

2023-2024 北京八年级下学期数学期末汇编

压轴题-几何综合

1、(2024 北京西城八下期末) 在正方形 $ABCD$ 中, E 是边 BC 上的一个动点 (不与点 B, C 重合), 连接 AE , P 为点 B 关于直线 AE 的对称点.

(1) 连接 AP , 作射线 DP 交射线 AE 于点 F , 依题意补全图 1.

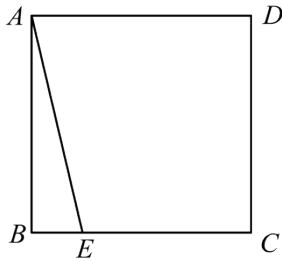
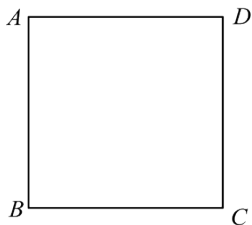


图1

①若 $\angle BAE = \alpha$, 求 $\angle ADP$ 的大小 (用含 α 的式子表示);

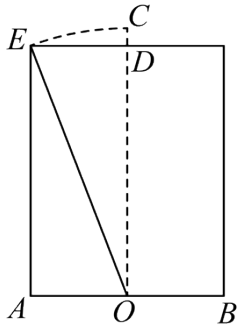
②用等式表示线段 AF , PF 和 PD 之间的数量关系, 并证明;

(2) 已知 $AB = 2$, 连接 PC , 若 $PC \parallel AE$, M, N 是正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上的两个动点, 且 $BN = BM + \sqrt{2}$, 连接 EM, AN , 直接写出 $EM + AN$ 的最小值.



备用图

2、(2024 北京朝阳八下期末) 《九章算术》卷九“勾股”中记载: 今有池, 方一丈, 葭生其中央, 出水一尺. 引葭赴岸, 适与岸齐, 问水深、葭长各几何. 大意是: 如图, 水池底面的宽 $AB = 1$ 丈, 芦苇 OC 生长在 AB 的中点 O 处, 高出水面的部分 $CD = 1$ 尺. 将芦苇向池岸牵引, 尖端达到岸边时恰好与水面平齐, 即 $OC = OE$, 求水池的深度和芦苇的长度(1 丈等于 10 尺).



(1) 求水池的深度 OD ;

(2) 中国古代数学家刘徽在为《九章算术》作注解时，更进一步给出了这类问题的一般解法。他的解法用现代符号语言可以表示为：若已知水池宽 $AB = 2a$ ，芦苇高出水面的部分 $CD = n (n < a)$ ，则水池的深度 $OD (OD = b)$ 可以通过公式 $b = \frac{a^2 - n^2}{2n}$ 计算得到。请

证明刘徽解法的正确性。

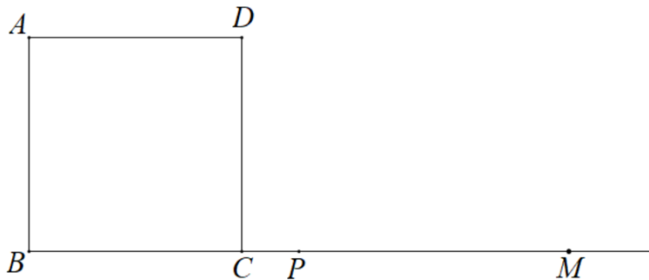
证明刘徽解法的正确性。

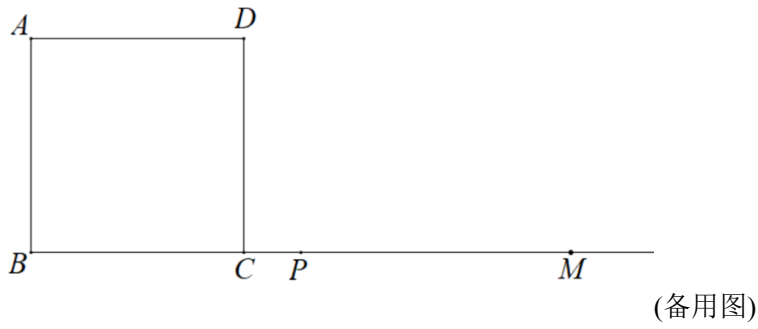
3、(2024 北京东城八下期末) 如图,正方形 $ABCD$ 中, 点 M 在 BC 延长线上, 点 P 是 BM 的中点, 连接 AP , 在射线 BC 上方作 $PQ \perp AP$, 且 $PQ = AP$. 连接 MD , MQ .

