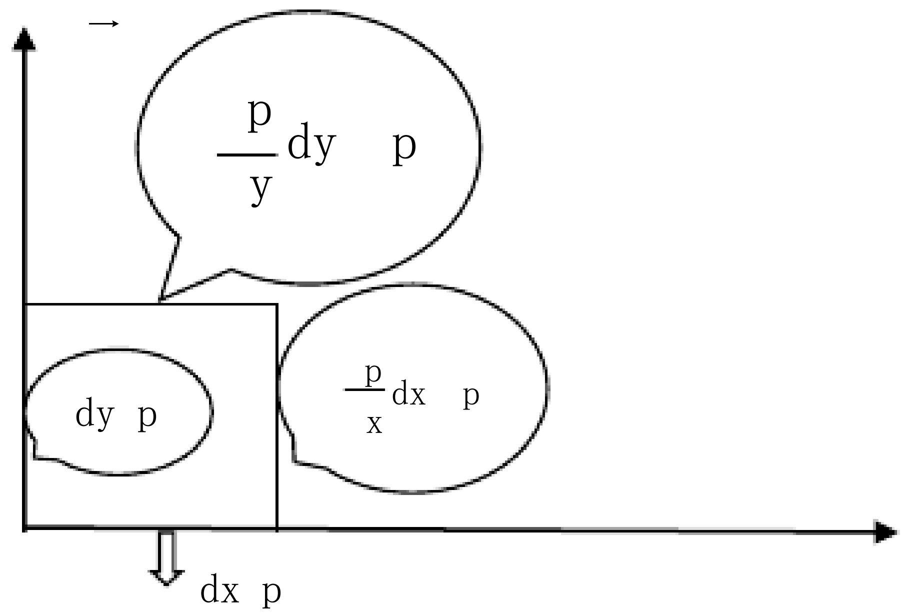
再由奥高公式【面积分转为体积分】：　$\oint_S n \bullet P \ S \qquad \bullet P$

所以 $$\frac{dV}{dt} \qquad F \qquad \bullet P$$

微分形式的动量方程为

$$\frac{dV}{dt} \quad F \quad \bullet P$$

3. 试推导理想流体平面二维运动的欧拉微分方程。



x 方向的合力：$(\frac{p}{x}dx \quad p)dy \quad pdy$

y 方向的合力：$(\frac{p}{y}dy \quad p)dx \quad pdx$

质　量　力：$f_x \quad dxdy$ 和 $f_y \quad dxdy$

由牛顿第二定律：x 方向 $\frac{p}{x}dxdy + f_x \quad dxdy = \frac{du}{dt}dxdy$

即　　　　　：$\frac{p}{x} \quad f_x \quad \frac{du}{dt}$

同理 y 方向：$\frac{p}{y} \quad f_y \quad \frac{dv}{dt}$

$$f \quad \frac{1}{} \quad p \quad \frac{dV}{dt}$$

4. 从N-S 方程出发，试推导Bernoulli 公式 $z \quad \frac{p}{g} \quad \frac{V^2}{2g} \quad C(\ )$，其中　表示流线。

证明：由N-S 方程：

$$\frac{dV}{dt} \quad F \quad \frac{1}{} \quad p \quad 2[\quad \bullet S \quad \frac{1}{3} \quad (\quad \bullet V)]$$【背吧】

又因为 $\frac{dV}{dt} \quad \frac{V}{t} \quad V \bullet V = \frac{V}{t} \quad (\frac{V^2}{2}) \quad V$ 【背吧】

所以

$$F \quad \frac{1}{} \quad p \quad 2 [\quad \bullet S \quad \frac{1}{3} \quad (\quad \bullet V)] \quad \frac{V}{t} \quad (\frac{V^2}{2}) \quad V$$

在理想流体下， =0，上式变为：

$$\vec{F} \quad \frac{1}{} \quad p \quad \frac{V}{t} \quad (\frac{\vec{V}^2}{2}) \quad \vec{V}$$

上式如果满足：外部质量力有势：$\vec{F}$ G；流体正压： $\frac{1}{}$ p；定常流动：$\frac{V}{t}$ 0；

则可继续化为：

$$(\quad G \quad \frac{V^2}{2}) \quad V \quad 0$$

设 s 为流场的某条流线，e_s 为该流线的切向单位矢量。以 e_s 对方程两边做数量积，

$$\vec{e}_s \bullet \quad (\quad G \quad \frac{V^2}{2}) \quad \vec{e}_s \bullet (\quad V) \quad 0$$

因为 $\vec{e}_s$ /$\vec{V}$，所以 $\vec{e}_s \bullet (\quad V)$=0。

所以 $\quad G \quad \frac{V^2}{2} = C(\ )$

在重力作用下，G=gz，不可压缩流体 =常数，Bernoul积分变为：

$$z \quad \frac{p}{g} \quad \frac{V^2}{2g} \quad C(\ )$$

5. 试利用 N-S 方程证明不可压平面层流的流函数 （x,y）满足：

$$^2\frac{}{t} \quad \frac{}{y} \quad ^2\frac{}{x} \quad \frac{}{x} \quad ^2\frac{}{y} \quad — \quad ^2(\quad ^2 \quad) \quad \text{其中：}$$

$$^2 \quad ^2 \quad \frac{^4}{x^4} \quad 2\frac{^4}{x^2 y^2} \quad \frac{^4}{y^4}$$

