

6. 已知圆 $C_1: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$, 圆 $C_2: (x-4)^2 + (y-5)^2 = 9$, 点 M 、 N 分别是圆 C_1 、圆 C_2 上的动点, P 为 x 轴上的动点, 则 $|PN| - |PM|$ 的最大值是 ()

- A. $2\sqrt{5}+4$ B. 9 C. 7 D. $2\sqrt{5}+2$

7. 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化. 每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成, 爻分为阳爻“——”和阴爻“— —”. 如图就是一重卦. 在所有重卦中随机取一重卦, 则该重卦至少有 2 个阳爻的概率是 ()

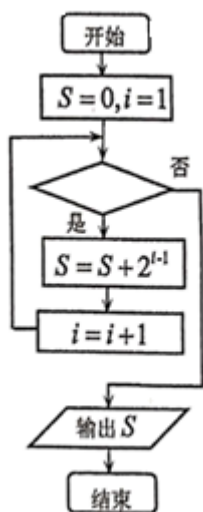


- A. $\frac{7}{64}$ B. $\frac{11}{32}$ C. $\frac{57}{64}$ D. $\frac{11}{16}$

8. 已知等式 $(1-x+x^2)^3 \cdot (1-2x^2)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{14}x^{14}$ 成立, 则 $a_2 + a_4 + \dots + a_{14} =$ ()

- A. 0 B. 5 C. 7 D. 13

9. 执行下面的程序框图, 若输出的 S 的值为 63, 则判断框中可以填入的关于 i 的判断条件是 ()



- A. $i \leq 5$ B. $i \leq 6$ C. $i \leq 7$ D. $i \leq 8$

10. 设点 $A(t, 0)$, P 为曲线 $y = e^x$ 上动点, 若点 A, P 间距离的最小值为 $\sqrt{6}$, 则实数 t 的值为 ()

- A. $\sqrt{5}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $2 + \frac{\ln 2}{2}$ D. $2 + \frac{\ln 3}{2}$

11. 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点若双曲线上存在点 P , 使 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 且

$|PF_1| = 2|PF_2|$, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{6}$

12. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{8}, q = 2$, 则 a_4 与 a_8 的等比中项是 ()

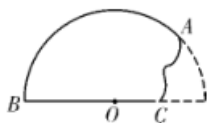
- A. ± 4 B. 4 C. $\pm \frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{4}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过椭圆的右焦点 F_2 作一条直线 l 交椭圆于点 P, Q . 则 $\triangle F_1PQ$ 内切圆面积的最大值是_____.

14. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线与双曲线左支交于 A, B 两点, $\angle AF_2B = 90^\circ$, $\triangle AF_2B$ 的内切圆的圆心的纵坐标为 $\frac{\sqrt{7}}{2}a$, 则双曲线的离心率为_____.

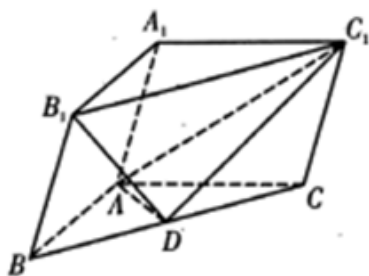
15. 如图, 已知一块半径为 2 的残缺的半圆形材料 ABC , O 为半圆的圆心, $OC = \frac{6}{5}$, 残缺部分位于过点 C 的竖直线的右侧, 现要在这块材料上裁出一个直角三角形, 若该直角三角形一条边在 BC 上, 则裁出三角形面积的最大值为_____.



16. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 $F_1(-2, 0)$, 点 $A(0, \sqrt{5})$, 点 P 为双曲线右支上的动点, 且 $\triangle APF_1$ 周长的最小值为 8, 则双曲线的实轴长为_____, 离心率为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = BB_1 = 2$, D 是 BC 的中点, $\angle B_1BA = 60^\circ$, $B_1D \perp AB$.



(1) 求证: $AB \perp AC$;

(2) 若侧面 ACC_1A_1 为正方形, 求直线 B_1D 与平面 C_1AD 所成角的正弦值.

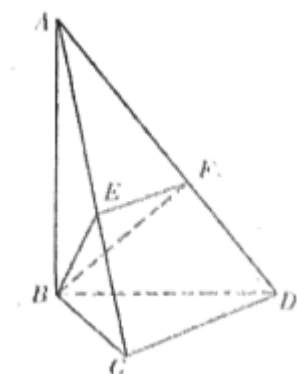
18. (12 分)

某大型公司为了切实保障员工的健康安全，贯彻好卫生防疫工作的相关要求，决定在全公司范围内举行一次 NCP 普查，为此需要抽验 1000 人的血样进行化验，由于人数较多，检疫部门制定了下列两种可供选择的方案. 方案①：将每个人的血分别化验，这时需要验 1000 次. 方案②：按 k 个人一组进行随机分组，把从每组 k 个人抽来的血混合在一起进行检验，如果每个人的血均为阴性，则验出的结果呈阴性，这 k 个人的血只需检验一次（这时认为每个人的血化验 $\frac{1}{k}$ 次）；否则，若呈阳性，则需对这 k 个人的血样再分别进行一次化验，这样，该组 k 个人的血总共需要化验 $k+1$ 次. 假设此次普查中每个人的血样化验呈阳性的概率为 p ，且这些人之间的试验反应相互独立.

