全国大学生数学竞赛（非数学专业）

复

习

讲

义

微 分 学

一、基本概念与内容提要

1. 由参数方程确定的函数的导数

设$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，　则$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}/\frac{dx}{dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{y_t'}{x_t'}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dt}[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}]\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$或

$$y''=\frac{\frac{d}{dt}[y']}{\frac{dx}{dt}}$$

2.多元函数微分学

全微分：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$　　$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$具有形式不变性。

偏导数的几何意义：$f_x'(x_0,y_0)$和$f_y'(x_0,y_0)$分别表示曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases}$在点$(x_0, y_0, z_0)$处的切线对$x$轴和$y$轴的斜率。函数的连续性和可微、可导必须会用定义判断。
连续的混合高阶偏导数与求导顺序无关。

二元函数的偏导数存在是连续的既不充分又不必要条件。
二元函数存在两个偏导数是可微的必要不充分条件。
偏导数连续是函数可微的充分不必要条件。函数连续是可微的必要不充分条件。

全微分的近似计算：$\Delta z \approx dz = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$

多元复合函数的求导法：$z = f[u(t), v(t)]$ $\quad \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial t}$

$z = f[u(x,y), v(x,y)]$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$

当$u = u(x,y)$，$v = v(x,y)$时，$du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy$ $\quad dv = \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy$

隐函数的求导公式：

隐函数$F(x,y)=0$，$\quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y}$，$\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}(-\dfrac{F_x}{F_y}) + \dfrac{\partial}{\partial y}(-\dfrac{F_x}{F_y})\cdot\dfrac{dy}{dx}$

隐函数$F(x,y,z)=0$，$\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z}$，$\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z}$

隐函数方程组：$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ $\quad J = \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$$

二、常考例题讲解

用基本方法求导数

1. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)} = e^y \ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f' \neq 1$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2} =$ ________.

2. 已知函数 $z = u(x,y)e^{ax+by}$, 且 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 0$，确定 a,b，使得函数 $z = z(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$$

3. 设函数 $f(t)$ 有二阶连续的导数，$r = \sqrt{x^2 + y^2}, g(x,y) = f\left(\dfrac{1}{r}\right)$，

求$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

4. 已知$\begin{cases} x=\ln\left(1+e^{2t}\right) \\ y=t-\arctan e^t \end{cases}$，求$\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

5. 设函数 $u(x,y)$ 的所有二阶偏导数都连续，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 且 $u(x,2x)=x$，$u_1'(x,2x)=x^2$，求 $u_{11}''(x,2x)$.

解：$u(x,2x)=x$ 两边对 x 求导，得到：$u_1'(x,2x)+2u_2'(x,2x)=1$，代入 $u_1'(x,2x)=x^2$ 求得：$u_2'(x,2x)=\dfrac{1-x^2}{2}$；

$u_1'(x,2x)=x^2$ 两边对 x 求导，得到：$u_{11}''(x,2x)+2u_{12}''(x,2x)=2x$；

$u_2'(x,2x)=\dfrac{1-x^2}{2}$ 两边对 x 求导，得到 $u_{21}''(x,2x)+2u_{22}''(x,2x)=-x$.

以上两式与$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$联立，又二阶导数连续，所以$u_{12}''=u_{21}''$，故 $u_{11}''(x,2x)=-\dfrac{4}{3}x$

用全微分求解隐函数

5. 设 $z=z(x,y)$ 是方程 $F(z+\dfrac{1}{x},z-\dfrac{1}{y})=0$ 确定的隐函数，且具有连续的二阶偏导数，以及 $F_u'(u,v)=F_v'(u,v)\neq 0$，求证：$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 和

$$x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

导数与极限、积分、微分方程等结合求函数表达式

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 上可导，已知 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$ 且函数

$u=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\iint\limits_{s^2+t^2\le x^2+y^2}\dfrac{1}{1+s^2+t^2}dsdt.$

（1）.求函数 $f'(x)(x>0)$ 的表达式；

（2）.若 $f(0)=0,$ 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{\ln(1+x^2)}$.

7. 设 函 数 y=f(x) 由 参 数 方 程 $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = \varphi(t) \end{cases} (t > -1)$ 确 定 ， 且 $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{3}{4(1+t)}$ ， 其 中 $\varphi(t)$ 具 有 二 阶 导 数 ， 曲 线 $y = \varphi(t)$ 与 $y = \int_1^{t^2} e^{-u^2} du + \dfrac{3}{2e}$ 在 t=1 处相切，求函数 $\varphi(t)$.

