

上海市奉贤区 2023-2024 学年高考压轴卷数学试卷

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚, 将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂; 非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写, 字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁, 不要折叠, 不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq a \\ 5 - x, & x > a \end{cases}$ ($a > 0$), 若函数 $g(x) = f(x) - 4|x|$ 有三个零点, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, 1) \cup [5, +\infty)$ B. $(0, \frac{6}{5}) \cup [5, +\infty)$
C. $(1, 5]$ D. $(\frac{6}{5}, 5]$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_n = 1 - \frac{1}{a_{n-1}}$ ($n \geq 2$), 则 a_{2018} 等于 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. -1 D. 2

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (a-1)x+4, & x \leq 7 \\ a^{x-6}, & x > 7 \end{cases}$ 是 R 上的减函数, 当 a 最小时, 若函数 $y = f(x) - kx - 4$ 恰有两个零点, 则

实数 k 的取值范围是 ()

- A. $(-\frac{1}{2}, 0)$ B. $(-2, \frac{1}{2})$
C. $(-1, 1)$ D. $(\frac{1}{2}, 1)$

4. 已知 $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$, 若 $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$, 则向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向的投影为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{7}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{7}{2}$

5. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, E , F , G 分别是棱 AD , CC_1 , C_1D_1 的中点, 给出下列四个命题:

- ① $EF \perp B_1C$;
② 直线 FG 与直线 A_1D 所成角为 60° ;
③ 过 E , F , G 三点的平面截该正方体所得的截面为六边形;
④ 三棱锥 $B - EFG$ 的体积为 $\frac{5}{6}$.

其中, 正确命题的个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

6. 公元前5世纪,古希腊哲学家芝诺发表了著名的阿基里斯悖论:他提出让乌龟在跑步英雄阿基里斯前面1000米处开始与阿基里斯赛跑,并且假定阿基里斯的速度是乌龟的10倍.当比赛开始后,若阿基里斯跑了1000米,此时乌龟便领先他100米,当阿基里斯跑完下一个100米时,乌龟先他10米,当阿基里斯跑完下一个10米时,乌龟先他1米....所以,阿基里斯永远追不上乌龟.按照这样的规律,若阿基里斯和乌龟的距离恰好为0.1米时,乌龟爬行的总距离为()

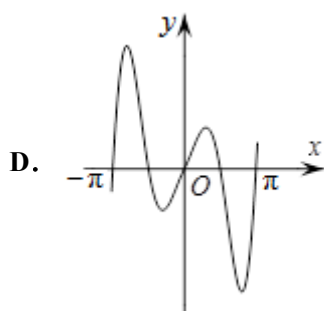
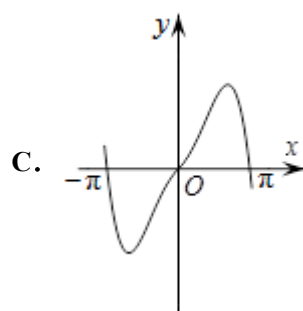
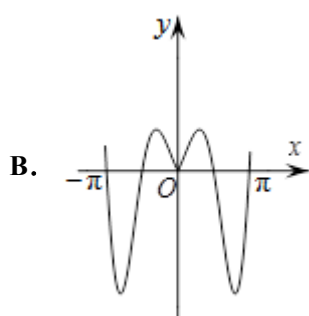
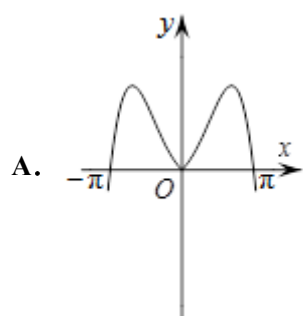
A. $\frac{10^5-1}{900}$ 米

