第3章 MATLAB矩阵分析与处理

特殊矩阵

- 通用的特殊矩阵
  常用的产生通用特殊矩阵的函数有：
  zeros:产生全0矩阵（零矩阵）。
  ones:产生全1矩阵（幺矩阵）。
  eye:产生单位矩阵。
  rand:产生0～1间均匀分布的随机矩阵。
  randn:产生均值为0，方差为1的标准正态分布随机矩阵。

- 例3.1 分别建立3×3、3×2和与矩阵A同样大小的零矩阵。

(1) 建立一个3×3零矩阵。

```
zeros(3)
```

(2) 建立一个3×2零矩阵。

```
zeros(3,2)
```

(3) 设A为2×3矩阵，则可以用zeros(size(A))建立一个与矩阵A同样大小零矩阵。

```
A=[1 2 3;4 5 6];          %产生一个2×3阶矩阵A
zeros(size(A))        %产生一个与矩阵A同样大小的零矩阵
```

- 例 3.2 建立随机矩阵：
  (1) 在区间[20,50]内均匀分布的5阶随机矩阵。
  (2) 均值为0.6、方差为0.1的5阶正态分布随机矩阵。
  命令如下：

```
x=20+(50-20)*rand(5)          %yi=a+(b-a)xi
y=0.6+sqrt(0.1)*randn(5)      %yi= μ+σxi
```

  此外，常用的函数还有reshape(A,m,n)，它在矩阵总元素保持不变的前提下，将矩阵A重新排成m×n的二维矩阵。

- 例 3.2 建立随机矩阵：(1) 在区间[20,50]内均匀分布的5阶随机矩阵。(2) 均值为0.6、方差为0.1的5阶正态分布随机矩阵。命令如下：

```
x=20+(50-20)*rand(5)
y=0.6+sqrt(0.1)*randn(5)
```

此外，常用的函数还有reshape(A,m,n)，它在矩阵总元素保持不变的前提下，将矩阵A重新排成m×n的二维矩阵。

- 用于专门学科的特殊矩阵 (1)魔方矩阵
  魔方矩阵有一个有趣的性质，其每行、每列及两条对角线上的元素和都相等。对于n阶魔方阵，其元素由1,2,3,…,n^2共n^2个整数组成。MATLAB提供了求魔方矩阵的函数magic(n)，其功能是生成一个n阶魔方阵。

- 例3.3　将101~125等25个数填入一个5行5列的表格中，使其每行每列及对角线的和均为565。

M=100+magic(5)　%5阶魔方矩阵每行、每列及对角线的和均为65

- 范得蒙矩阵

  范得蒙(Vandermonde)矩阵最后一列全为1，倒数第二列为一个指定的向量，其他各列是其后列与倒数第二列的点乘积。可以用一个指定向量生成一个范得蒙矩阵。在MATLAB中，函数vander(V)生成以向量V为基础向量的范得蒙矩阵。例如，A=vander([1;2;3;5])即可得到上述范得蒙矩阵。

```
A=[ 1  1  1  1;
    8  4  2  1;
   27  9  3  1;
  125 25  5  1]
```

- 希尔伯特矩阵
  在MATLAB中，生成希尔伯特矩阵的函数是hilb(n)，$h_{ij}=1/(i+j-1)$。
  使用一般方法求逆会因为原始数据的微小扰动而产生不可靠的计算结果。MATLAB中，有一个专门求希尔伯特矩阵的逆的函数invhilb(n)，其功能是求n阶的希尔伯特矩阵的逆矩阵。

- 例 3.4 求 4阶希尔伯特矩阵及其逆矩阵。命令如下：

```
format rat          %以有理形式输出
H=hilb(4)
H=invhilb(4)
```