8．设一元函数 $u = f(r)$ 当 $0 < r < +\infty$ 时有连续的二阶导数，且 $f(1) = 0, f'(1) = 1$，又 $u = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$，试求 $f(r)$ 的表达式。

解：$\because u = f(r(x,y,z)), u_x = f' \cdot \dfrac{x}{r} \quad (f' : f'(r))$

$$u_{xx} = \frac{f'}{r} + x\left(\frac{f''}{r} - \frac{f'}{r^2}\right) \cdot \frac{x}{r} = \frac{f'}{r} + \frac{x^2 f''}{r^2} - \frac{x^2 f'}{r^3}$$

对称地，$u_{yy} = \dfrac{f'}{r} + \dfrac{y^2 f''}{r^2} - \dfrac{y^2 f'}{r^3}, u_{zz} = \dfrac{f'}{r} + \dfrac{z^2 f''}{r^2} - \dfrac{z^2 f'}{r^3}$

$$\therefore u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f'' + 2\frac{f'}{r} = 0$$

令 $\mathrm{P} = f', \dfrac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} = -\dfrac{2}{r}, \ln P = \ln\dfrac{1}{r^2} + \ln C = \ln\dfrac{C}{r^2}$

$$P = f'(r) = \frac{C}{r^2} = \frac{1}{r^2} (\because f'(1) = 1) \therefore f(r) = -\frac{1}{r} + C = -\frac{1}{r} (\because f(1) = 0)$$

注 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$，称为（三维）**拉普拉斯方程**，又名**调和方程**、**位势方程**，是一种偏微分方程.因为由法国数学家拉普拉斯首先提出而得名.在一般条件下解拉普拉斯方程超出考试范围.本题讨论特殊条件下的拉普拉斯方程求解问题.

9. 设 $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$, 且 u 满足（二维）拉普拉斯方程,
求 $u = f(x,y)$ 的表达式.

分析：函数 $u = f(x,y)$ 是 $x^2 + y^2$ 的函数，可以考虑用极坐标进行转化，利用求微分方程的方法得到表达式。

解：令 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$，则 $u = f(x,y) = f(r)$，$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r} f'(r)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^2}f''(r)+\frac{y^2}{r^3}f'(r) \text{同理可得} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2}{r^2}f''(r)+\frac{x^2}{r^3}f'(r)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)=0, \frac{f''(r)}{f'(r)}=-\frac{1}{r} \text{积分得}$$

$$\ln f'(r)=-\ln r+\ln c_0, f'(r)=\frac{c_0}{r}, f(r)=c_0\ln r+c_1$$

$$u=\frac{1}{2}c_0\ln\left(x^2+y^2\right)+c_1=c_2\ln\left(x^2+y^2\right)+c_1$$

10. 已知函数 z=z(x,y) 满足 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$，设 $\begin{cases} u=x \\ v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x} \\ \phi=\frac{1}{z}-\frac{1}{x} \end{cases}$，对函数 $\phi=\phi(u,v)$，求证：$\frac{\partial \phi}{\partial u}=0$.

证明：由题意得 $x=u, y=\frac{u}{1+uv}$，则 $\phi=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$ 是 u,v 的复合函数，则

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}=-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\frac{1}{u^2}=\frac{1}{u^2}-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{(1+uv)^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\because \frac{y}{x}=\frac{1}{1+uv} \therefore \frac{\partial \phi}{\partial u}=\frac{1}{u^2}-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

$$=\frac{1}{u^2}-\frac{1}{x^2 z^2}\left(x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{1}{u^2}-\frac{1}{x^2}=0$$

积 分 学

一、基本概念与内容提要

1. 定积分性质

①若 $f(x)$ 是奇函数（即 $f(x)=-f(-x)$），那么对于任意 的常数 a，在闭区间 $[-a,a]$ 上，$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$.

②若 $f(x)$ 是偶函数（即 $f(x)=f(-x)$），那么对于任意的常数 a，在闭区间 $[-a,a]$ 上 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$.

③若 $f(x)$ 为奇函数时，$f(x)$ 在 $[-a,a]$ 的全体原函数均为偶函数；当 $f(x)$ 为偶函数时，$f(x)$ 只有唯一原函数为奇函数即 $\int_0^x f(t)dt$.

④若 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数（即 $f(T+x)=f(x)$），且在闭区间 $[0,T]$ 上连续可积，那么 $\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$

2.二重积分的六大对称性

如果积分区域 D 具有轴或点对称（令 $D_{\frac{1}{2}}$ 表示 D 的一半区域，即 D 中对应 $y\geq 0$ 部分，余类推），被积函数 $f(x,y)$ 同时具有奇偶性，那么，二重积分的计算可以得到不同程度的简化，这一技巧在研考数学中每年都必出题，务必理解记住下列 6 类对称性定理。

① D 关于 X 轴对称（D 关于 Y 轴对称类推）

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\begin{cases}2\iint_{D_{\frac{1}{2}}} f(x,y)dxdy,\ f\text{是关于}y\text{ 的偶函数，即}f(x,-y)=f(x,y)\\ 0,\ f(x,-y)=-f(x,y)\end{cases}$$

② D 关于 X, Y 都对称

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\begin{cases}4\iint_{D_{\frac{1}{4}}} f(x,y)dxdy,\ f(-x,y)=f(x,-y)=f(x,y)\\ 0,\ f(-x,y)=-f(x,y)\text{或}f(x,-y)=-f(x,y)\end{cases}$$