(1) 补全图形;

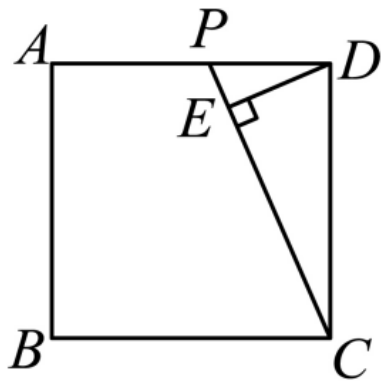
(2) 用等式表示 MD 与 MQ 的数量关系并证明;

(3) 连接 CQ , 若正方形边长为 5, $CQ = 6\sqrt{2}$, 直接写出线段 CM 的长.





4、(2024 北京二中八下期末) 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 P 在边 AD 上，连接 CP ，过点 D 作 $DE \perp CP$ 于点 E ，延长 ED 至点 F ，使 $EF = EC$ ，连接 BF ， CF 。



- (1) 依题意补全图形；
- (2) $\angle EFC$ 的度数为 _____；
- (3) 用等式表示线段 BF ， DF ， EF 之间的数量关系，并证明。

5、(2024 北京平谷八下期末) 已知，矩形 $ABCD$ ， $AD > AB$ ，对角线 AC ， BD 交于点 O ，点 M 在射线 BC 上， $\angle DMC = 2\angle DAC$ ，作 $DE \perp AC$ ，与 AC 交于点 E ，与 BC 交于点 F 。

(1) 如图 1

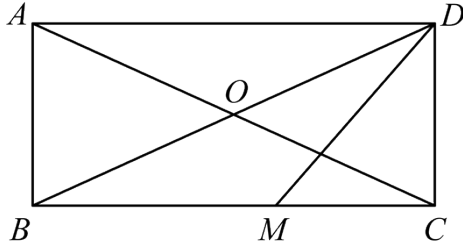


图1

①依题意补全图形，求证： $\angle CDF = \angle DAC$ ；

②连接 OM ，求证： $MO \perp BD$ 。

(2) 当 M 在 BC 延长线上时，依题意补全图 2，并用等式表示线段 CM ， FM 与 DA 的数量关系，并证明。

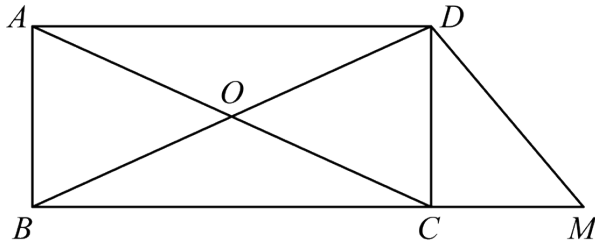


图2

6、(2024 北京石景山八下期末) 已知：在正方形 $ABCD$ 中，点 E 是 BC 延长线上一点，且 $CE \neq BC$ ，连接 DE ，过点 D 作 DE 的垂线交直线 AB 于点 F ，连接 EF ，取 EF 的中点 G ，连接 CG 。

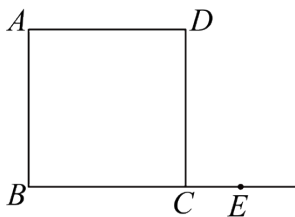


图1

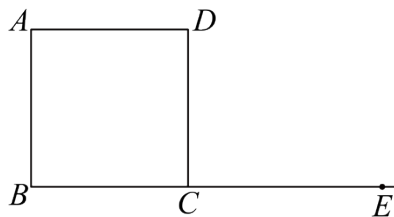


图2

(1) 当 $CE < BC$ 时,

①补全图1;

②求证: $\triangle ADF \cong \triangle CDE$;

③用等式表示线段 CD , CE , CG 之间的数量关系, 并证明.

(2) 如图2, 当 $CE > BC$ 时, 请你直接写出线段 CD , CE , CG 之间的数量关系.

7、(2024 北京十一学校八下期末) 如图1, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 是边 CD 上一点, 且点 E 不与 C 、 D 重合, 过点 A 作 AE 的垂线交 CB 延长线于点 F , 连接 EF .

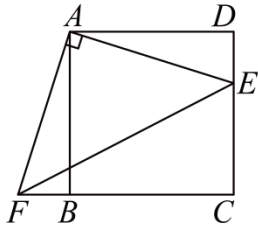


图1

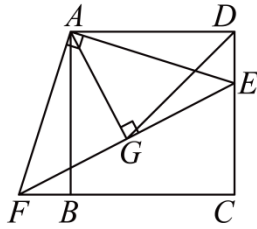
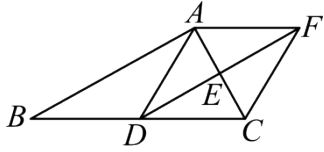


图2

(1) 计算 $\angle AEF$ 的度数;

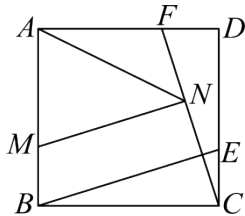
(2) 如图2, 过点 A 作 $AG \perp EF$, 垂足为 G , 连接 DG . 用等式表示线段 CF 与 DG 之间的数量关系, 并证明.

