

新疆阿勒泰地区布尔津县高级中学 2024 届高三下学期第二次统一考试数学试题

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , P 为双曲线 C 上一点, Q 为双曲线 C 渐近

线上一点, P, Q 均位于第一象限, 且 $2\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PF_2}$, $\overrightarrow{QF_1} \cdot \overrightarrow{QF_2} = 0$, 则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{3}-1$ B. $\sqrt{3}+1$ C. $\sqrt{13}+2$ D. $\sqrt{13}-2$

2. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, O 为坐标原点, F_1, F_2 为其左、右焦点, 点 G 在 C 的渐近线上,

$F_2G \perp OG$, 且 $\sqrt{6}|OG| = |GF_1|$, 则该双曲线的渐近线方程为 ()

- A. $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ B. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$ C. $y = \pm x$ D. $y = \pm \sqrt{2}x$

3. 若不相等的非零实数 x, y, z 成等差数列, 且 x, y, z 成等比数列, 则 $\frac{x+y}{z} =$ ()

- A. $-\frac{5}{2}$ B. -2 C. 2 D. $\frac{7}{2}$

4. 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B 所对的边分别是 a, b , 则“ $a > b$ ”是“ $A > B$ ”的 ()

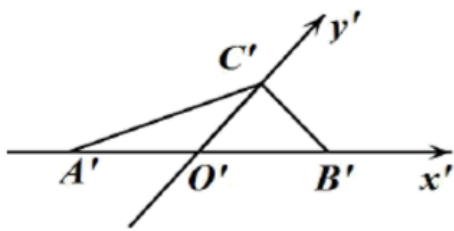
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 既不充分也不必要条件 D. 充分必要条件

5. 用数学归纳法证明 $1+2+3+\dots+n^2 = \frac{n^4+n^2}{2}$, 则当 $n = n+1$ 时, 左端应在 $n = n$ 的基础上加上 ()

- A. $n^2 + 1$ B. $(n+1)^2$
C. $(n^2+1) + (n^2+2) + \dots + (n+1)^2$ D. $\frac{(n+1)^4 + (n+1)^2}{2}$

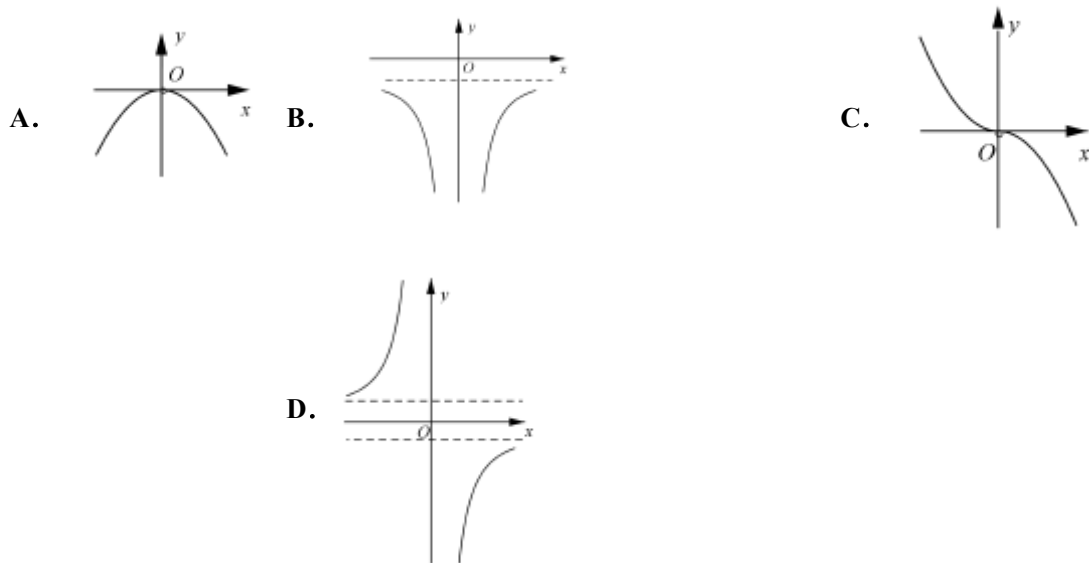
6. 水平放置的 $VABC$, 用斜二测画法作出的直观图是如图所示的 $V'A'B'C'$, 其中 $O'A' = O'B' = 2$, $O'C' = \sqrt{3}$, 则