B. $\frac{10^5-9}{90}$ 米

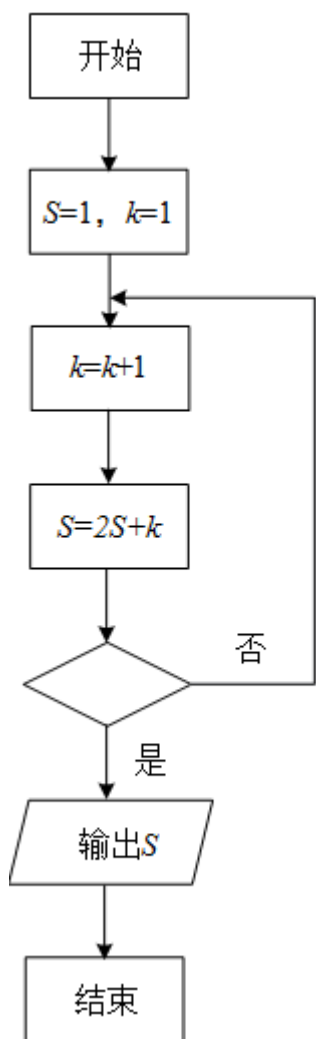
C. $\frac{10^4-9}{900}$ 米

D. $\frac{10^4-1}{90}$ 米

7. 函数 $y=2^{|x|} \sin 2x$ 的图象可能是



8. 某程序框图如图所示,若输出的 $S=120$,则判断框内为()

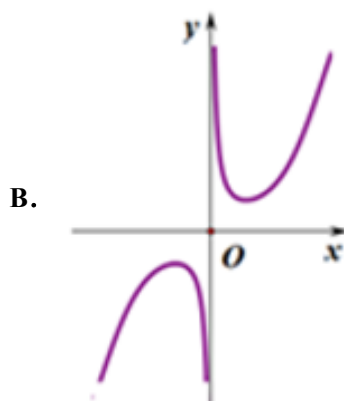
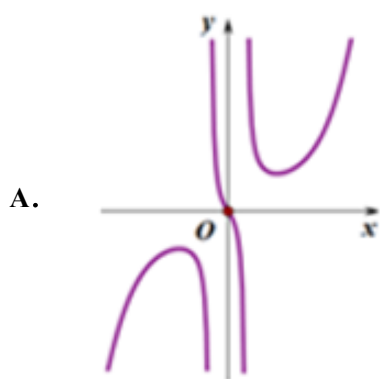


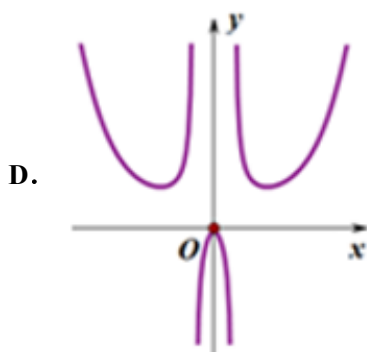
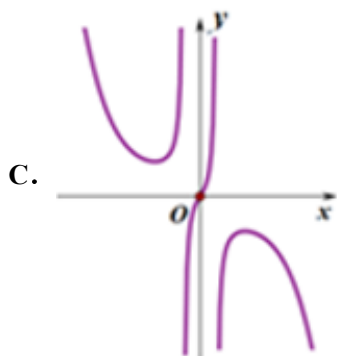
- A. $k > 7?$ B. $k > 6?$ C. $k > 5?$ D. $k > 4?$

9. 已知条件 $p: a = -1$, 条件 q : 直线 $x - ay + 1 = 0$ 与直线 $x + a^2y - 1 = 0$ 平行, 则 p 是 q 的()

- A. 充要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件

10. 函数 $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{|x| - \cos x}$ 的图像大致为 ().

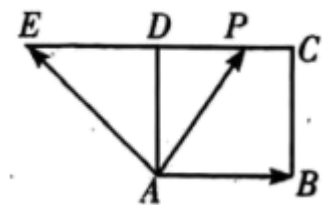




11. 已知 $a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 是 $\frac{1+i}{1-i}$ 的共轭复数, 则 $a+b =$ ()

- A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

12. 如图, 四边形 $ABCD$ 为正方形, 延长 CD 至 E , 使得 $DE = CD$, 点 P 在线段 CD 上运动. 设 $\vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AE}$, 则 $x+y$ 的取值范围是 ()



- A. $[1, 2]$ B. $[1, 3]$ C. $[2, 3]$ D. $[2, 4]$

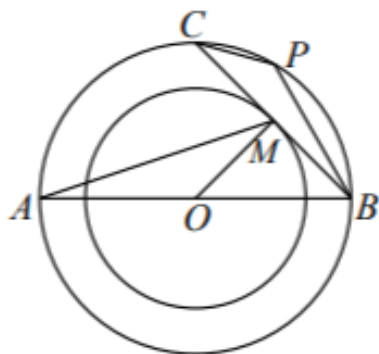
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. (5 分) 已知 x 为实数, 向量 $a = (2, -1)$, $b = (1, x)$, 且 $a \perp b$, 则 $|2a+b| =$ _____.