8、(2024 北京清华附中八下期末) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = 90^\circ$, 点 D, E 分别是 BC, AC 的中点. 连接 DE 并延长至点 F , 使得 $EF = DE$. 连接 AF, CF, AD .



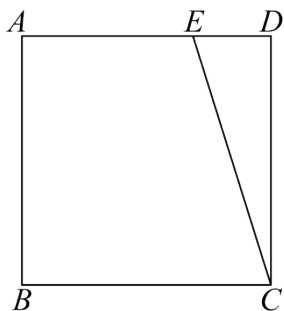
- (1) 求证: 四边形 $ADCF$ 是菱形;
- (2) 连接 BF . 若 $\angle ACB = 60^\circ$, $AF = 2$, 求 BF 的长.

9、(2024 北京顺义八下期末) 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 CD 上, 点 F 在边 AD 上, $CE = DF$, 连接 BE, CF .



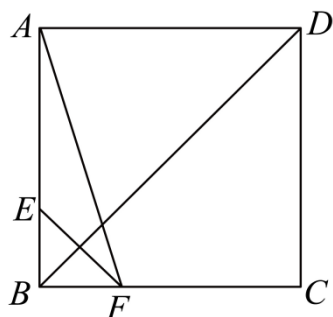
- (1) 求证: $BE \perp CF$;
- (2) 在边 AB 取点 M , 使得 $AM = AF$, 过点 M 作 $MN \parallel BE$ 交 CF 于点 N , 连接 AN .
 - ①依题意补全图形;
 - ②用等式表示线段 AN, FN, MN 之间的数量关系, 并证明.

10、(2024 北京门头沟八下期末) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是边 AD 上的一点 (不与 A, D 重合), 连接 CE , 点 B 关于直线 CE 的对称点是点 F , 连接 CF, DF , 直线 CE 与直线 DF 交于点 P , 连接 BF 与直线 CE 交于点 Q .



- (1) 依题意补全图形;
- (2) 求 $\angle CPF$ 的度数;
- (3) 用等式表示线段 PC, PD, PF 之间的数量关系, 并证明.

11、(2024 北京昌平八下期末) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 和 F 分别在 AB 和 BC 上, 且关于 BD 对称, 连接 AF, EF , 过点 F 作 $FG \perp AF$, 点 G 在 AF 的右侧, 且 $FG = AF$, 连接 AG 交 BD 于 H , 连接 CG .



- (1) 请依题意补全图形, 求证: $EF = CG$;
- (2) 猜想 AH, GH 的数量关系并证明.

12、(2024 北京海淀八下期末) 如图 1, AC 和 BD 是 $\square ABCD$ 的对角线, $AB=BD$. 点 E 为射线 BD 上的一点, 连接 AE .

(1) 当点 E 在线段 BD 的延长线上, 且 $DE=BD$ 时,

①依题意补全图 1;

②求证: $AE=AC$;

(2) 如图 2, 当点 E 在线段 BD 上, 且 $\angle AEB=2\angle ACD$ 时, 用等式表示线段 AE , BE 和 AB 的数量关系, 并证明.

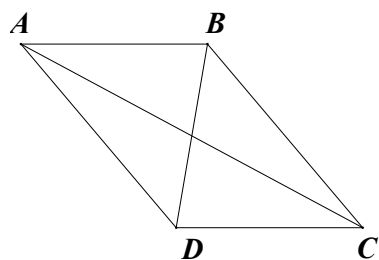


图 1

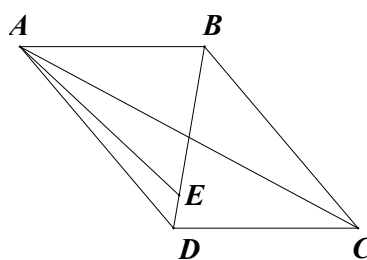
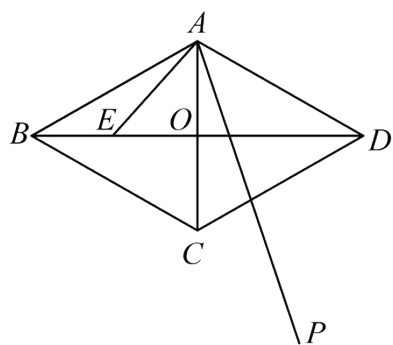


图 2

13、(2024 北京怀柔八下期末) 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 2\alpha$ ($45^\circ < \alpha < 90^\circ$),

对角线 AC , BD 相交于点 O , E 是 OB 的中点, 连接 AE . 过点 A 作射线 AP , 使得 $\angle EAP = \alpha$, 过点 E 作 $EF \perp AE$ 交射线 AP 于点 F .