$VABC$ 绕 AB 所在直线旋转一周后形成的几何体的表面积为 ()

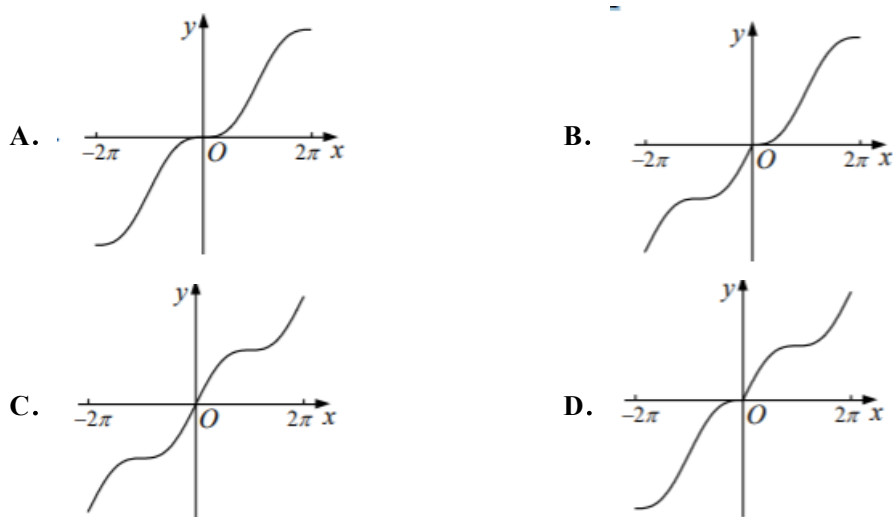


- A. $8\sqrt{3}\pi$ B. $16\sqrt{3}\pi$ C. $(8\sqrt{3}+3)\pi$ D. $(16\sqrt{3}+12)\pi$

7. 函数 $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$ (其中 e 是自然对数的底数) 的大致图像为 ()



8. 函数 $y = \sin|x| + x$ 在 $x \in [-2\pi, 2\pi]$ 上的大致图象是 ()



9. 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()

- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ C. $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2\}$

10. 已知命题 p : $m = 1$ 是“直线 $x - my = 0$ 和直线 $x + my = 0$ 互相垂直”的充要条件; 命题 q : 函数 $f(x) = x + \frac{4}{x}$

的最小值为 4. 给出下列命题: ① $p \wedge q$; ② $p \vee q$; ③ $p \wedge (\neg q)$; ④ $(\neg p) \wedge (\neg q)$, 其中真命题的个数为()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

11. 关于函数 $f(x) = \sin|x| + |\cos x|$ 有下述四个结论: ()

- ① $f(x)$ 是偶函数; ② $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上是单调递增函数;
③ $f(x)$ 在 R 上的最大值为 2; ④ $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 2\pi]$ 上有 4 个零点.

其中所有正确结论的编号是 ()

- A. ①②④ B. ①③ C. ①④ D. ②④

12. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 直线 $y = k\left(x - \frac{p}{2}\right) (k > 0)$ 与 C 分别相交于点 A , M 与 C 的准线相交于点

N , 若 $|AM| = |MN|$, 则 $k =$ ()

- A. 3 B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\frac{1}{3}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) (\omega \in N)$ 在 $[0, \pi]$ 上仅有 2 个零点, 设 $g(x) = \sqrt{2}f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$, 则 $g(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的取值范围为_____.

14. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 - a_2 = 2$, $a_2 - a_3 = 6$, 则 $S_4 =$ _____.

15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x - a|, & 0 < x \leq 4 \\ f(8-x), & 4 < x < 8 \end{cases}$, 若存在实数 m , 使得关于 x 的方程 $f(x) = m$ 有 4 个不相等的实根, 且这 4 个根的平方和存在最小值, 则实数 a 的取值范围是_____.

