

北京市西城区 2024 届高三上学期期末数学试题

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 3\}$, $B = \{x | x^2 \geq 4\}$, 则 $A \cup B =$ ()
A. $(-1, +\infty)$ B. $(-1, 2]$ C. $(-\infty, -2] \cup (-1, +\infty)$
D. $(-\infty, -2] \cup (-1, 3)$
2. 在复平面内, 复数 $\frac{i-2}{i}$ 对应的点位于 ()
A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限
3. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a > b$, 则 ()
A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $\tan a > \tan b$ C. $3-a < 2-b$ D. $a|a| > b|b|$
4. 已知双曲线 C 的一个焦点是 $F_1(0, 2)$, 渐近线为 $y = \pm\sqrt{3}x$, 则 C 的方程是 ()
A. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$
C. $y^2 - \frac{x^2}{3} = 1$ D. $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$
5. 已知点 $O(0, 0)$, 点 P 满足 $|PO| = 1$. 若点 $A(t, 4)$, 其中 $t \in \mathbf{R}$, 则 $|PA|$ 的最小值为 ()
A. 5 B. 4 C. 3 D. 2
6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 60^\circ$, $b = \sqrt{7}$, $a - c = 2$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()
A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{4}$
7. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, 则 ()
A. $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上是减函数, 且曲线 $y = f(x)$ 存在对称轴
B. $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上是减函数, 且曲线 $y = f(x)$ 存在对称中心
C. $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上是增函数, 且曲线 $y = f(x)$ 存在对称轴
D. $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上是增函数, 且曲线 $y = f(x)$ 存在对称中心
8. 设 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 是非零向量, 则“ $|\vec{a}| < |\vec{b}|$ ”是“ $|\vec{a} \cdot \vec{b}| < |\vec{b}|^2$ ”的 ()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

9. 设 $\{a_n\}$ 是首项为正数, 公比为 q 的无穷等比数列, 其前 n 项和为 S_n . 若存在无穷多个正整数 k , 使 $S_k \leq 0$, 则 q 的取值范围是 ()

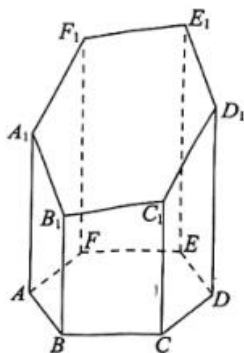
A. $(-\infty, 0)$

B. $(-\infty, -1]$

C. $[-1, 0)$

D. $(0, 1)$

10. 如图, 水平地面上有一正六边形地块 $ABCDEF$, 设计师规划在正六边形的顶点处矗立六根与地面垂直的柱子, 用以固定一块平板式太阳能电池板 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. 若其中三根柱子 AA_1, BB_1, CC_1 的高度依次为 12m, 9m, 10m, 则另外三根柱子的高度之和为 ()



A. 47m

B. 48m

C. 49m

D. 50m

二、填空题

11. 在 $(x - \sqrt{2})^4$ 的展开式中, x^2 的系数为_____. (用数字作答)

12. 设 $\omega > 0$, 函数 $f(x) = \sin \omega x$. 若曲线 $y = f(x)$ 关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称, 则 ω 的一个取值为_____.

13. 已知函数 $f(x) = 2 \log_2 x - \log_2 (x - 4)$, 则 $f(x)$ 的定义域是_____; $f(x)$ 的最小值是_____.

14. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$. ①则 C 的准线方程为_____；②设 C 的顶点为 O ，焦点为 F . 点 P 在 C 上，点 Q 与点 P 关于 y 轴对称. 若 QF 平分 $\angle PFO$ ，则点 P 的横坐标为_____.

15. 设 $a \in \mathbf{R}$ ，函数 $f(x) = \begin{cases} -x^3, & x > a, \\ -x^2 + a^2, & x \leq a. \end{cases}$ 给出下列四个结论：

① $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减；

② 当 $a \geq 0$ 时， $f(x)$ 存在最大值；

③ 当 $a < 0$ 时，直线 $y = ax$ 与曲线 $y = f(x)$ 恰有 3 个交点；

④ 存在正数 a 及点 $M(x_1, f(x_1)) (x_1 > a)$ 和 $N(x_2, f(x_2)) (x_2 \leq a)$ ，使 $|MN| \leq \frac{1}{100}$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题

16. 已知函数 $f(x) = 2a \sin x \cos x - 2 \cos^2 x$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{6}$.