③ D 关于原点对称

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\begin{cases}0,\ f(-x,-y)=-f(x,y)\\ 2\iint_{D_{\frac{1}{2}}} f(x,y)dxdy,\ f(-x,-y)=f(x,y)\end{cases}$$

④当 D_1 和 D_2 关于某一直线对称，对同一被积函数，则

$$\boxed{\iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_2} f(x, y)dxdy}$$

⑤ D 关于 $X = a$ 轴对称

$$\boxed{\iint\limits_{D} \left(x-a\right)dxdy = 0}$$

⑥ 万能轮换对称性

● 轮换对称性描述

如果将 x 与 y 及 z 交换，即 $x \leftrightarrow y$ ， $y \leftrightarrow z$ ， $z \leftrightarrow x$ 后，积分区域方程不变，则将被积函数中的变量作同样变换后所获得的积分值与原积分值相等，这个性质在二重积分，三重积分，曲线积分和曲面积分等六类多元函数积分中都成立。

●轮换对称性实例

$$I_1 = \iint\limits_{|x|+|y|\le 1} \left(a|x|+b|y|\right)dxdy = \frac{a+b}{2}\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} \left(|x|+|y|\right)dxdy = 4\times\frac{a+b}{2}\iint\limits_{\substack{x+y\le 1\\ x\ge 0,\ y\ge 0}} \left(x+y\right)dxdy = 4\left(a+b\right)\iint\limits_{\substack{x+y\le 1\\ x\ge 0,\ y\ge 0}} xdxdy$$

$$I_2 = \iint\limits_{|x|+|y|\le 1} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y+3}}dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}\left[\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y+3}}+\frac{y^2-x^2}{\sqrt{y+x+3}}\right]dxdy = 0$$

3. 二重积分的换元公式：

设 $f(x,y)$ 在 D 上连续， $x=x(u,v), y=y(u,v)$ 在平面 uOv 上的某区域 D^* 上具有连续的一阶偏导数且雅可比 $(\text{Jacobi}, C.G.J.)$ 行列式

$$J=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0，$$

D^* 对应于 xOy 平面上的区域 D，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D^*} f[x(u,v),\ y(u,v)]|J|dudv$．

4. 三重积分的对称性：

$$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$$

⑴若 Ω 关于 xoy 面 $(z=0)$ 对称，

①若 $f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$, 则 $I=0$．

②若 $f(x,y,-z)=f(x,y,z)$, 则 $I=2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv,\ \Omega_1：z\geq 0$

⑵若 Ω 关于 yoz 面 $(x=0)$ 对称，

①若 $f(-x,y,z)=-f(x,y,z)$, 则 $I=0$．

②若 $f(-x,y,z)=f(x,y,z)$, 则 $I=2\iiint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)dv,\ \Omega_2：x\geq 0$

⑶若 Ω 关于 xoz 面 $(y=0)$ 对称，

①若 $f(x,-y,z)=-f(x,y,z)$, 则 $I=0$．

②若 $f(x,-y,z)=f(x,y,z)$, 则 $I=2\iiint\limits_{\Omega_3} f(x,y,z)dv,\ \Omega_3：y\geq 0$

5. 三重积分换元法

1) 球坐标系代换：$x=\rho\sin\varphi\cos\theta, y=\rho\sin\varphi\sin\theta, z=\rho\cos\varphi$．

$|J|=\rho^2\sin\varphi(0\leq\rho<+\infty, 0\leq\varphi\leq\pi, 0\leq\theta\leq 2\pi)$,即 $dV=r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{D'} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi d\theta d\varphi d\rho$$

适用于积分公式或被积函数是 $f(x^2+y^2+z^2)$ 型.

2) 柱 坐 标 代 换 ： $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$， $(r \ge 0, 0 \le \theta \le 2\pi, -\infty < z < +\infty)$，

$|J| = r = \left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right|$,即 $dV = rdrd\theta dz$

三重积分的柱坐标换元公式为：$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rd\theta drdz$，

适用于 $f(x^2+y^2)$ 型被积函数或积分区域

6. 高斯公式

定理　设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 $\overline{2}$ 所围成，P（x,y,z）,Q(x,y,z),R(x,y,z)在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有公式：

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oiint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

或 $$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oiint\limits_{\Sigma}(\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

这里 $\sum$ 是由 Ω 的整个边界边界曲面的外侧构成，$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为 $\sum$ 上点(x,y,z)处的法向量的方向余弦.

二、常考例题讲解

一元积分中用方程、变限积分求导等来解题

1. 设 $f(x)$ 是连续函数，且满足 $f(x) = 3x^2 - \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x - 2$，则 $f(x) =$____________.

2. 已知 $f(x) = x^2 - x\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + 2\int_0^1 f(x)dx$，求 $f(x)$.

3. 设 $f(x)$ 是连续函数，且满足 $\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t = e^x, f(1) = 1$,求 $\int_1^2 f(x)dx$.