16. 一个长、宽、高分别为 1、2、2 的长方体可以在一个圆柱形容器内任意转动, 则容器体积的最小值为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

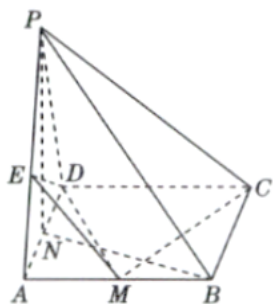
17. (12 分) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(0, 1)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, A 、 B 、 C 为椭圆上不同的三点, 且满足 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$, O 为坐标原点.

(1) 若直线 AB 、 OC 的斜率都存在, 求证: $k_{AB} \cdot k_{OC}$ 为定值;

(2) 求 $|AB|$ 的取值范围.

18. (12 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是正方形, $\triangle PAD$ 为等边三角形, M , N 分别是 AB , AD

的中点，且平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$.



(1) 证明: $CM \perp$ 平面 PNB ;

(2) 问棱 PA 上是否存在一点 E , 使 $PC \parallel$ 平面 DEM , 求 $\frac{PE}{EA}$ 的值

19. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 将曲线 C_1 上每一点的横坐标

变为原来的 $\sqrt{2}$ 倍, 纵坐标不变, 得到曲线 C_2 , 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 射线

$l: \theta = \varphi$ 与曲线 C_2 交于点 P , 将射线 l 绕极点逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 交曲线 C_2 于点 Q .

(1) 求曲线 C_2 的参数方程;

(2) 求 $\triangle POQ$ 面积的最大值.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = |2x - a| + a$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求不等式 $f(x) \leq 6$ 的解集;

(2) 设函数 $g(x) = |2x - 1|$. 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $f(x) + g(x) \geq 3$, 求 a 的取值范围.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = (x + a) \ln(x + a) + e^x + x$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的图象在 $x=0$ 处的切线方程;

(2) 讨论函数 $h(x) = f(x) - e^x - x$ 的单调性;

(3) 当 $a=0$ 时, 若方程 $h(x) = f(x) - e^x - x = m$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 , 求证: $\ln(x_1 + x_2) > \ln 2 - 1$.

22. (10 分) a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边. 已知 $a(\sin A + 4 \sin B) = 8 \sin A$.

(1) 若 $b=1, A=\frac{\pi}{6}$, 求 $\sin B$;

(2) 已知 $C=\frac{\pi}{3}$, 当 $\triangle ABC$ 的面积取得最大值时, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

由双曲线的方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ， P 为双曲线 C 上的一点， Q 为双曲线 C 的渐近线上的一点，

且 P, Q 都位于第一象限，且 $2\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PF_2}, \overrightarrow{QF_1} \cdot \overrightarrow{QF_2} = 0$ ，

可知 P 为 QF_2 的三等分点，且 $\overrightarrow{QF_1} \perp \overrightarrow{QF_2}$ ，

点 Q 在直线 $bx - ay = 0$ 上，并且 $|OQ| = c$ ，则 $Q(a, b)$ ， $F_2(c, 0)$ ，

设 $P(x_1, y_1)$ ，则 $2(x_1 - a, y_1 - b) = (c - x_1, -y_1)$ ，

解得 $x_1 = \frac{2a+c}{3}, y_1 = \frac{2b}{3}$ ，即 $P(\frac{2a+c}{3}, \frac{2b}{3})$ ，

代入双曲线的方程可得 $\frac{(2a+c)^2}{4a^2} - \frac{1}{4} = 1$ ，解得 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{13} - 2$ ，故选 D。

点睛：本题考查了双曲线的几何性质，离心率的求法，考查了转化思想以及运算能力，双曲线的离心率是双曲线最重要的几何性质，求双曲线的离心率(或离心率的取值范围)，常见有两种方法：①求出 a, c ，代入公式 $e = \frac{c}{a}$ ；②只需要根据一个条件得到关于 a, b, c 的齐次式，转化为 a, c 的齐次式，然后转化为关于 e 的方程(不等式)，解方程(不等式)，即可得 e (e 的取值范围)。