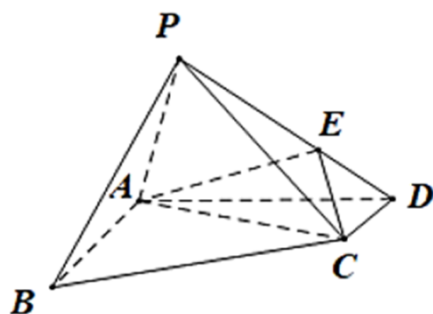
- (1) 设方案②中，某组 k 个人的每个人的血化验次数为 X ，求 X 的分布列；
- (2) 设 $p = 0.1$ ，试比较方案②中，分别取 2, 3, 4 时，各需化验的平均总次数；并指出在这三种分组情况下，相比方案①，化验次数最多可以平均减少多少次？（最后结果四舍五入保留整数）

19. (12 分) 如图， $\angle BCD = 90^\circ$, $BC = CD = 1$, $AB \perp$ 平面 BCD , $\angle ADB = 60^\circ$, E, F 分别是 AC, AD 上的动点，且

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AD}.$$



- (1) 若平面 BEF 与平面 BCD 的交线为 l ，求证： $EF \parallel l$ ；
 - (2) 当平面 $BEF \perp$ 平面 ACD 时，求平面 BEF 与 BCD 平面所成的二面角的余弦值.
20. (12 分) 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面为直角梯形， $AB \parallel CD$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $AB = 2CD = 4$ ， $PA \perp CD$ ，在锐角 $\triangle PAD$ 中， E 是边 PD 上一点，且 $AD = PD = 3ED = 3\sqrt{2}$.



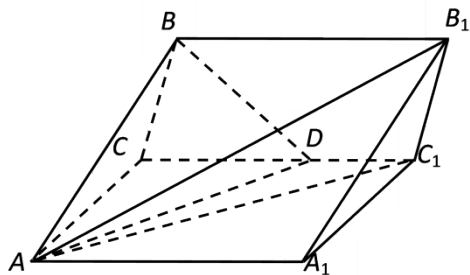
- (1) 求证： $PB \parallel$ 平面 ACE ；
- (2) 当 PA 的长为何值时， AC 与平面 PCD 所成的角为 30° ？

21. (12 分) 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_2 = 5$, $S_6 + S_5 = 2S_4 + 35$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若满足不等式 $\lambda \cdot (\sqrt{2})^n + (-1)^{n-1} S_n < 0$ 的正整数 n 恰有 3 个, 求正实数 λ 的取值范围.

22. (10 分) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 已知四边形 AA_1C_1C 为矩形, $AA_1 = 6$, $AB = AC = 4$, $\angle BAC = \angle BAA_1 = 60^\circ$, $\angle A_1AC$ 的角平分线 AD 交 CC_1 于 D .



(1) 求证: 平面 $BAD \perp$ 平面 AA_1C_1C ;

(2) 求二面角 $A-B_1C_1-A_1$ 的余弦值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

分析: 根据等比数列的定义可知每一个单音的频率成等比数列, 利用等比数列的相关性质可解.

详解: 因为每一个单音与前一个单音频率比为 $\sqrt[12]{2}$,

所以 $a_n = \sqrt[12]{2} a_{n-1} (n \geq 2, n \in N_+)$,

又 $a_1 = f$, 则 $a_8 = a_1 q^7 = f(\sqrt[12]{2})^7 = \sqrt[12]{2^7} f$

故选 D.

点睛: 此题考查等比数列的实际应用, 解决本题的关键是能够判断单音成等比数列. 等比数列的判断方法主要有如下两种:

(1) 定义法, 若 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ ($q \neq 0, n \in N^*$) 或 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ ($q \neq 0, n \geq 2, n \in N^*$), 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列;

(2) 等比中项公式法, 若数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n \neq 0$ 且 $a_{n-1}^2 = a_n \cdot a_{n-2}$ ($n \geq 3, n \in N^*$), 则数列 $\{a_n\}$ 是等比数列.