14. 已知集合 $A = \{1, 4\}$, $B = \{a-5, 7\}$. 若 $A \cap B = \{4\}$, 则实数 a 的值是_____.

15. 函数 $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x}$ 的极大值为_____.

16. 如图, 两个同心圆 O 的半径分别为 2 和 $\sqrt{2}$, AB 为大圆 O 的一条直径, 过点 B 作小圆 O 的切线交大圆于另一点 C , 切点为 M , 点 P 为劣弧 BC 上的任一点 (不包括 B, C 两点), 则 $\vec{AM} \cdot (\vec{BP} + \vec{CP})$ 的最大值是_____.



三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 已知函数 $f(x) = x + a\sqrt{x} + \ln x$ (a 为常数)

(I) 当 $a = -5$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若 $f(x)$ 为增函数, 求实数 a 的取值范围.

18. (12分) 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数, $0 \leq \alpha < 2\pi$). 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{3}$ ($\rho \in \mathbf{R}$), 曲线 C 与直线 l 其中的一个交点

为 A , 且点 A 极径 $\rho_0 \neq 0$. 极角 $0 \leq \theta_\rho < \frac{\pi}{2}$

(1) 求曲线 C 的极坐标方程与点 A 的极坐标;

(2) 已知直线 m 的直角坐标方程为 $x - \sqrt{3}y = 0$, 直线 m 与曲线 C 相交于点 B (异于原点 O), 求 $\triangle AOB$ 的面积.

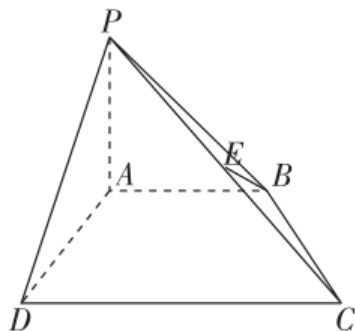
19. (12分) 已知 $a > 0, b > 0$, 函数 $f(x) = |x + a| + |2x - b|$ 的最小值为 1.

(1) 证明: $2a + b = 2$.

(2) 若 $a + 2b \geq tab$ 恒成立, 求实数 t 的最大值.

20. (12分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp AB, AB \parallel CD, AB = AD = AP = \frac{1}{2}CD = 2$,

E 为 PC 的中点.



(1) 求证: $BE \perp$ 平面 PCD ;

(2) 求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 + x$ ($a \in \mathbf{R}$), 函数 $g(x) = -2x + 3$.

(I) 判断函数 $F(x) = f(x) + \frac{1}{2}ag(x)$ 的单调性;

(II) 若 $-2 \leq a \leq -1$ 时, 对任意 $x_1, x_2 \in [1, 2]$, 不等式 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq t|g(x_1) - g(x_2)|$ 恒成立, 求实数 t 的最小值.

22. (10分) 在 $\triangle ABC$ 角中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $asinB = \sqrt{3}bcosA$.

(1) 求角 A ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, $a=5$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