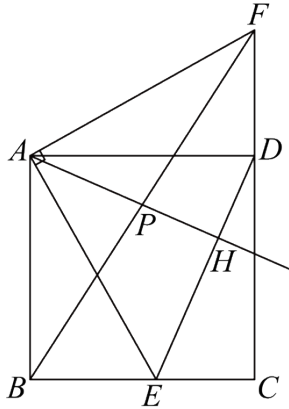


(1) ①依题意补全图形;

②求证: $\angle EAC = \angle DAF$;

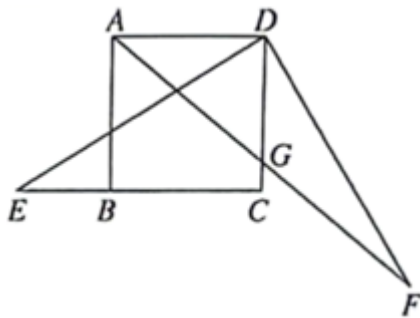
(2) 连接 OF , DF , 用等式表示线段 OF , DF 之间的数量关系, 并证明.

14、(2024 北京丰台八下期末) 如图, E 是正方形 $ABCD$ 边 BC 上一动点 (不与点 B, C 重合), 连接 AE , 过点 A 作 AE 的垂线交 CD 的延长线于点 F .



- (1) 求证: $AE = AF$;
- (2) 连接 BF, DE , 取 BF 中点 P , 连接 AP 并延长, 交 DE 于点 H , 依题意补全图形, 直接写出 $\angle AHE$ 的大小, 并证明.

15、(2024 北京通州八下期末) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是边 CB 延长线上一点, 连接 DE , 过点 D 作 $DF \perp DE$ 且 $DF = DE$, 连接 AF 交边 DC 于点 G .

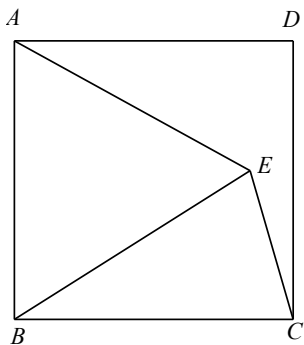


- (1) 求证: $\angle E = \angle GDF$;
- (2) 用等式表示线段 DG 与 EC 之间的数量关系, 并证明.

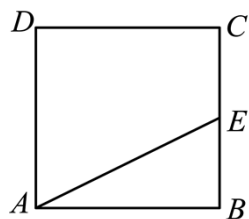
16、(2024 北京延庆八下期末) 如图, 点 E 是正方形 $ABCD$ 内部一点, $BE=BA$, 连接 AE , CE , 过点 C 作 $CF \perp AE$ 交 AE 的延长线于点 F .

(1) 依题意补全图形, 求 $\angle CEF$ 的度数;

(2) 连接 DF , 用等式表示线段 AF , DF , CF 之间的数量关系, 并证明.



17、(2024 北京房山八下期末) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 在 BC 边上 (与点 B , C 不重合), 连接 AE 过点 E 作 AE 的垂线, 交 DC 于点 M , 延长 EM 到点 F , 使 $EF = AE$, 连接 FC .



(1) 依题意补全图形;

(2) 用等式表示线段 BE 与 CF 的数量关系, 并证明.

18、(2024 北京燕山八下期末) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $CA = CB$, $\angle C = 90^\circ$, 点 D 在直线 CA 上 (点 D 与点 A 、点 C 不重合), 连接 BD , 过点 D 作 DB 的垂线交直线 AB 于点 E , 过点 A 作 AB 的垂线交直线 DE 于点 F .

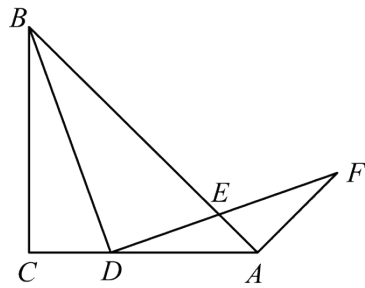


图1

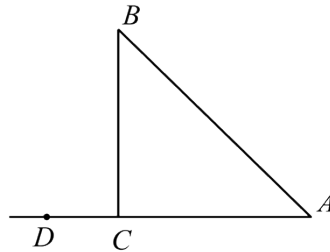


图2

(1) 如图 1, 当点 D 在线段 CA 上时,

①求证: $\angle ABD = \angle AFD$;

②用等式表示线段 AB , AD , AF 之间的数量关系并证明.