分段函数与含有绝对值号的定积分计算中，若被积函数为分段函数，先以分段点将积分区间分为若干个子区间，再利用可加性分段求解；若被积函数为绝对值函数，先令绝对值为零，求出根，并由此将积分区间分成若干段，再逐段求解.（有时需要适当的做变量替换）

4. 计算积分$\int_1^n \frac{[x]}{x}dx$（$[x]$表示x的取整函数）.

5. 计算积分$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{2x}|t-x|\sin t dt}{|x|^3}$.

6. 计算积分$\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx$（ n表示正整数）.

7. 计算积分$\int_0^{+\infty} e^{-2x}|\sin x|dx$.

利用奇偶性和周期性简化定积分计算，若遇对称区间，先考虑被积函数是否具有奇偶性；若积分上下限中出现π ，被积函数出现三角函数，可用周期性积分性质$\int_a^T f(x)dx=\int_a^{a+T} f(x)dx$.

8. 计算积分$\int_{-1}^1 x(x^{1113}+1)(e^x-e^{-x})dx.$

9. 求定积分$I=\int_0^{n\pi}|\sin x|dx$ ，其中n为自然数。

解：注意到$|\sin x|$是偶函数且以π为周期，因此利用性质可以简化计算

$$I=\int_0^{n\pi}|\sin x|dx=n\int_0^{\pi}|\sin x|dx=n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx=2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx=2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=2n$$

10. 计算积分$\int_a^{a+\pi}\sin^2 x(\tan x+1)dx.$

用二重积分换元法来处理（$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D^*} f[x(u,v),y(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$ ）

11.计算积分 $I=\iint\limits_{D}\cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dxdy$，其中 $D\begin{cases}x+y=1\\x=0,\ y=0\end{cases}$ 所围区域.

解：令$u=x-y,\quad v=x+y$，$J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\dfrac{1}{\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}}=\dfrac{1}{2}$

$$I=\iint_{D_{uv}}\cos\frac{u}{v}\frac{1}{2}dudv=\frac{1}{2}\int_0^1 dv\int_{-v}^{v}\cos\frac{u}{v}du=\frac{1}{2}\int_0^1 2\sin1\cdot vdv=\frac{1}{2}\sin$$

12. 计算积分$I=\iint\limits_{\substack{0\le y\le x\\ \frac{3}{4}\le x+y\le1}}\dfrac{(x+y)\ln\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}dxdy$.

解：设 $u=x+y;\quad v=\dfrac{y}{x}\Rightarrow\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}&\dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}&\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}=\dfrac{u}{(1+v)^2}$ ；$\begin{cases}0\le y\le x\\ \frac{3}{4}\le x+y\le1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le v\le1\\ \frac{3}{4}\le u\le1\end{cases}$

$$I=\iint\limits_{\substack{0\le y\le x\\ \frac{3}{4}\le x+y\le1}}\frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}dxdy=\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{u^2}{\sqrt{1-u}}du\int_0^1\frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2}dv=\frac{203}{480}(1-\ln2)$$

用递推公式来求解积分

13. 设$s>0$，求$I_n=\int_0^{+\infty}e^{-sx}x^n dx\,(n=1,2,...)$

利用二重积分积分区域对称与被积函数奇偶性等来解题

14. 计算积分$\iint\limits_D \operatorname{sgn}(xy-1)dxdy$,其中$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le2,0\le y\le2\}$.

15. 设 D是由曲线 $y=x^3,x=-1,y=1$所围成的有界闭区域，计算积分 $\iint\limits_D(y^2+\sin(xy))dxdy.$

利用格林公式把曲线积分转化为二重积分,并适当要结合对称性来解决，

$\oint_L P(x)dx + Q(x)dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y})dxdy$ ，其中 L 是 D 的取正向的边界曲线.

16. 已知平面区域 $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi\}$ ，L 为 D 的正向边界，试证：

（1）$\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\mathrm{d}x = \oint_L xe^{-\sin y}\mathrm{d}y - ye^{\sin x}\mathrm{d}x$ ；

（2）$\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\mathrm{d}x \ge \frac{5}{2}\pi^2$.

17. 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上，曲线积分 $\oint_C \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2}$ 的值为常数.

（1）设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ ，证明：$\oint_C \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} = 0$

（2）求函数 $\varphi(x)$ ；

（3）设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求 $\oint_C \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2}$ 。

利用换元法、高斯公式等解决二重积分或三重积分

18. 设曲面 Σ 是锥面 $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ 与两球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ，$x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 所围立体表面外侧，$f(u)$ 为连续可微的奇函数，计算曲面积分

$$\iint_\Sigma x^3 dydz + [y^3 + f(yz)]dzdx + [z^3 + f(yz)]dxdy.$$

19. 设 f 为连续函数，$t > 0$ 区域 Ω 是由抛物面 $z = x^2 + y^2$ 和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ 所围起来的上半部分，定义三重积分 $F(t) = \iint_\Sigma f(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz.$ 求 $F(t)$

的导数 $f'(t)$.

