

历届全国大学生数学竞赛 真题及答案非数学类

高数竞赛预赛试题（非数学类）

（参加高等数学竞赛的同学最重要的是好好复习高等数学知识，适当看一些辅导书及相关题目，主要是一些各大高校的试题。）

2009 年第一届全国大学生数学竞赛预赛试卷

一、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 计算 $\iint_D \frac{(x+y) \ln(1+\frac{y}{x})}{\sqrt{1-x-y}} dx dy = \square$ ，其中区域 D 由直线

$x+y=1$ 与两坐标轴所围成三角形区域.

解: 令 $x+y=u, x=v$, 则 $x=v, y=u-v$, $dx dy = \left| \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right| du dv = du dv$,

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{(x+y) \ln(1+\frac{y}{x})}{\sqrt{1-x-y}} dx dy &= \iint_D \frac{u \ln u - u \ln v}{\sqrt{1-u}} du dv \\ &= \int_0^1 \left(\frac{u \ln u}{\sqrt{1-u}} \int_0^u dv - \frac{u}{\sqrt{1-u}} \int_0^u \ln v dv \right) du \\ &= \int_0^1 \frac{u^2 \ln u}{\sqrt{1-u}} - \frac{u(u \ln u - u)}{\sqrt{1-u}} du \\ &= \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u}} du \quad (*) \end{aligned}$$

令 $t = \sqrt{1-u}$, 则 $u = 1-t^2$

$du = -2t dt$, $u^2 = 1 - 2t^2 + t^4$, $u(1-u) = t^2(1-t)(1+t)$,

$$\begin{aligned} (*) &= -2 \int_1^0 (1 - 2t^2 + t^4) dt \\ &= 2 \int_0^1 (1 - 2t^2 + t^4) dt = 2 \left[t - \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 \right]_0^1 = \frac{16}{15} \end{aligned}$$

2. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且满足 $f(x) = 3x^2 - \int_0^2 f(x) dx - 2$, 则 $f(x) = \square$.

解: 令 $A = \int_0^2 f(x) dx$, 则 $f(x) = 3x^2 - A - 2$,

$$A = \int_0^2 (3x^2 - A - 2) dx = 8 - 2(A + 2) = 4 - 2A,$$

解得 $A = \frac{4}{3}$. 因此 $f(x) = 3x^2 - \frac{10}{3}$.

3. 曲面 $z = \frac{x^2}{2} + y^2 - 2$ 平行平面 $2x + 2y - z = 0$ 的切平面方程是_____.

解: 因平面 $2x + 2y - z = 0$ 的法向量为 $(2, 2, -1)$, 而曲面 $z = \frac{x^2}{2} + y^2 - 2$ 在

(x_0, y_0) 处的法向量为 $(z_x(x_0, y_0), z_y(x_0, y_0), -1)$, 故

$(z_x(x_0, y_0), z_y(x_0, y_0), -1)$ 与 $(2, 2, -1)$ 平行, 因此, 由 $z_x = x$, $z_y = 2y$

知 $2 = z_x(x_0, y_0) = x_0, 2 = z_y(x_0, y_0) = 2y_0$,

即 $x_0 = 2, y_0 = 1$, 又 $z(x_0, y_0) = z(2, 1) = 5$, 于是曲面 $2x + 2y - z = 0$ 在

$(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$ 处的切平面方程是 $2(x - 2) + 2(y - 1) - (z - 5) = 0$,

即曲面 $z = \frac{x^2}{2} + y^2 - 2$ 平行平面

$2x + 2y - z = 0$ 的切平面方程是 $2x + 2y - z - 1 = 0$ 。

4. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)} = e^y \ln 29$ 确定, 其中 f 具有二阶导数, 且

$f' \neq 1$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \underline{\hspace{1cm}}$.

解: 方程 $xe^{f(y)} = e^y \ln 29$ 的两边对 x 求导, 得

$$e^{f(y)} + xf'(y)y'e^{f(y)} = e^y y' \ln 29$$

因 $e^y \ln 29 = xe^{f(y)}$, 故 $\frac{1}{x} + f'(y)y' = y'$, 即 $y' = \frac{1}{x(1-f'(y))}$, 因此

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' &= -\frac{1}{x^2(1-f'(y))} + \frac{f'(y)y'}{x[1-f'(y)]^2} \\ &= \frac{f'(y)}{x^2[1-f'(y)]^3} - \frac{1}{x^2(1-f'(y))} = \frac{f'(y) - [1-f'(y)]^2}{x^2[1-f'(y)]^3} \end{aligned}$$

二、(5 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \Lambda + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{e}{x}}$ 其中 n 是给定的正整数.