- 托　　　　普　　　　利　　　　兹　　　　矩　　　　阵
  托普利兹(Toeplitz)矩阵除第一行第一列外，其他每个元素都与左上角的元素相同。生成托普利兹矩阵的函数是toeplitz(x,y)，它生成一个以x为第一列，y为第一行的托普利兹矩阵。这里x，y均为向量，两者不必等长。toeplitz(x)用向量x生成一个对称的托普利兹矩阵。例如
  T=toeplitz(1:6)

- 伴随矩阵 MATLAB生成伴随矩阵的函数是compan(p)，其中p是一个多项式的系数向量，高次幂系数排在前，低次幂排在后。例如，为了求多项式的 x^3-7x+6的伴随矩阵，可使用命令：

```
p=[1,0,-7,6];
compan(p)
ans=
    0    7    -6
    1    0     0
    0    1     0
```

- 帕斯卡矩阵

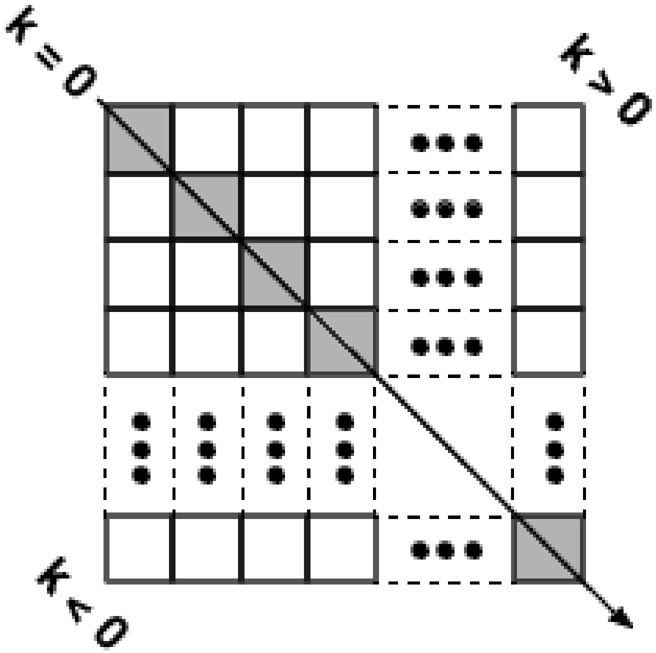
二次项$(x+y)^n$展开后的系数随n的增大组成一个三角形表，称为杨辉三角形。由杨辉三角形表组成的矩阵称为帕斯卡(Pascal)矩阵。函数pascal(n)生成一个n阶帕斯卡矩阵。

- 例 3.5 求 $(x+y)^5$的展开式。在 MATLAB命令窗口，输入命令：pascal(6)
  矩阵次对角线上的元素1,5,10,10,5,1即为展开式的系数。

矩阵结构调整变换

- 对角阵
  1. 对角阵
  只有对角线上有非0元素的矩阵称为对角矩阵，对角线上的元素相等的对角矩阵称为数量矩阵，对角线上的元素都为1的对角矩阵称为单位矩阵。

- 提取矩阵的对角线元素 设A为m×n矩阵，diag(A)函数用于提取矩阵A主对角线元素，产生一个具有min(m,n)个元素的列向量。
- diag(A)函数还有一种形式diag(A,k)，其功能是提取第k条对角线的元素。



```
>>A = [1 2 3;4 5 6; 7 8 9] ;
>>D=diag(A)
D =
1
5
9

>> diag(A,1)
ans =
      2
      6
```

- 构造对角矩阵

  设V为具有m个元素的向量，diag(V)将产生一个m×m对角矩阵，其主对角线元素即为向量V的元素。diag(V)函数也有另一种形式diag(V,k)，其功能是产生一个n×n(n=m+|k|)对角阵，其第k条对角线的元素即为向量V的元素。

  ```
  >>diag(D)
  ans =
  1 0 0
  0 5 0
  0 0 9
  ```