(2) 如图 2, 当点 D 在射线 AC 上时, 依题意补全图形, 并直接用等式表示线段 AB , AD , AF 之间的数量关系.

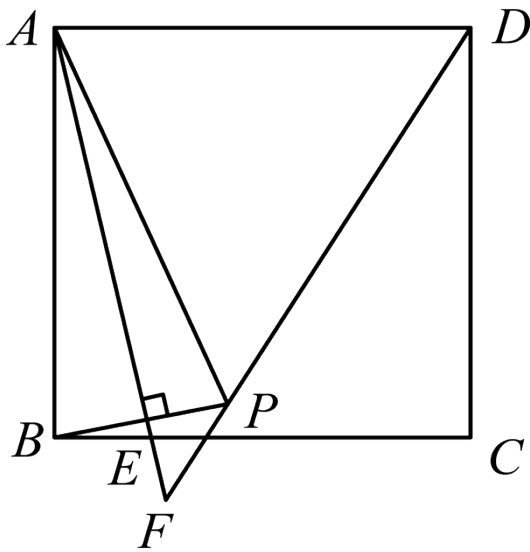
参考答案

1、【答案】(1) 补全图形见解析，① $\angle ADP = 45^\circ + \alpha$ ；② $\sqrt{2}AF = 2PF + PD$ ，证明见解析

(2) $\sqrt{5}$

【解析】

(1) 解：补全图形如下：



① \because 点 P 与点 B 关于直线 AE 对称

$\therefore AE$ 垂直平分 BP ， $AB = AP$ ，且 $\angle PAE = \angle BAE = \alpha$ ，

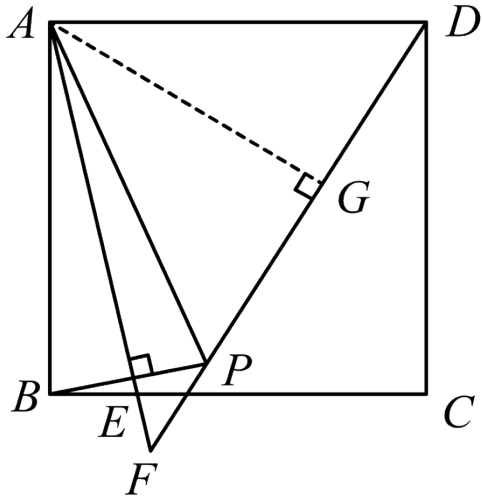
\because 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB = AD$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ，

$\therefore AP = AD$ ， $\angle PAD = \angle BAD - \angle BAE - \angle PAE = 90^\circ - 2\alpha$ ，

$\therefore \angle ADP = \angle APD = (180^\circ - \angle PAD) \div 2 = 45^\circ + \alpha$.

② 过点 A 作 $AG \perp DF$ 于点 G ，如下图：则 $\angle AGF = 90^\circ$



$$\because AP = AD,$$

$$\therefore PG = \frac{1}{2}PD,$$

$$\because \angle APD = \angle F + \angle PAF,$$

由①可知, $\angle APD = 45^\circ + \alpha$, $\angle PAF = \alpha$,

$$\therefore \angle F = 45^\circ$$

$$\therefore \angle GAF = \angle F = 45^\circ,$$

$$\therefore AG = FG$$

在 $Rt\triangle AGF$ 中, $AF = \sqrt{AG^2 + FG^2} = \sqrt{2}FG$,

$$\therefore AF = \sqrt{2}(PF + PG) = \sqrt{2}\left(PF + \frac{1}{2}PD\right),$$

即 $\sqrt{2}AF = 2PF + PD$.

(2) 由对称性得 $AE \perp BP$, $BF = PF$, $BE = PE$,

$$\because PC \parallel AE,$$

$$\therefore BP \perp PC,$$

$$\because BE = PE,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\because \angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 3,$$