2、D

【解析】

根据 AB 中点在 y 轴上, 设出 A, B 两点的坐标 $A(-t, t^3 + t^2)$, $B(t, f(t))$, ($t > 0$). 对 t 分成 $t < 1, t = 1, t > 1$ 三类, 利用 $OA \perp OB$ 则 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$, 列方程, 化简后求得 $a = \frac{t}{\ln t}$, 利用导数求得 $\frac{t}{\ln t}$ 的值域, 由此求得 a 的取值范围.

【详解】

根据条件可知 A, B 两点的横坐标互为相反数, 不妨设 $A(-t, t^3 + t^2)$, $B(t, f(t))$, ($t > 0$), 若 $t < 1$, 则

$f(t) = -t^3 + t^2$, 由 $OA \perp OB$, 所以 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$, 即 $-t^2 + (t^3 + t^2)(-t^3 + t^2) = 0$, 方程无解; 若 $t = 1$, 显然不满足

$OA \perp OB$; 若 $t > 1$, 则 $f(t) = \frac{a \ln t}{t(t+1)}$, 由 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$, 即 $-t^2 + (t^3 + t^2) \frac{a \ln t}{t(t+1)} = 0$, 即 $a = \frac{t}{\ln t}$, 因为

$\left(\frac{t}{\ln t}\right)' = \frac{\ln t - 1}{(\ln t)^2}$, 所以函数 $\frac{t}{\ln t}$ 在 $(0, e)$ 上递减, 在 $(e, +\infty)$ 上递增, 故在 $t = e$ 处取得极小值也即是最小值 $\frac{e}{\ln e} = e$,

所以函数 $y = \frac{t}{\ln t}$ 在 $(1, +\infty)$ 上的值域为 $[e, +\infty)$, 故 $a \in [e, +\infty)$. 故选 D.

【点睛】

本小题主要考查平面平面向量数量积为零的坐标表示, 考查化归与转化的数学思想方法, 考查利用导数研究函数的最小值, 考查分析与运算能力, 属于较难的题目.

3、B

【解析】

根据两个函数相等, 求出所有交点的横坐标, 然后求和即可.

【详解】

令 $\sin x = \cos 2x$, 有 $\sin x = 1 - 2\sin^2 x$, 所以 $\sin x = -1$ 或 $\sin x = \frac{1}{2}$. 又 $x \in [-\pi, 2\pi]$, 所以 $x = -\frac{\pi}{2}$ 或 $x = \frac{3\pi}{2}$ 或

$x = \frac{\pi}{6}$ 或 $x = \frac{5\pi}{6}$, 所以函数 $f(x) = \cos 2x$ ($x \in [-\pi, 2\pi]$) 的图象与函数 $g(x) = \sin x$ 的图象交点的横坐标的和

$s = -\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = 2\pi$, 故选 B.

【点睛】

本题主要考查三角函数的图象及给值求角, 侧重考查数学建模和数学运算的核心素养.

4、D

【解析】

先用复数的除法运算将复数 z 化简，然后用模长公式求 z 模长.

【详解】

$$\text{解: } z = \frac{2-i}{1+3i} = \frac{(2-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{-1-7i}{10} = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i,$$

$$\text{则 } |z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{10}\right)^2 + \left(-\frac{7}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{100}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故选: D.

【点睛】

本题考查复数的基本概念和基本运算,属于基础题.

5、A

【解析】

先由题和抛物线的性质求得点 P 的坐标和双曲线的半焦距 c 的值，再利用双曲线的定义可求得 a 的值，即可求得离心率.

【详解】

由题意知，抛物线焦点 $F(1,0)$ ，准线与 x 轴交点 $G(-1,0)$ ，双曲线半焦距 $c=1$ ，设点 $A(-1, \frac{1}{2})$ 是以点 F 为直角顶点的等腰直角三角形，即 $|AF|=|FG|$ ，结合 A 点在抛物线上，

所以 $AF \perp$ 抛物线的准线，从而 $AF \perp$ x 轴，所以 $A(1,2)$ ，

$$\therefore 2a = |AF| - |FG| = 2\sqrt{2} - 2$$

$$\text{即 } a = \sqrt{2} - 1.$$

$$\text{故双曲线的离心率为 } e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1.$$

故选 A

【点睛】

本题考查了圆锥曲线综合，分析题目，画出图像，熟悉抛物线性质以及双曲线的定义是解题的关键，属于中档题.

6、B

【解析】

试题分析：圆 $C_1: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ 的圆心 $E(1,-1)$ ，半径为 1，圆 $C_2: (x-4)^2 + (y-5)^2 = 9$ 的圆心 $F(4,5)$ ，半径是 3. 要使 $|PN| - |PM|$ 最大，需 $|PN|$ 最大，且 $|PM|$ 最小， $|PN|$ 最大值为 $|PF| + 3$ ， $|PM|$ 的最小值为 $|PE| - 1$ ，故

$|PN| - |PM|$ 最大值是 $(|PF| + 3) - (|PE| - 1) = |PF| - |PE| + 4$; $F(4, 5)$ 关于 x 轴的对称点 $F'(4, -5)$,

$|PF| - |PE| = |PF'| - |PE| \leq |EF'| = \sqrt{(4-1)^2 + (-5+1)^2} = 5$, 故 $|PF| - |PE| + 4$ 的最大值为 $5 + 4 = 9$, 故选 B.