极　　限

一、基本概念与内容提要

1）.极限存在的条件：左极限等于右极限。

相关联的题型：(1)函数连续性和可导性的判断及应用；(2)求函数的间断点：①第一类间断点（左右极限存在）：a>可去间断点：左右极限存在且相等但函数在该点无定义或函数值不等于极限值。b>跳跃间断点：左右极限存在但不相等。②第二类间断点：除第一类间断点以外所有的间断点；(3)用定义求导数，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则函数在 x_0 处可导且 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$。所以，判断可导性就是判断极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 是否存在；

2）.连续函数的极限

3）.常用极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0),\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\lim\limits_{x\to+\infty}arc\cot x=0,$

$$\lim_{x\to-\infty}arc\cot x=\pi,,\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}e^x=0,\lim_{x\to+\infty}e^x=\infty,\lim_{x\to0^+}x^x=1,\lim_{x\to0^+}x\ln x=0$$

4）.极限的四则运算

5）恒等变形、约去零因子、有理化等常用化简方法

6）.极限存在准则（夹逼定理、单调有界定理）

7）.两个重要极限及其变形：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

8）.洛比达法则（**重点**），常与洛比达法则一起交替使用，常考的共有七种不定式极限：

①$\frac{0}{0}$型，常用方法：约去零因子；等价无穷小替换；变量代换；洛比达法则；恒等变形

② $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，常用方法：分子分母同时除以最高次幂项；变量替换；洛比达法则

③ $\infty-\infty$ 型，常用方法：通分；倒代换；有理化

④ $0\cdot\infty$ 型，常用方法：变形；变量代换；取倒数化为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

⑤ 0^0 型，常用方法：取对数化为 $0\cdot\infty$ 型；恒等变形；变量代换

⑥ ∞^0 型，常用方法：取对数化为 $0\cdot\infty$ 型；恒等变形消除不定式；利用重要极限

$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$；等价替换

⑦ $1^{+\infty}$ 型，常用方法：取对数化为 $0\cdot\infty$ 型；利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

9）. 无穷小得比较

设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0,\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0,\beta(x)\neq0$，则 $\alpha(x),\beta(x)$ 即为无穷小量，

（1）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称当 $x\to x_0$ 时 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小，记为 $\alpha(x)=o\left[\beta(x)\right]$，或者说当 $x\to x_0$ 时 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 低阶的无穷小；

（2）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C(C\neq0)$，则称当 $x\to x_0$ 时 $\alpha(x)$ 是与 $\beta(x)$ 同

阶的无穷小。特别的，当 C=1 时，称当 $x\to x_0$ 时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)(x\to x_0)$；

（3）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=C(C\neq0)$，则称当 $x\to x_0$ 时 $\alpha(x)$ 是与 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小。

等价无穷小替换求极限（注意：有界函数与无穷小的积是无穷小）: 等价无穷小是

指在**乘积型极限**中，一个无穷小因式可以用与它等价的无穷小因式代替。

常用等价无穷小：当$x \to 0$时，$\sin x \sim x, \tan x \sim x, e^x - 1 \sim x, \ln(1+x) \sim x,$

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (1+x)^a - 1 \sim ax, a^x - 1 \sim x\ln a, \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x, \arcsin x \sim x,$

$\arctan x \sim x$。注意：高阶无穷小、k 阶无穷小的判断及应用。

补充：无穷大量比较：

① 当 $n \to \infty$时，无穷大的阶数由低到高排列为：$\ln n, n^\alpha(\alpha > 0), n^\beta(\beta > \alpha > 0), a^n(a > 1), n^n$；

② 当 $x \to \infty$时，无穷大的阶数由低到高排列为：$\ln x, x^\alpha(\alpha > 0), x^\beta(\beta > \alpha > 0), a^x(a > 1), x^x$。

9）.利用泰勒公式、中值定理求极限，求极限常用迈克劳林公式有：

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$$

10）.利用定积分的定义求极限

11） 证明数列极限存在的方法：①夹逼定理②单调有界定理③级数敛散法：

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$收敛，则$\lim_{n\to\infty} a_n$存在④级数收敛的必要条件：若级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。

补充：给定数列 $\{a_n\}$，则 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$ 收敛。

所以，判断数列的敛散性可以转化为判断级数的敛散性。

12） 抓大头公式：$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, n = m \\ 0, n < m \\ \infty, n > m \end{cases}$，数列极限也可用。

13） 中值定理求极限：关键是将欲求的极限写成中值定理的形式，在求函数式具有规律比或其分子分母之项具有中值定理那样的关联或函数式非常复杂难以化简时，尤其是像求类未定的极限如 $\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right)$，可以考虑使用中值定理。

14） 利用级数收敛的必要条件求极限：若 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$。求极限可转化为求定积分、判断级数的敛散性等。

二、常考题型讲解

幂函数指数化（即 $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} == e^{\lim_{x\to x_0}\ln[f(x)]^{g(x)}}$）再求解；计算 $\infty\cdot 0$ 型先化为 $\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)$ 再求解.往往与等价无穷小、洛比达法则、重要极限等结合.