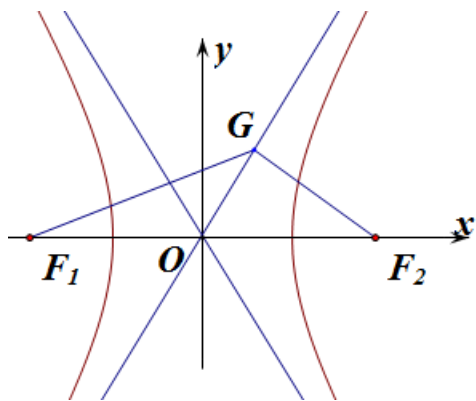
2、D

【解析】

根据 $F_2G \perp OG$ ，先确定出 GF_2, GO 的长度，然后利用双曲线定义将 $\sqrt{6}|OG| = |GF_1|$ 转化为 a, b, c 的关系式，化简后可得到 $\frac{b}{a}$ 的值，即可求渐近线方程。

【详解】

如图所示：



因为 $F_2G \perp OG$ ，所以 $|GF_2| = \frac{\left| \frac{bc}{a} \right|}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} = b$, $|OG| = \sqrt{c^2 - b^2} = a$,

又因为 $\sqrt{6}|OG| = |GF_1|$ ，所以 $\sqrt{6}|\vec{OG}| = |\vec{GF}_1|$ ，所以 $\sqrt{6}|\vec{OG}| = |\vec{GF}_2 + \vec{F}_2\vec{F}_1|$ ，

所以 $6|\vec{OG}|^2 = |\vec{GF}_2 + \vec{F}_2\vec{F}_1|^2$ ，所以 $6a^2 = b^2 + 4c^2 + 2b \times 2c \times \cos(180^\circ - \angle GF_2F_1)$ ，

所以 $6a^2 = b^2 + 4c^2 + 2b \times 2c \times \left(-\frac{b}{c}\right)$ ，所以 $b^2 = 2a^2$, $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$ ，

所以渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{2}x$.

故选：D.

【点睛】

本题考查根据双曲线中的长度关系求解渐近线方程，难度一般.注意双曲线的焦点到渐近线的距离等于虚轴长度的一半.

3、A

【解析】

由题意，可得 $y = \frac{x+z}{2}$ ， $z^2 = xy$ ，消去 y 得 $x^2 + xz - 2z^2 = 0$ ，可得 $\frac{x}{z} = -2$ ，继而得到 $y = -\frac{z}{2}$ ，代入即得解

【详解】

由 x ， y ， z 成等差数列，

所以 $y = \frac{x+z}{2}$ ，又 x ， z ， y 成等比数列，

所以 $z^2 = xy$ ，消去 y 得 $x^2 + xz - 2z^2 = 0$ ，

所以 $\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \frac{x}{z} - 2 = 0$ ，解得 $\frac{x}{z} = 1$ 或 $\frac{x}{z} = -2$ ，

因为 x ， y ， z 是不相等的非零实数，

所以 $\frac{x}{z} = -2$ ，此时 $y = -\frac{z}{2}$ ，

所以 $\frac{x+y}{z} = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$ 。

故选：A

【点睛】

本题考查了等差等比数列的综合应用，考查了学生概念理解，转化划归，数学运算的能力，属于中档题。

4、D

【解析】

由大边对大角定理结合充分条件和必要条件的定义判断即可。

【详解】

$\triangle ABC$ 中，角 A 、 B 所对的边分别是 a 、 b ，由大边对大角定理知“ $a > b$ ” $\Rightarrow$ “ $A > B$ ”，

“ $A > B$ ” $\Rightarrow$ “ $a > b$ ”。

因此，“ $a > b$ ”是“ $A > B$ ”的充分必要条件。

故选：D。

【点睛】

本题考查充分条件、必要条件的判断，考查三角形的性质等基础知识，考查逻辑推理能力，是基础题。

5、C

【解析】

首先分析题目求用数学归纳法证明 $1+1+3+\dots+n^1 = \frac{n^2+n^2}{2}$ 时，当 $n=k+1$ 时左端应在 $n=k$ 的基础上加上的式子，可以分别