考点: 圆与圆的位置关系及其判定.

【思路点睛】先根据两圆的方程求出圆心和半径, 要使 $|PN| - |PM|$ 最大, 需 $|PN|$ 最大, 且 $|PM|$ 最小, $|PN|$ 最大值为 $|PF| + 3$, $|PM|$ 的最小值为 $|PE| - 1$, 故 $|PN| - |PM|$ 最大值是 $(|PF| + 3) - (|PE| - 1) = |PF| - |PE| + 4$, 再利用对称性, 求出所求式子的最大值.

7、C

【解析】

利用组合的方法求所求的事件的对立事件, 即该重卦没有阳爻或只有 1 个阳爻的概率, 再根据两对立事件的概率和为 1 求解即可.

【详解】

设“该重卦至少有 2 个阳爻”为事件 A . 所有“重卦”共有 2^6 种; “该重卦至少有 2 个阳爻”的对立事件 $\bar{A}$ 是“该重卦没有阳爻或只有 1 个阳爻”, 其中, 没有阳爻 (即 6 个全部是阴爻) 的情况有 1 种, 只有 1 个阳爻的情况有 $C_6^1 = 6$ 种, 故

$$P(\bar{A}) = \frac{1+6}{2^6} = \frac{7}{64}, \text{ 所以该重卦至少有 2 个阳爻的概率是 } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{7}{64} = \frac{57}{64}.$$

故选: C

【点睛】

本题主要考查了对立事件概率和为 1 的方法求解事件概率的方法. 属于基础题.

8、D

【解析】

根据等式和特征和所求代数式的值的特征用特殊值法进行求解即可.

【详解】

由 $(1-x+x^2)^3 \cdot (1-2x^2)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{14}x^{14}$ 可知:

令 $x=0$, 得 $1 = a_0 \Rightarrow a_0 = 1$;

令 $x=1$, 得 $1 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{14} \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{14} = 1(1)$;

令 $x=-1$, 得 $27 = a_0 - a_1 + a_2 + (-a_3) + \dots + a_{14} \Rightarrow a_0 - a_1 + a_2 + (-a_3) + \dots + a_{14} = 27(2)$,

(2)+(1) 得, $2(a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{14}) = 28 \Rightarrow a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{14} = 14$, 而 $a_0 = 1$, 所以

$$a_2 + a_4 + \dots + a_{14} = 13.$$

故选：D

【点睛】

本题考查了二项式定理的应用，考查了特殊值代入法，考查了数学运算能力.

9、B

【解析】

根据程序框图，逐步执行，直到 S 的值为 63，结束循环，即可得出判断条件.

【详解】

执行框图如下：

初始值： $S = 0, i = 1$ ，

第一步： $S = 0 + 1 = 1, i = 1 + 1 = 2$ ，此时不能输出，继续循环；

第二步： $S = 1 + 2 = 3, i = 2 + 1 = 3$ ，此时不能输出，继续循环；

第三步： $S = 3 + 4 = 7, i = 3 + 1 = 4$ ，此时不能输出，继续循环；

第四步： $S = 7 + 8 = 15, i = 4 + 1 = 5$ ，此时不能输出，继续循环；

第五步： $S = 15 + 16 = 31, i = 5 + 1 = 6$ ，此时不能输出，继续循环；

第六步： $S = 31 + 32 = 63, i = 6 + 1 = 7$ ，此时要输出，结束循环；

故，判断条件为 $i \leq 6$.

故选 B

【点睛】

本题主要考查完善程序框图，只需逐步执行框图，结合输出结果，即可确定判断条件，属于常考题型.

10、C

【解析】

设 $P(x, e^x)$ ，求 $|AP|^2$ ，作为 x 的函数，其最小值是 6，利用导数知识求 $|AP|^2$ 的最小值.

【详解】

设 $P(x, e^x)$ ，则 $|AP|^2 = (x - t)^2 + e^{2x}$ ，记 $g(x) = e^{2x} + (x - t)^2$ ，

$g'(x) = 2e^{2x} + 2(x - t)$ ，易知 $g'(x) = 2e^{2x} + 2(x - t)$ 是增函数，且 $g'(x)$ 的值域是 R ，

$\therefore g'(x) = 0$ 的唯一解 x_0 ，且 $x < x_0$ 时， $g'(x) < 0$ ， $x > x_0$ 时， $g'(x) > 0$ ，即 $g(x)_{\min} = g(x_0)$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/636134040011010105>