1．求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x + e^{2x} + \ldots + e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 n 是给定的正整数.

2． 求极限 $\lim_{n\to\infty}(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{3})^n$, 其中 n 是给定的正整数.

3． 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sqrt{1+n}-\sqrt{n})^{\sqrt{2+n}}$, 其中$n$是给定的正整数.

4． 求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

5． 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

6． 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}(1+\frac{1}{x})^{x^2}$.

7． 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}n[(1+\frac{1}{n})^n-e]$.

8． 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}$.

9． 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos x)^{\frac{1}{x}}-1}{x}$.

先对所求函数用平方差公式做化简，再与价无穷小、洛比达法则、重要极限等结合求解

10. 设$x_n=\left(1+a\right)\left(1+a^2\right)\ldots\left(1+a^{2^n}\right)$,其中$\left|a\right|<1$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．

11. 设$a_n=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

12. 已知$x_n=\frac{3}{2}\bullet\frac{5}{4}\bullet\frac{17}{16}\bullet\ldots\bullet\frac{1+2^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-1}}}$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．

解：分子$=\left(2^{2}-1\right)\left(2^{2}+1\right)\left(2^{4}+1\right)\dots\left(2^{2^{n-1}}+1\right)=2^{2^{n}}-1$，

分母$=2^{1+2+2^{2}+\dots+2^{n-1}}=2^{2^{n}-1}$，

$$\therefore \lim_{n\to\infty}x_{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2^{n}}-1}{2^{2^{n}-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^{2^{n}-1}}\right)=2.$$

已知极限求解极限或函数，用等价无穷小或泰勒展示可以求解

13. 已知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{x}=6,$ 求极限$\lim\limits_{x\to0}f(x).$

14. 已知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\frac{f(x)}{1-\cos x})}{2^{x}-1}=4,$ 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^{3}}.$

用泰勒公式做比较方便类型

15. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$.

解：由麦克劳林公式得：$\tan x=x+\dfrac{x^{3}}{3}+o\left(x^{3}\right),\sin x=x-\dfrac{x^{3}}{3!}+o\left(x^{3}\right)$

$$\tan\left(\tan x\right)=\tan x+\frac{\left(\tan x\right)^{3}}{3}+o\left(x^{3}\right)=x+\frac{x^{3}}{3}+\frac{1}{3}\left(x+\frac{x^{3}}{3}\right)^{3}+o\left(x^{3}\right)$$
$$=x+\frac{2}{3}x^{3}+o\left(x^{3}\right)$$

$$\sin\left(\sin x\right)=\sin x-\frac{\left(\sin x\right)^{3}}{3!}+o\left(x^{3}\right)=x-\frac{x^{3}}{3!}-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{x^{3}}{3!}\right)^{3}+o\left(x^{3}\right)$$
$$=x-\frac{1}{3}x^{3}+o\left(x^{3}\right)$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(x+\frac{2}{3}x^{3}+o\left(x^{3}\right)\right)-\left(x-\frac{1}{3}x^{3}+o\left(x^{3}\right)\right)}{\left(x+\frac{x^{3}}{3}+o\left(x^{3}\right)\right)-\left(x-\frac{x^{3}}{3!}+o\left(x^{3}\right)\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^{3}+o\left(x^{3}\right)}{\frac{1}{2}x^{3}+o\left(x^{3}\right)}=2$$

极限与积分、导数等知识结合的类型，做适当的变量替换后或用导数定义化简，再用夹逼准则、泰勒公式、洛比达法则等求解.

16. 设函数 $f(x)$ 连续， $g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$ ，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$ ， A 为常数，求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

17. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 可导，且 $f(1)=0, f'(1)=2$ ，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}$.

18. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt.$

极限证明类型，常用"$\varepsilon-\delta$"定义、单调有界定理及施笃兹定理证明(施笃兹定理 设数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$，其中$\{y_n\}$单调增加且趋于$+\infty$.如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$存在或为$\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$.)

19. 设$\{a_n\}$为数列， a,λ 为有限数，求证：

（1）如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a;$

（2）如果存在正整数 p ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda,$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p};$

（3）若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=d,$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=d;$

20.证明数列

$$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{个根号}},\cdots$$

收敛，并求极限.

其他极限类型

21.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{1+n^2}).$

利用$\sin(\pi\sqrt{1+n^2}) = (-1)^{n-1}\sin(n\pi - \pi\sqrt{1+n^2})$来解.