解: 因

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \Lambda + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{e}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{e^x + e^{2x} + \Lambda + e^{nx} - n}{n} \right)^{\frac{e}{x}}$$

故

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{2x} + \Lambda + e^{nx} - n}{n} \cdot \frac{e}{x} \\ &= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{2x} + \Lambda + e^{nx} - n}{nx} \\ &= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2e^{2x} + \Lambda + ne^{nx}}{n} = e \frac{1 + 2 + \Lambda + n}{n} = \frac{n+1}{2} e \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{e}{x}} = e^A = e^{\frac{n+1}{2}e}$$

三、(15分) 设函数 $f(x)$ 连续, $g(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$, A 为常数, 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

$$\text{解: 由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A \text{ 和函数 } f(x) \text{ 连续知, } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$$\text{因 } g(x) = \int_0^1 f(xt)dt, \text{ 故 } g(0) = \int_0^1 f(0)dt = f(0) = 0,$$

因此, 当 $x \neq 0$ 时, $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(u)du$, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)du}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1} = f(0) = 0$$

当 $x \neq 0$ 时,

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(u)du + \frac{f(x)}{x}$$

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x^2} \int_0^x f(u)du + \frac{f(x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(u)du = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2}$$

这表明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

四、(15分) 已知平面区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$, L 为 D 的正向边界, 试证:

$$(1) \int_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \int_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx;$$

$$(2) \int_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx \geq \frac{5}{2} \pi^2.$$

证: 因被积函数的偏导数连续在 D 上连续, 故由格林公式知

$$(1) \int_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (x e^{\sin y}) - \frac{\partial}{\partial y} (-y e^{-\sin x}) \right] dx dy = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) dx dy$$

$$\int_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (x e^{-\sin y}) - \frac{\partial}{\partial y} (-y e^{\sin x}) \right] dx dy$$

$$= \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x}) dx dy$$

而 D 关于 x 和 y 是对称的, 即知

$$\iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) dx dy = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x}) dx dy$$

因此

$$\int_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \int_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx$$

(2) 因

$$e^t + e^{-t} = 2\left(1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots\right) \geq 2(1 + t^2)$$

故

$$e^{\sin x} + e^{-\sin x} \geq 2 + \sin^2 x = 2 + \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{5 - \cos 2x}{2}$$

由

$$\int_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin y} dx = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) dx dy = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x}) dx dy$$

知

$$\begin{aligned} \int_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin y} dx &= \frac{1}{2} \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) dx dy + \frac{1}{2} \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x}) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin y}) dx dy + \frac{1}{2} \iint_D (e^{-\sin x} + e^{\sin x}) dx dy = \iint_D (e^{-\sin x} + e^{\sin x}) dx dy \\ &= \pi \int_0^\pi (e^{-\sin x} + e^{\sin x}) dx \geq \pi \int_0^\pi \frac{5 - \cos 2x}{2} dx \geq \frac{5}{2} \pi^2 \end{aligned}$$

$$\text{即 } \int_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin y} dx \geq \frac{5}{2} \pi^2$$

五、(10 分) 已知 $y_1 = x e^x + e^{2x}$, $y_2 = x e^x + e^{-x}$, $y_3 = x e^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解, 试求此微分方程.

解 设 $y_1 = x e^x + e^{2x}$, $y_2 = x e^x + e^{-x}$, $y_3 = x e^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是二阶常系数线性非齐次微分方程

$$y'' + by' + cy = f(x)$$

的三个解, 则 $y_2 - y_1 = e^{-x} - e^{2x}$ 和 $y_3 - y_1 = e^{-x}$ 都是二阶常系数线性齐次微分方程

$$y'' + by' + cy = 0$$

的解, 因此 $y'' + by' + cy = 0$ 的特征多项式是 $(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$, 而

$y'' + by' + cy = 0$ 的特征多项式是

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

因此二阶常系数线性齐次微分方程为 $y'' - y' - 2y = 0$, 由 $y_1' - y_1' - 2y_1 = f(x)$ 和

$$y_1' = e^x + xe^x + 2e^{2x}, \quad y_1' = 2e^x + xe^x + 4e^{2x}$$

$$\begin{aligned} \text{知, } f(x) &= y_1' - y_1' - 2y_1 = xe^x + 2e^x + 4e^{2x} - (xe^x + e^x + 2e^{2x}) - 2(xe^x + e^{2x}) \\ &= (1 - 2x)e^x \end{aligned}$$

二阶常系数线性非齐次微分方程为

$$y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$$

六、（10分） 设抛物线 $y = ax^2 + bx + 2 \ln c$ 过原点. 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $y \geq 0$, 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a, b, c , 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积最小.