- 例3.6　先建立5×5矩阵A，然后将A的第一行元素乘以1，第二行乘以2，…，第五行乘以5。

```
A=[17,0,1,0,15;23,5,7,14,16;4,0,13,0,22;10,12,19,21,3;...
11,18,25,2,19];
D=diag(1:5);
D*A                          %用D左乘A，对A的每行乘以一个指定常数
```

- 三角阵
  三角阵又进一步分为上三角阵和下三角阵，所谓上三角阵，即矩阵的对角线以下的元素全为0的一种矩阵，而下三角阵则是对角线以上的元素全为0的一种矩阵。
- 严格上三角矩阵和严格下三角矩阵（包括主对角线上的元素也为0）。

- 上三角矩阵
  求矩阵A的上三角阵的MATLAB函数是triu(A)。triu(A)函数也有另一种形式triu(A,k)，其功能是求矩阵A的第k条对角线以上的元素。例如，提取矩阵A的第2条对角线以上的元素，形成新的矩阵B。

```
triu(ones(4,4),-1)

ans =

   1   1   1   1
   1   1   1   1
   0   1   1   1
   0   0   1   1
```

- 下三角矩阵
在MATLAB中，提取矩阵A的下三角矩阵的函数是tril(A)和tril(A,k)，其用法与提取上三角矩阵的函数triu(A)和triu(A,k)完全相同。

```
tril(ones(4,4),-1)

ans =

    0    0    0    0
    1    0    0    0
    1    1    0    0
    1    1    1    0
```

矩阵的转置

- 转置运算符是单撇号(’)。

```
>> A = [1 2 3;4 5 6; 7 8 9]
A =

     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
>> A'
ans =
     1     4     7
     2     5     8
     3     6     9
```

矩阵的旋转

- 利用函数rot90(A,k)将矩阵A按逆时针旋转90º的k倍，当k为1时可省略。

```
X =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
Y = rot90(X)
Y =
     3     6     9
     2     5     8
   1     4     7
```

矩阵的左右翻转

- 对矩阵实施左右翻转是将原矩阵的第一列和最后一列调换，第二列和倒数第二列调换，…，依次类推。MATLAB对矩阵A实施左右翻转的函数是fliplr(A)。

If A is the 3-by-2 matrix,
A =

```
    1     4
    2     5
    3     6
```

then fliplr(A) produces

```
    4     1
    5     2
    6     3
```

If A is a row vector,
A =

```
    1     3     5     7     9
```

then fliplr(A) produces

```
    9     7     5     3     1
```

矩阵的上下翻转

- MATLAB对矩阵A实施上下翻转的函数是flipud(A)。

If A is the 3-by-2 matrix,
A =
1 4
2 5
3 6
then flipud(A) produces
3 6
2 5
1 4

If A is a column vector,
A =
3
5
7
then flipud(A) produces
A =
7
5
3

矩阵的逆与伪逆

- 对于一个方阵A，如果存在一个与其同阶的方阵B，使得：A·B=B·A=I （I为单位矩阵）则称B为A的逆矩阵，当然，A也是B的逆矩阵。求一个矩阵的逆是一件非常烦琐的工作，容易出错，但在MATLAB中，求一个矩阵的逆非常容易。求方阵A的逆矩阵可调用函数inv(A)。

例3.7

矩阵的逆与伪逆

- 如果矩阵A不是一个方阵，或者A是一个非满秩的方阵时，矩阵A没有逆矩阵，但可以找到一个与A的转置矩阵A‘同型的矩阵B，使得：
  A・B・A=A
  B・A・B=B
  此时称矩阵B为矩阵A的伪逆，也称为广义逆矩阵。在MATLAB中，求一个矩阵伪逆的函数是pinv(A)。

```
>> A=[3 1 1 1;1 3 1 1;1 1 3 1];
>> B=pinv(A)
B =
    0.3929   -0.1071   -0.1071
   -0.1071    0.3929   -0.1071
   -0.1071   -0.1071    0.3929
    0.0357    0.0357    0.0357
```