解：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{1+n^2}) &= \lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\sin(n\pi - \pi\sqrt{1+n^2}) \\ &= \lim_{n\to\infty}(-1)^n \sin\frac{\pi}{n+\sqrt{1+n^2}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

空间解析几何

一、基本知识复习

1 · 向量在轴上的投影

$\mathrm{Prj}_u a = |a|\cos\varphi$, 其中 φ 为向量与 u 轴的夹角;

数量积与投影:

对于两个向量 a 和 b, 它们的模 $|a|$、$|b|$ 及它们的夹角 θ 的

余弦的乘积称为向量 a 和 b 的数量积, 记作 $a\cdot b$, 即

$$a\cdot b = |a|\,|b|\cos\theta.$$

由于 $|b|\cos\theta = |b|\cos(a,\hat{}\ b)$, 当 $a\neq 0$ 时, $|b|\cos(a,\hat{}\ b)$ 是向量 b 在向量 a 的方向上的投影, 于是 $a\cdot b = |a|\,\mathrm{Prj}_a b$. 同理, 当 $b\neq 0$ 时, $a\cdot b = |b|\,\mathrm{Prj}_b a$.

2.向量的方向角余弦称为方向余弦

设 $r=(x, y, z)$, 则 $x=|r|\cos\alpha$, $y=|r|\cos\beta$, $z=|r|\cos\gamma$.

$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 r 的方向余弦.

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\beta = \frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\gamma = \frac{z}{|\boldsymbol{r}|}.$$

从而 $$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_r.$$

上式表明, 以向量 r 的方向余弦为坐标的向量就是与 r 同方向的单位向量 e_r. 因此

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

3 · 向量积及其运算规律

向量积: 设向量 c 是由两个向量 a 与 b 按下列方式定出:

c 的方向垂直于 a 与 b 所决定的平面, c 的指向按右手规则从 a 转向 b 来确定.

那么, 向量 c 叫做向量 a 与 b 的向量积, 记作 $a\times b$, 即

$$c = a\times b.$$

c 的模 $|c|=|a||b|\sin\theta$, 其中 θ 为 a 与 b 间的夹角.

向量积的坐标形式

设 $a = a_x i + a_y j + a_z k$, $b = b_x i + b_y j + b_z k$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=a_yb_zi+a_zb_xj+a_xb_yk-a_yb_xk-a_xb_zj-a_zb_yi$$

$$=(a_y b_z - a_z b_y)\, i + (a_z b_x - a_x b_z)\, j + (a_x b_y - a_y b_x)\, k.$$

向量积的性质:

(1) $a\times a = 0$;

(2) 对于两个非零向量 a、b, 如果 $a\times b = 0$, 则 $a//b$; 反之, 如果 $a//b$, 则 $a\times b = 0$.

如果认为零向量与任何向量都平行, 则 $a//b \Leftrightarrow a\times b = 0$.

向量积的运算律:

(1) 交换律 $a\times b = -b\times a$;

(2) 分配律: $(a+b)\times c = a\times c + b\times c$.

(3) $(\lambda a)\times b = a\times(\lambda b) = \lambda(a\times b)$ (λ为数).

4.空间中的平面及方程

平面的点法式方程：

法线向量: 如果一非零向量垂直于一平面, 这向量就叫做该平面的法线向量. 容易知道, 平面上的任一向量均与该平面的法线向量垂直.

唯一确定平面的条件:当平面Π上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$和它的一个法线向量 $n=(A, B, C)$为已知时, 平面Π的位置就完全确定了.

设 $M(x, y, z)$是平面Π上的任一点，$n=(A, B, C)$为平面Π上的法向量，则平面Π的方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，此方程叫做平面的点法式方程.

平面的一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$

平面的截距式方程：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，其中 a、b、c 依次叫做平面在 x、y、z 轴上的截距.

5.空间直线及其方程

由直线上一点与直线 l的方向所决定的直线方程

方向向量：如果一个非零向量平行于一条已知直线, 这个向量就叫做这条直线的方向向量. 容易知道, 直线上任一向量都平行于该直线的方向向量.

确定直线的条件：当直线 L 上一点 $M_0(x_0, y_0, x_0)$和它的一方向向量 $s=(m, n, p)$为已知时, 直线 L 的位置就完全确定了.

直线方程的确定：已知直线 L 通过点 $M_0(x_0, y_0, x_0)$，且直线的方向向量为 $s=(m, n, p)$, 则直线点向式（或对称式）方程 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$。

由直线的对称式方程容易导出直线的参数方程.

设 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$，得方程组 $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$. 此方程组就是直线的参数方程.

空间直线的一般方程：

设直线 L 是平面 Π_1 与平面 Π_2 的交线，平面的方程分别为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, 那么点 M 在直线 L 上当且仅当它同时在这两个平面上。

当且仅当它的坐标同时满足这两个平面方程□ 即满足方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}.$$

因此，直线 L 可以用上述方程组来表示. 上述方程组叫做空间直线的一般方程.

两向量垂直、平行的充分必要条件立即推得下列结论□□□

①设有两直线 L_1□ $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ □ L_2□ $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$ □ 则

$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$□

L_1 □□□ $L_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

②设直线 L 的方向向量为(m, n, p)，平面□的法线向量为(A, B, C)□，则

$L\perp$□□$\Leftrightarrow \dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$；□□□□□□□□□□□□□□ $L//$□□$\Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$.