[证明]：粘性不可压缩流体涡旋运动方程：

$$\frac{d}{dt} \quad (\quad)V \qquad \frac{d}{dt}$$

$$\frac{}{t} \quad u\frac{}{x} \quad v\frac{}{y}$$

考虑流函数 $u \frac{}{y}$ $v \frac{}{x}$

旋度计算式 $\frac{v}{x} \frac{u}{y}$ ^{2}

$\frac{}{t}$ $u\frac{}{x}$ $v\frac{}{y}$ $\frac{}{t}$ ^{2} $\frac{}{y}\frac{}{x}(\ ^2\ )$ $\frac{}{x}\frac{}{y}(\ ^2\ )$ $(\ ^2\ )$

两边取负号

$^2\frac{}{t}$ $\frac{}{y}$ $^2\frac{}{x}$ $\frac{}{x}$ $^2\frac{}{y}$ $-$ $^2(\ ^2\ )$

6. 进行圆管中流体摩擦试验时，发现圆管中沿轴向的压降 p 是流速 u、密度 、粘性系数 、管长 l、管内径 d 及管壁粗糙度 k $\frac{h}{d}$ 的函数，而且 p 与 l 成正比。试用因次分析方法证明 $p \ \frac{l}{d}\frac{1}{2} u^2$，其中 k,Re 为无因次系数。

[证明]：由题意可假设存在关系 $p \ (k,Re)\, l^1 d \ u$ （1）

相应各量的量纲（因次）为： $p \ \frac{[M]}{[L][T]^2}$ $[d]\ [L]$ $[\ ]\ \frac{M}{L^3}$

$[u]\ \frac{L}{T}$

式（1）对应量纲的协调条件为：$[M]^1[L]^{-1}[T]^{-2}$ $[M]^{\beta}[L]^{1\ \alpha\ 3\beta\ \gamma}[T]^{\gamma}$

于是，对于 M 量纲，有： 1

T 量纲，有： 2 2

L 量纲，有： 1 3 1 1

将： 1 1 2 带入（1）式，得： $p \ \frac{l}{d}\frac{1}{2} u^2$

此题得证。

7. 从不可压流动的 N-S 方程出发，推导出平板定常不可压二维层流的 Prantl 边界层方程

$$\frac{u}{x} \quad \frac{v}{y} \quad 0$$

N-S 方程：

$$\frac{u}{t} \quad u\frac{u}{x} \quad v\frac{u}{y} \qquad \frac{1}{}\frac{p}{x} \qquad (\frac{{}^2u}{x^2} \quad \frac{{}^2u}{{}^2y})$$

$$\frac{v}{t} \quad u\frac{v}{x} \quad v\frac{v}{y} \qquad \frac{1}{}\frac{p}{y} \qquad (\frac{{}^2v}{x^2} \quad \frac{{}^2v}{{}^2y})$$

根据边界层流动特点，对方程各项数量级的大小进行详细分析，可化简 N-S 方程

选择来流速度 u_0 作为速度比较基准，x 可作为长度比较基准，并取 u_0 和 x 的数量级为 1，用符号 o(1)表示，因为 δ/x<<1 所以 δ 的数量级 o(δ) <<o(1)

定义 u_0～o(1), x～o(1)因为 0<y<δ，0<u<u_0 所以 y 和 u 的数量级为：y～o(δ)，u～o(1)

由此可得 u 各阶导数的数量级为

$$\frac{u}{x}\sim o(1) \quad \frac{{}^2u}{x_2}\sim o(1) \quad \frac{u}{y}\sim o(\frac{1}{}) \quad \frac{{}^2u}{y_2}\sim o(\frac{1}{2})$$

由连续方程 $\frac{v}{y} \qquad \frac{u}{x}$～o(1)而 y～o(δ)所以 v～o(δ)

所以 v 各阶导数的数量级

$$\frac{v}{x}\sim o(1) \quad \frac{{}^2v}{y_2}\sim o(\frac{1}{}) \quad \frac{v}{y}\sim o(\delta) \quad \frac{{}^2v}{x_2}\sim o(\delta)$$

将其代入 x 方向动量方程 $o(1)+ o(1) \ o(1)+\delta o(\frac{1}{})=-\frac{1}{}\frac{p}{x}+ \quad [o(1)+ o(\frac{1}{2})]$

因为边界层粘性作用强，粘性项 $[o(\frac{1}{2})]$不能忽略

而且与方程左边比较可知 $[o(\frac{1}{2})]$的数量级为 o(1)因为 $o(\frac{1}{2})>>o(1)$

意味着运动粘度数量级为 ～o(δ_2)

再代入 y 向动量方程

$$o(\delta)+ o(1) \ \delta o() + o(\delta) \ o(1)=-\frac{1}{}\frac{p}{y}+ o(\delta_2)[\ o(\delta)+ o(\frac{1}{})]$$

该方程中各项的数量级都小于或等于 o(δ)，所以 $\frac{p}{y}=0$

意味着 1.相对于各项数量级均为 o(1)的 x 轴方向运动方程而言，y 方向运动方程并不重要