则 $BE = EP = EC$,

$$\therefore E \text{ 为 } BC \text{ 的中点,}$$

$$\because BC = AB = 2,$$

$$\therefore BE = 1,$$

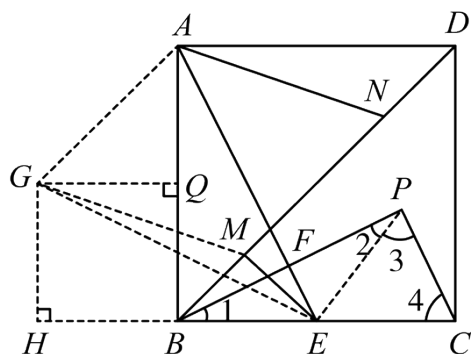
过点 A 作 $AG \parallel MN$ ，且 $AG = MN$ ，

则四边形 $AGMN$ 为平行四边形，

$$\therefore AG = MN, AN = GM,$$

$\therefore EM + AN$ 的最小值就等于 $EM + GM$ ，

\therefore 当点 G, M, E 三点共线时， $EM + GM$ 取最小值，



$$\because BN = BM + \sqrt{2},$$

$$\therefore AG = MN = \sqrt{2},$$

过点 G 作 $GQ \perp AB$ 交 AB 于点 Q ，作 $GH \perp CB$ 交 CB 延长线于点 H ，

则四边形 $GQBH$ 为矩形，

$$\therefore GH = QB, GQ = HB,$$

$$\because \angle ABD = 45^\circ, AG \parallel MN,$$

$$\therefore AQ = GQ = 1,$$

$$\because AB = 2,$$

$$\therefore GH = QB = 1, HB = GQ = 1,$$

$$\therefore GE = \sqrt{GH^2 + HE^2} = \sqrt{5},$$

则 $EM + AN$ 的最小值为 $\sqrt{5}$ 。

2、【答案】(1) 12 尺 (2) 见解析

【解析】

(1) 解：设水池深度为 x 尺，则芦苇高度为 $OC = OD + CD = (x+1)$ 尺，

由题意有： $OE = OC = (x+1)$ 尺；

QO 为 AB 中点，且 $AB = 1$ 丈 = 10 尺，

$$\therefore OA = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 10 = 5 \text{ (尺)};$$

在 $\text{Rt}\triangle EAO$ 中，由勾股定理得： $AE^2 + OA^2 = OE^2$ ，

$$\text{即 } x^2 + 5^2 = (x+1)^2,$$

解得： $x = 12$ ；

即 $OD = 12$ 尺；

答：水池的深度 OD 为 12 尺；

(2) 证明：水池深度 $OD = b$ ，则芦苇高度为 $OC = OD + CD = b + n$ ，

由题意有： $OE = OC = b + n$ ；

QO 为 AB 中点，且 $AB = 2a$ ，

$$\therefore OA = \frac{1}{2} AB = a;$$

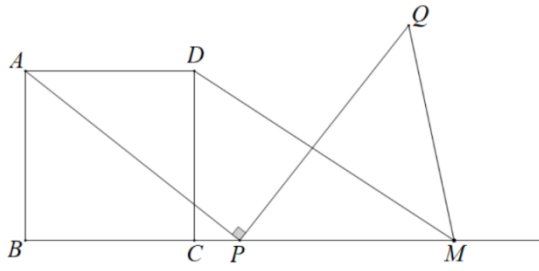
在 $\text{Rt}\triangle EAO$ 中，由勾股定理得： $AE^2 + OA^2 = OE^2$ ，

$$\text{即 } b^2 + a^2 = (b+n)^2,$$

$$\text{整理得： } b = \frac{a^2 - n^2}{2n};$$

表明刘徽解法是正确的.

3、【答案】(1) 补全图形



(2) 猜想: $MD = \sqrt{2} MQ$

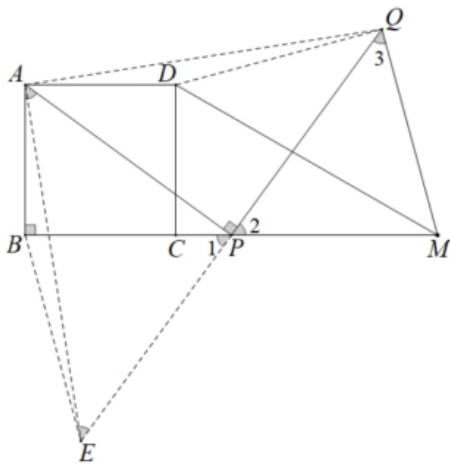
证明: 连接 DQ, AQ , 延长 QP 到点 E , 使得 $PE = PQ$, 连接 AE, BE

$\because P$ 为 BM 中点,

$\therefore PB = PM$.

又 $\because \angle 1 = \angle 2$, $PE = PQ$,

$\therefore \triangle PBE \cong \triangle PMQ$.



$\therefore BE = MQ$ $\angle BEP = \angle 3$.

$\because PQ \perp AP$, 且 $PQ = AP$,

$\therefore \angle PQA = \angle PAQ = 45^\circ$.