6. 平面束□

设直线 L 的一般方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$ □

其中系数 A_1、B_1、C_1 与 A_2、B_2、C_2 不成比例. 考虑三元一次方程□□□

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\square(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

即 $$(A_1+\square A_2)x+(B_1+\square B_2)y+(C_1+\square C_1)z+D_1+\square D_2=0,$$

其中□为任意常数. 因为系数 A_1、B_1、C_1 与 A_2、B_2、C_2 不成比例，所以对于任何一个□值，上述方程的系数不全为零，从而它表示一个平面. 对于不同的□值，所对应的平面也不同，而且这些平面都通过直线 L，也就是说，这个方程表示通过直线 L 的一族平面. 另一方面，任何通过直线 L 的平面也一定包含在上述通过 L 的平面族中.

通过定直线 L 的所有平面的全体称为平面束.

方程 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\square(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ 就是通过直线 L 的平面束方程.

7. 切平面方程与法线方程

设点 $X_0(x_0, y_0, z_0)$ 在曲面 $F(x, y, z)=0$ 上，而 $F(x, y, z)$ 在点 X_0 处存在连续偏导数，且三个偏导数不同时为零，则曲面 $F(x, y, z)=0$ 在点 X_0 处的切平面方程为

$$F_x'(X_0)(x-x_0)+F_y'(X_0)(y-y_0)+F_z'(X_0)(z-z_0)=0$$

法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{F_x'(X_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y'(X_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z'(X_0)}$

设点 $X_0(x_0, y_0, z_0)$ 在曲面 $z = f(x, y)$ 上，且 $z = f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处存在连续偏导数，则该曲面在点 $X_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程为

$$-f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)+z-z_0=0.$$

过 X_0 的法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{-f_x'(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{-f_y'(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{1}$.

注：方法 2 实际上是方法 1 中取 $F(x,y,z)=z-f(x,y)=0$ 的情形.

8. 法平面方程与切线方程

设空间的曲线 C 由参数方程的形式给出：$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$，$t\in(\alpha,\beta)$.

切线方程为: $\dfrac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$

法平面方程为 $x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$

如果空间的曲线 C 表示为空间两曲面的交，即

$$c:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

假设在 $A(x_0,y_0,z_0)$ 有 $J=\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_A\neq 0$，在 $A(x_0,y_0,z_0)$ 某邻域内满足隐函数组存在定理条件.

切线方程为 $\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_A}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_A}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_A}$

法平面方程为 $\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_A(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_A(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_A(z-z_0)=0$

二、习题讲解

直线与平面

1. （2021）过点 $(-2,-1,0)$，垂直于直线 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 且平行于平面 $4x+5y+6z+7=0$ 的直线方程.

2. 经过点 $M_0(1,-1,1)$ 并且与两直线 $L_1:\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{1}$ 和 $L_2:\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$ 都相交的直线 L.

3. 求两直线 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$ 与 $L_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ 的公垂线.

4. 求直线 $l_1:\begin{cases}x-y=0\\z=0\end{cases}$ 与直线 $l_2:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$ 的距离.

解：直线 l_1 的对称式方程 $l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$，记两直线的方向向量分别为 $\vec{l_1}=(1,1,0),\vec{l_2}=(4,-2,-1)$，两直线上的定点分别为 $P_1(0,0,0),P_2(2,1,3)$，

$\vec{a}=\overrightarrow{P_1P_2}=(2,1,3),\vec{l_1}\times\vec{l_2}=(-1,1,-6)$，由向量的性质可知，两直线的距离

$$d=\left|\frac{\vec{a}\cdot\left(\vec{l_1}\times\vec{l_2}\right)}{\left|\vec{l_1}\times\vec{l_2}\right|}\right|=\frac{\left|-2+1-18\right|}{\sqrt{1+1+36}}=\sqrt{\frac{19}{2}}$$

5. (2021)求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1 和 π_2，使其中一个平面过点（4，-3，1）.

旋转面的方程

6. 求经过点 $A(1,0,0)$ 与点 $B(0,1,1)$ 的直线绕 z 轴旋转一周生成的旋转曲面方程.

7. 求曲线 $\begin{cases}y=1\\x^2+z^2=3\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周生成的旋转曲面方程.

曲线在平面上的投影方程

8. 求椭球面 $x^2+y^2+z^2-xy=1$ 在坐标平面 yoz 上的投影方程.

9. (2021)求直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi:x-2y+2z-1=0$ 上的投影直线方程 L_0,并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

切线与切平面

10. 求曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程.

11. 求经过直线 $L:\dfrac{x-6}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{2z-1}{-2}$ 且与椭球面 $S:x^2+2y^2+3z^2=21$ 相切的切平面方程.

12. 求曲线 $L:\begin{cases}3x^2+2y^2-2z-1=0\\x^2+y^2+z^2-4y-2z+2=0\end{cases}$ 上点 $M(1,1,2)$ 处的切线方程.

13. 求曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$ 上点 $M(1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/635113141130011341