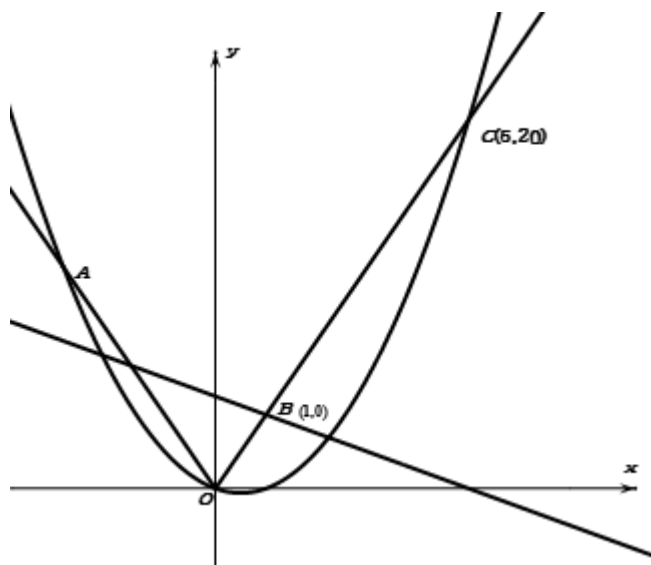
1、A

【解析】

分段求解函数零点，数形结合，分类讨论即可求得结果.

【详解】

作出 $y = x^2 - x$ 和 $y = 5 - x$, $y = 4|x|$ 的图像如下所示：



函数 $g(x) = f(x) - 4|x|$ 有三个零点，

等价于 $y = f(x)$ 与 $y = 4|x|$ 有三个交点，

又因为 $a > 0$ ，且由图可知，

当 $x \leq 0$ 时 $y = f(x)$ 与 $y = 4|x|$ 有两个交点 A, O ，

故只需当 $x > 0$ 时， $y = f(x)$ 与 $y = 4|x|$ 有一个交点即可.

若当 $x > 0$ 时，

$a \in (0,1)$ 时, 显然 $y=f(x)$ 与 $y=4|x|$ 有一个交点 B , 故满足题意;

$a=1$ 时, 显然 $y=f(x)$ 与 $y=4|x|$ 没有交点, 故不满足题意;

$a \in (1,5)$ 时, 显然 $y=f(x)$ 与 $y=4|x|$ 也没有交点, 故不满足题意;

$a \in [5,+\infty)$ 时, 显然 $y=f(x)$ 与 $y=4|x|$ 有一个交点 C , 故满足题意.

综上所述, 要满足题意, 只需 $a \in (0,1) \cup [5,+\infty)$.

故选: A.

【点睛】

本题考查由函数零点的个数求参数范围, 属中档题.

2、A

【解析】

分别代值计算可得, 观察可得数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为周期的周期数列, 问题得以解决.

【详解】

解: $\because a_1 = 2, a_n = 1 - \frac{1}{a_{n-1}} (n \geq 2),$

$$\therefore a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$a_3 = 1 - 2 = -1,$$

$$a_4 = 1 - (-1) = 2,$$

$$a_5 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

...

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为周期的周期数列,

$$Q 2018 = 3 \times 672 + 2,$$

$$\therefore a_{2018} = a_2 = \frac{1}{2},$$

故选: A.

【点睛】

本题考查数列的周期性和运用: 求数列中的项, 考查运算能力, 属于基础题.

3、A

【解析】

首先根据 $f(x)$ 为 R 上的减函数，列出不等式组，求得 $\frac{1}{2} \leq a < 1$ ，所以当 a 最小时， $a = \frac{1}{2}$ ，之后将函数零点个数转化为函数图象与直线交点的个数问题，画出图形，数形结合得到结果.