使得 $n=k$ ，和 $n=k+1$ 代入等式，然后把 $n=k+1$ 时等式的左端减去 $n=k$ 时等式的左端，即可得到答案。

【详解】

当 $n=k$ 时，等式左端 $= 1+1+\dots+k^1$ ，

当 $n=k+1$ 时，等式左端 $= 1+1+\dots+k^1+k^1+1+k^1+1+\dots+(k+1)^1$ ，增加了项 $(k^1+1) + (k^1+1) + (k^1+3) + \dots + (k+1)^1$ 。

故选：C。

【点睛】

本题主要考查数学归纳法，属于中档题。

6、B

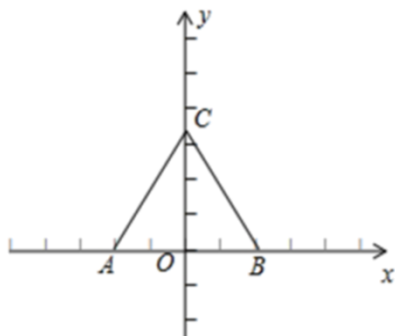
【解析】

根据斜二测画法的基本原理，将平面直观图还原为原几何图形，可得 $AO = BO = 2$ ， $OC = 2\sqrt{3}$ ， V_{ABC}

绕 AB 所在直线旋转一周后形成的几何体是两个相同圆锥的组合体,圆锥的侧面展开图是扇形根据扇形面积公式即可求得组合体的表面积.

【详解】

根据“斜二测画法”可得 $AO = BO = 2$, $OC = 2\sqrt{3}$, $AB = AC = BC = 4$,



$\triangle ABC$ 绕 AB 所在直线旋转一周后形成的几何体是两个相同圆锥的组合体,

它的表面积为 $S = 2\pi rl = 2\pi \times 2\sqrt{3} \times 4 = 16\sqrt{3}\pi$.

故选: B

【点睛】

本题考查斜二测画法的应用及组合体的表面积求法,难度较易.

7、 D

【解析】

由题意得, 函数定义域为 $x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq 0$, 所以定义域关于原点对称,

且 $f(-x) = \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1+\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}} = -\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} = -f(x)$, 所以函数为奇函数, 图象关于原点对称,

故选 D .

8、 D

【解析】

讨论 x 的取值范围, 然后对函数进行求导, 利用导数的几何意义即可判断.

【详解】

当 $x \geq 0$ 时, $y = \sin x + x$, 则 $y' = \cos x + 1 \geq 0$,

所以函数在 $[0, 2\pi]$ 上单调递增,

令 $g(x) = \cos x + 1$, 则 $g'(x) = -\sin x$,

根据三角函数的性质,

当 $x \in [0, \pi]$ 时, $g'(x) = -\sin x < 0$, 故切线的斜率变小,

当 $x \in [\pi, 2\pi]$ 时, $g'(x) = -\sin x > 0$, 故切线的斜率变大, 可排除 A、B;

当 $x < 0$ 时, $y = -\sin x + x$, 则 $y' = -\cos x + 1 \geq 0$,

所以函数在 $[-2\pi, 0]$ 上单调递增,

令 $h(x) = -\cos x + 1$, $h'(x) = \sin x$,

当 $x \in [-2\pi, -\pi]$ 时, $h'(x) = \sin x > 0$, 故切线的斜率变大,

当 $x \in [-\pi, 0]$ 时, $h'(x) = \sin x < 0$, 故切线的斜率变小, 可排除 C,

故选: D

【点睛】

本题考查了识别函数的图像, 考查了导数与函数单调性的关系以及导数的几何意义, 属于中档题.

9、A

【解析】

进行交集的运算即可.

【详解】

$Q A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$,

$\therefore A \cap B = \{0, 1, 2\}$.

故选: A.

【点睛】

本题主要考查了列举法、描述法的定义, 考查了交集的定义及运算, 考查了计算能力, 属于基础题.

10、A

【解析】

先由两直线垂直的条件判断出命题 p 的真假, 由基本不等式判断命题 q 的真假, 从而得出 p, q 的非命题的真假, 继而判断复合命题的真假, 可得出选项.

【详解】

已知对于命题 p , 由 $1 \times 1 - m^2 = 0$ 得 $m = \pm 1$, 所以命题 p 为假命题;

关于命题 q , 函数 $f(x) = x + \frac{4}{x}$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/636010012232011003>