$\because PQ \perp AP$, $PE = PQ$,

$\therefore AP$ 是 QE 的垂直平分线.

$\therefore AE = AQ$.

$\therefore \angle AEQ = \angle PQA = 45^\circ$.

$\therefore \angle EAQ = 90^\circ$.

\because 四边形 $ABCD$ 是正方形.

$\therefore AB = AD$. $\angle BAD = 90^\circ$.

$$\therefore \angle BAD - \angle EAD = \angle EAQ - \angle EAD$$

即 $\angle BAE = \angle DAQ$.

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADQ$$

$$\therefore BE = DQ, \quad \angle AEB = \angle AQD.$$

$$\therefore DQ = MQ.$$

设 $\angle AEB = \angle AQD = \alpha$, 则 $\angle DQP = 45^\circ - \alpha$, $\angle BEP = 45^\circ + \alpha$

$$\therefore \angle 3 = \angle BEP,$$

$$\therefore \angle 3 = 45^\circ + \alpha.$$

$$\therefore \angle DQM = \angle DQP + \angle 3 = 90^\circ.$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle QDM \text{ 中 } MD^2 = DQ^2 + MQ^2 = 2MQ^2$$

$$\therefore MD = \sqrt{2}MQ$$

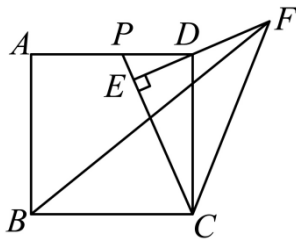
$$(3) CQ = 7$$

4、【答案】(1) 见解析 (2) 45°

(3) $BF^2 = 4EF^2 + DF^2$, 理由见解析.

【解析】

(1) 解: 如图所示,



(2) 解: $\because DE \perp CP$,

$$\therefore \angle EFC + \angle ECF = 90^\circ,$$

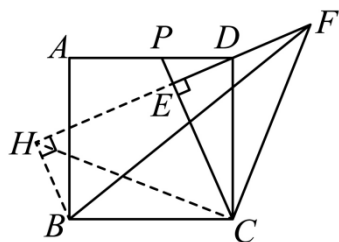
$$\because EF = EC,$$

$$\therefore \angle EFC = \angle ECF = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ,$$

故答案为: 45° ;

(3) 解: $BF^2 = 4EF^2 + DF^2$, 理由如下:

过点 C 作 $CH \perp EF$, 交 FE 的延长线于点 H , 连接 BH ,



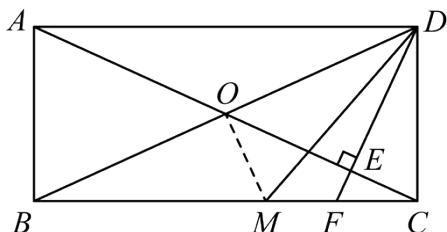
\because 四边形 $ABCD$ 是正方形, $CH \perp EF$,
 $\therefore \angle BCD = \angle HCF = 90^\circ$, $BC = CD$,
 $\therefore \angle BCH = \angle DCH$,
 $\because \angle ECF = \angle EFC = 45^\circ$, $\angle HCF = 90^\circ$,
 $\therefore \angle HCE = \angle FCE = 45^\circ$,
 $\therefore HE \perp CE$,
 $\therefore \angle EHC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle ECH$,
 $\therefore HE = CE = EF$,
 $\therefore HF = 2EF$,
 $\because CE \perp HF$,
 $\therefore CH = CF$,
 $\therefore \triangle CBH \cong \triangle CDF$ (SAS)
 $\therefore BH = DF$, $\angle BHC = \angle DFC = 45^\circ$,
 $\therefore \angle BHF = \angle BHC + \angle CHE = 90^\circ$,
 $\therefore BF^2 = BH^2 + HF^2 = 4EF^2 + DF^2$.

5、27. 【答案】(1) ①作图见解析, 证明见解析; ②证明见解析

(2) 补全图形见解析, $DA = CM + FM$, 证明见解析

【解析】

(1) 解: ①补全图形如下:



证明：∵ $DE \perp AC$ ，

$$\therefore \angle EDC + \angle DCE = 90^\circ .$$

∵ 矩形 $ABCD$

$$\therefore \angle DAC + \angle DCE = 90^\circ .$$

$$\therefore \angle DAC = \angle EDC ;$$

②如图：连接 OM ，

∵ 矩形 $ABCD$

$$\therefore AO = OD = OB = OC , AD \parallel BC ,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA , \angle OBC = \angle OCB$$

$$\therefore \angle OAD = \angle OCB ,$$

$$\therefore \angle DMC = 2\angle DAO ,$$

$$\therefore \angle DMC = 2\angle OCB ,$$

$$\therefore \angle DMC = \angle OCB + \angle ODM ,$$

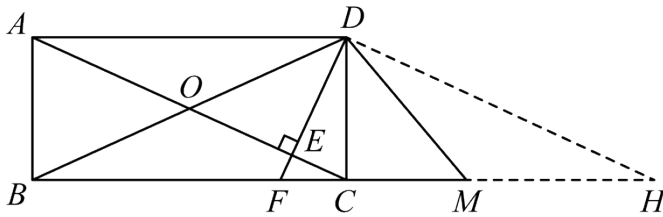
$$\therefore \angle OCB = \angle ODM ,$$

$$\therefore BM = MD ,$$

∵ O 为 BD 中点

$$\therefore MO \perp BD .$$

(2) 解：当 M 在 BC 延长线上时，根据题意补全图形如下：



数量关系 $AD = CM + FM$ ，证明如下：

证明：如图：过点 D 作 $DH \parallel AC$ 交 BM 的延长线于点 N ，

∵ 矩形 $ABCD$ ，

$$\therefore AD \parallel CH$$

又∵ $DH \parallel AC$ ，

∴ 四边形 $ACHD$ 为平行四边形

$$\therefore AD = CH, \angle DAC = \angle H ,$$

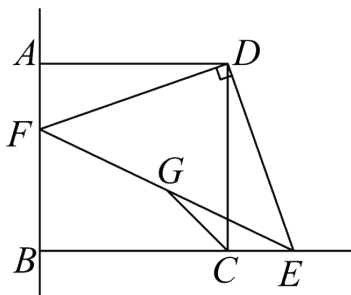
$\because \angle DMC = 2\angle DAO,$
 $\therefore \angle DMC = 2\angle H,$
 $\because \angle DMC = \angle H + \angle MDH,$
 $\therefore \angle H = \angle MDH,$
 $\therefore DM = MH,$
 $\because DE \perp AC,$
 $\therefore \angle DEC = 90^\circ.$
 $\because DH \parallel AC,$
 $\therefore \angle EDH = 90^\circ,$
 $\because \angle H + \angle DFC = 90^\circ, \angle MDH + \angle MDF = 90^\circ,$
 $\therefore \angle DFC = \angle FDM,$
 $\therefore DM = FM,$
 $\therefore FM = MH,$
 $\therefore AD = CM + FM.$

6、【答案】(1) ①见解析；②见解析；③ $CG = \frac{\sqrt{2}}{2}(CD - CE)$ ，理由见解析；

(2) $CG = \frac{\sqrt{2}}{2}(CE - CD)$ ，理由见解析.

【解析】

(1) 解：①如图即为所求，



②证明： \because 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AD = CD = AB = BC, \angle ADC = \angle BCD = \angle BAD = \angle ABC = 90^\circ,$

$\therefore \angle DCE = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ = \angle DAF,$

$\because DF \perp DE$,

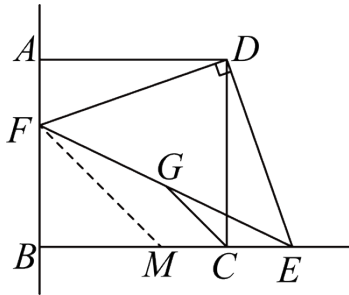
$\therefore \angle FDE = \angle ADC = 90^\circ$, 即 $\angle ADF + \angle FDC = \angle FDC + \angle CDE = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADF = \angle CDE$,

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CDE$ (ASA);

③ $CG = \frac{\sqrt{2}}{2}(CD - CE)$, 理由如下:

在 BC 上取一点 M , 使得 $CM = CE$, 连接 FM ,



$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CDE$ (ASA),

$\therefore AF = CE$;

$\because CE = CM$, 点 G 是 EF 的中点,

$\therefore CG$ 是 $\triangle EFM$ 的中位线,

$\therefore CG = \frac{1}{2}FM$,

由②得 $AB = BC$, $CE = AF$, $\angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore AF + BF = BM + CM$, $CM = CE = AF$,

$\therefore BF = BM$,

$\because \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore FM = \sqrt{BF^2 + BM^2} = \sqrt{2}BF = \sqrt{2}(AB - AF) = \sqrt{2}(CD - CE)$,

$\therefore CG = \frac{1}{2}FM = \frac{\sqrt{2}}{2}(CD - CE)$;

(2) 解: $CG = \frac{\sqrt{2}}{2}(CE - CD)$, 理由如下:

在 CB 延长线上取一点 M , 使得 $CM = CE$, 连接 FM ,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/636052111021010204>