【详解】

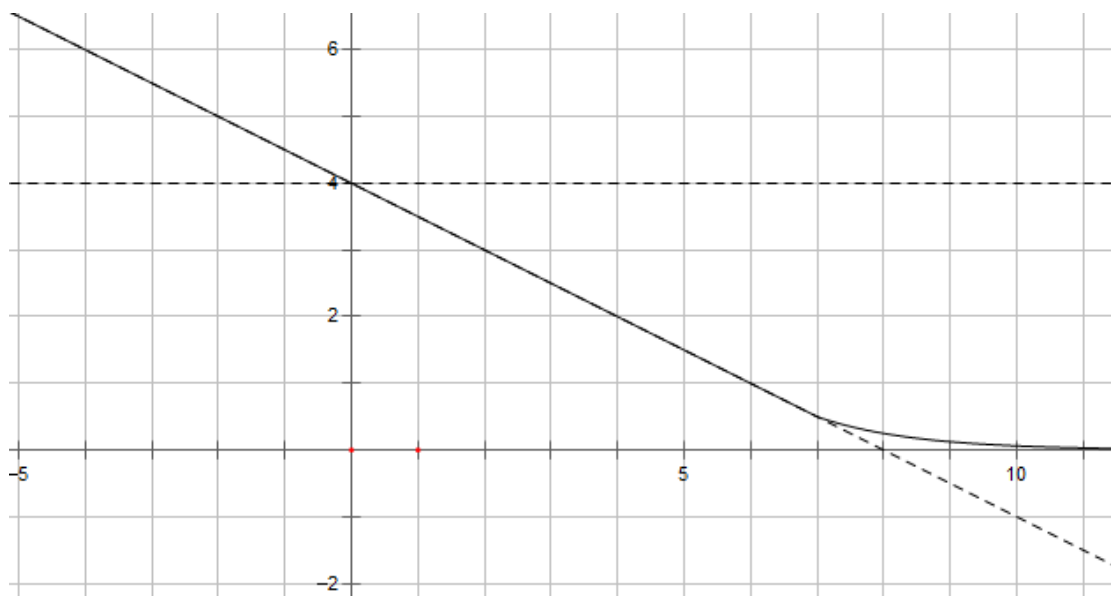
由于 $f(x)$ 为 R 上的减函数，则有
$$\begin{cases} a-1 < 0 \\ 0 < a < 1 \\ a \leq 7(a-1)+4 \end{cases}, \text{ 可得 } \frac{1}{2} \leq a < 1,$$

所以当 a 最小时， $a = \frac{1}{2}$ ，

函数 $y = f(x) - kx - 4$ 恰有两个零点等价于方程 $f(x) = kx + 4$ 有两个实根，

等价于函数 $y = f(x)$ 与 $y = kx + 4$ 的图像有两个交点.

画出函数 $f(x)$ 的简图如下，而函数 $y = kx + 4$ 恒过定点 $(0, 4)$ ，



数形结合可得 k 的取值范围为 $-\frac{1}{2} < k < 0$.

故选：A.

【点睛】

该题考查的是有关函数的问题，涉及到的知识点有分段函数在定义域上单调减求参数的取值范围，根据函数零点个数求参数的取值范围，数形结合思想的应用，属于中档题目.

4、B

【解析】

由 $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$, $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 3$, 再由向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向的投影为 $\frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$ 化简运算即可

【详解】

$$\because \vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b}) \therefore \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 3,$$

$$\therefore \text{向量 } \vec{a} + \vec{b} \text{ 在向量 } \vec{b} \text{ 方向的投影为 } |\vec{a} + \vec{b}| \cos \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{b} \rangle = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2}{|\vec{b}|} = \frac{3 + 4}{2} = \frac{7}{2}.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查向量投影的几何意义, 属于基础题

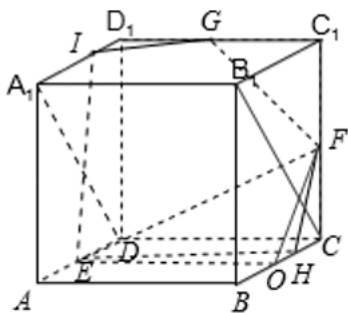
5、C

【解析】

画出几何体的图形, 然后转化判断四个命题的真假即可.

【详解】

如图;

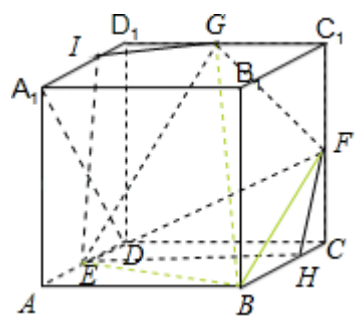


连接相关点的线段, O 为 BC 的中点, 连接 EFO , 因为 F 是中点, 可知 $B_1C \perp OF$, $EO \perp B_1C$, 可知 $B_1C \perp$ 平面 EFO ,

即可证明 $B_1C \perp EF$, 所以①正确;

直线 FG 与直线 A_1D 所成角就是直线 A_1B 与直线 A_1D 所成角为 60° ; 正确;

过 E , F , G 三点的平面截该正方体所得的截面为五边形; 如图:



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/628135035125007032>