在线性代数中，一个矩阵 A 的**列秩**是 A 的线性无关的**纵列**的极大数目。类似地，**行秩**是 A 的线性无关的**横行**的极大数目。
注意：行秩=列秩。
通常，对于一组向量X1,X2,..Xp,若存在一组不全为0的ki(i=1,2,3..p)，使得：
k1X1+k2X2+….+kpXp=0.
则该p个向量线性相关。

用矩阵求逆方法求解线性方程组

在线性方程组Ax=b两边各左乘A^{-1}，有

$A^{-1}Ax=A^{-1}b$

由于$A^{-1}A=I$，故得

$x=A^{-1}b$

例3.8　用求逆矩阵的方法解线性方程组。

命令如下：

```
A=[1,2,3;1,4,9;1,8,27];
b=[5,-2,6]';
x=inv(A)*b
```

也可以运用左除运算符“\”求解线性代数方程组。

```
A=[1,2,3;1,4,9;1,8,27];
b=[5,-2,6]';
x=A\b
```

矩阵求值

- 方阵的行列式
  把一个方阵看作一个行列式，并对其按行列式的规则求值，这个值就称为所对应的行列式的值。在MATLAB中，求方阵A所对应的行列式的值的函数是det(A)。

```
A=rand(5)

B=det(A)
```

矩阵的秩与迹

- 矩阵的秩
  矩阵线性无关的行数与列数称为矩阵的秩。在MATLAB中，求矩阵秩的函数是rank(A)。
- 矩阵的迹
  矩阵的迹等于矩阵的对角线元素之和，也等于矩阵的特征值之和。在MATLAB中，求矩阵的迹的函数是trace(A)。

向量和矩阵的范数

矩阵或向量的范数用来度量矩阵或向量在某种意义下的长度。范数有多种方法定义，其定义不同，范数值也就不同。(V为n元素的列向量，A为m by n矩阵)

$$\|\vec{V}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

$$\|\vec{V}\|_2 = \sqrt{\sum_{i}^{n} v_i^2}$$

$$\|\vec{V}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \{|v_i|\}$$

向量和矩阵的范数

- 向量的3种常用范数及其计算函数在MATLAB中，求向量范数的函数为：
  (1) norm(V)或norm(V,2)：计算向量V的2—范数。
  (2) norm(V,1)：计算向量V的1—范数。
  (3) norm(V,inf)：计算向量V的∞—范数。

向量和矩阵的范数

- 矩 阵 的 范 数 及 其 计 算 函 数

MATLAB提供了求3种矩阵范数的函数，其函数调用格式与求向量的范数的函数完全相同。

$$\|\mathrm{A}\|_1=\max_{\|\vec{V}\|=1}\{\|A\bullet\vec{V}\|_1\}=\max_{1\le j\le n}\{\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\}$$

$$\|\mathrm{A}\|_2=\max_{\|\vec{V}\|=1}\{\|A\bullet\vec{V}\|_2\}=\sqrt{\lambda_1},\lambda_1\text{为}A'\bullet A\text{的最大特征值}$$

$$\|\mathrm{A}\|_\infty=\max_{\|\vec{V}\|=1}\{\|A\bullet\vec{V}\|_\infty\}=\max_{1\le j\le m}\{\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\}$$

矩阵的条件数

- 在MATLAB中，计算矩阵A的3种条件数的函数是：
  (1) cond(A,1)　　计算A的1—范数下的条件数。
  (2) cond(A)或cond(A,2)　　计算A的2—范数数下的条件数。
  (3) cond(A,inf)　　计算A的 ∞—范数下的条件数。

矩阵的特征值与特征向量

- 在MATLAB中，计算矩阵A的特征值和特征向量的函数是eig(A)，常用的调用格式有3种：
  (1) E=eig(A)：求矩阵A的全部特征值，构成向量E。
  (2) [V,D]=eig(A)：求矩阵A的全部特征值，构成对角阵D，并求A的特征向量构成V的列向量。