解 因抛物线 $y = ax^2 + bx + 2 \ln c$ 过原点, 故 $c = 1$, 于是

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 (ax^2 + bx) dx = \left[\frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2}$$

即

$$b = \frac{2}{3}(1 - a)$$

而此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积

$$\begin{aligned} V(a) &= \pi \int_0^1 (ax^2 + bx)^2 dx = \pi \int_0^1 \left(ax^2 + \frac{2}{3}(1-a)x \right)^2 dx \\ &= \pi a^2 \int_0^1 x^4 dx + \pi \frac{4}{3} a(1-a) \int_0^1 x^3 dx + \pi \frac{4}{9} (1-a)^2 \int_0^1 x^2 dx \\ &= \frac{1}{5} \pi a^2 + \pi \frac{1}{3} a(1-a) + \pi \frac{4}{27} (1-a)^2 \end{aligned}$$

即

$$V(a) = \frac{1}{5} \pi a^2 + \pi \frac{1}{3} a(1-a) + \pi \frac{4}{27} (1-a)^2$$

令

$$V'(a) = \frac{2}{5} \pi a + \pi \frac{1}{3} (1-2a) - \pi \frac{8}{27} (1-a) = 0,$$

得

$$54a + 45 - 90a - 40 + 40a = 0$$

即

$$4a + 5 = 0$$

因此

$$a = -\frac{5}{4}, b = \frac{3}{2}, c = 1.$$

七、（15 分）已知 $u_n(x)$ 满足 $u'_n(x) = u_n(x) + x^{n-1}e^x (n = 1, 2, \dots)$, 且 $u_n(1) = \frac{e}{n}$, 求函

数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 之和.

解

$$u'_n(x) = u_n(x) + x^{n-1}e^x,$$

即

$$y' - y = x^{n-1}e^x$$

由一阶线性非齐次微分方程式知

$$y = e^x (C + \int x^{n-1} dx)$$

即

$$y = e^x (C + \frac{x^n}{n})$$

因此

$$u_n(x) = e^x (C + \frac{x^n}{n})$$

由 $\frac{e}{n} = u_n(1) = e(C + \frac{1}{n})$ 知, $C = 0$,

于是

$$u_n(x) = \frac{x^n e^x}{n}$$

下面求级数的和:

令

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n e^x}{n}$$

则

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x^{n-1} e^x + \frac{x^n e^x}{n}) = S(x) + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} e^x = S(x) + \frac{e^x}{1-x}$$

即

$$S'(x) - S(x) = \frac{e^x}{1-x}$$

由一阶线性非齐次微分方程式知

$$S(x) = ex(C + \int \frac{1}{1-x} dx)$$

令 $x = 0$, 得 $0 = S(0) = C$, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和

$$S(x) = -ex \ln(1-x)$$

八、(10 分) 求 $x \rightarrow 1^-$ 时, 与 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

解 令 $f(t) = xt^2$, 则因当 $0 < x < 1$, $t \in (0, +\infty)$ 时, $f'(t) = 2txt \ln x < 0$, 故

$f(t) = xt^2 = e^{-t^2 \ln \frac{1}{x}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调减. 因此

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \leq f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^n f(t) dt = 1 + \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

即

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \leq 1 + \int_0^{+\infty} f(t) dt,$$

又

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \frac{1}{x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x}}{-1} = 1$$

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} xt^2 dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 \ln \frac{1}{x}} dt = \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

所以, 当 $x \rightarrow 1^-$ 时, 与 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量是 $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$.

2010 年 第二届全国大学生数学竞赛预赛试卷

(参加高等数学竞赛的同学最重要的是好好复习高等数学知识, 适当看一些辅导书及相关题目, 主要是一些各大高校的试题。)

一、(25 分, 每小题 5 分)

(1) 设 $x_n = (1+a)(1+a^2)\dots(1+a^{2^n})$, 其中 $|a| < 1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$ 。

(3) 设 $s > 0$, 求 $I = \int_0^{\infty} e^{-sx} x^n dx (n=1, 2, \dots)$ 。

(4) 设函数 $f(t)$ 有二阶连续导数, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $g(x, y) = f\left(\frac{1}{r}\right)$, 求

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

(5) 求直线 $l_1: \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$ 与直线 $l_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ 的距离。

解: (1) $x_n = (1+a)(1+a^2)\dots(1+a^{2^n}) = x_n = (1-a)(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^{2^n}) / (1-a)$

$$= (1-a^2)(1+a^2)\dots(1+a^{2^n}) / (1-a) = \dots = (1-a^{2^{n+1}}) / (1-a)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1-a^{2^{n+1}}) / (1-a) = 1 / (1-a)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - x}$$

令 $x=1/t$, 则

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{(\ln(1+t)-t)}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{1/(1+t)-1}{2t}} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{2(1+t)}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$(3) \begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} e^{-sx} x^n dx = \left(-\frac{1}{s}\right) \int_0^{\infty} x^n de^{-sx} = \left(-\frac{1}{s}\right) [x^n e^{-sx} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-sx} dx n] = \\ &= \frac{n}{s} \int_0^{\infty} e^{-sx} x^{n-1} dx = \frac{n}{s} I_{n-1} = \frac{n!}{s^n} I_0 = \frac{n!}{s^{n+1}} \end{aligned}$$

二、(15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有二阶导数, 并且

$$f'(x) > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \beta < 0, \text{ 且存在一点 } x_0, \text{ 使得 } f(x_0) < 0。$$

证明: 方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 恰有两个实根。

解: 二阶导数为正, 则一阶导数单增, $f(x)$ 先减后增, 因为 $f(x)$ 有小于 0 的值, 所以只需在两边找两大于 0 的值。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/636114205015010105>