(1) 求 a 的值及 $f(x)$ 的最小正周期；

(2) 若 $m \leq f(x) \leq M$ 对 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立，求 m 的最大值和 M 的最小值.

17. 生活中人们喜爱用跑步软件记录分享自己的运动轨迹.为了解某地中学生和大学生对跑步软件的使用情况，从该地随机抽取了 200 名中学生和 80 名大学生，统计他们最喜爱使用的一款跑步软件，结果如下：

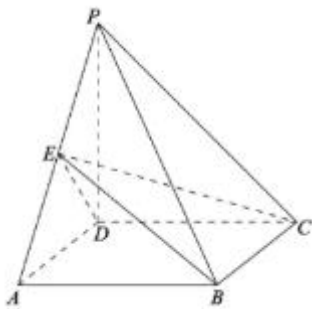
	跑步软件一	跑步软件二	跑步软件三	跑步软件四
中学生	80	60	40	20
大学生	30	20	20	10

假设大学生和中学生对跑步软件的喜爱互不影响.

- (1)从该地区的中学生和大学生中各随机抽取 1 人，用频率估计概率，试估计这 2 人都最喜爱使用跑步软件一的概率；
- (2)采用分层抽样的方式先从样本中的大学生中随机抽取 8 人，再从这 8 人中随机抽取 3 人.记 X 为这 3 人中最喜爱使用跑步软件二的人数，求 X 的分布列和数学期望；
- (3)记样本中的中学生最喜爱使用这四款跑步软件的频率依次为 x_1, x_2, x_3, x_4 ，其方差为 s_1^2 ；样本中的大学生最喜爱使用这四款跑步软件的频率依次为 y_1, y_2, y_3, y_4 ，其方差为 s_2^2 ； $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ 的方差为 s_3^2 .写出 s_1^2, s_2^2, s_3^2 的大小关系.（结论不要求证明）

18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $PAB \perp$

平面 PAD ， E 为 PA 中点， $PD = AD = 2$ 。



- (1) 求证： $AB \perp$ 平面 PAD ；
- (2) 求直线 DE 与平面 PBC 所成角的大小；
- (3) 求四面体 $PEBC$ 的体积。

19. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，且经过点 $C(2, 1)$ 。

- (1) 求 E 的方程；
- (2) 过点 $N(0, 1)$ 的直线交 E 于点 A, B （点 A, B 与点 C 不重合）。设 AB 的中点为 M ，连接 CM 并延长交 E 于点 D 。若 M 恰为 CD 的中点，求直线 AB 的方程。

20. 已知函数 $f(x) = \frac{e^{ax}}{x}$, 其中 $a > 0$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 当 $x_1 < x_2$ 且 $x_1 \cdot x_2 > 0$ 时, 判断 $f(x_1) - f(x_2)$ 与 $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$ 的大小, 并说明理由.

21. 给定正整数 $N \geq 3$, 已知项数为 m 且无重复项的数对序列 A :

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$ 满足如下三个性质: ① $x_i, y_i \in \{1, 2, \dots, N\}$, 且

$x_i \neq y_i (i = 1, 2, \dots, m)$; ② $x_{i+1} = y_i (i = 1, 2, \dots, m-1)$; ③ (p, q) 与 (q, p) 不同时在数对序列 A 中.

(1) 当 $N = 3$, $m = 3$ 时, 写出所有满足 $x_1 = 1$ 的数对序列 A ;

(2) 当 $N = 6$ 时, 证明: $m \leq 13$;

(3) 当 N 为奇数时, 记 m 的最大值为 $T(N)$, 求 $T(N)$.

参考答案:

1. C

【分析】解不等式求得集合 B ，由此求得 $A \cup B$.

【详解】由 $x^2 \geq 4$ 解得 $x \leq -2$ 或 $x \geq 2$ ，所以 $B = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ ，

所以 $A \cup B = (-\infty, -2] \cup (-1, +\infty)$.

故选：C

2. A

【分析】化简复数，从而求得对应点所在象限.

【详解】 $\frac{i-2}{i} = \frac{(i-2) \times (-i)}{i \times (-i)} = 1 + 2i$ ，对应点 $(1, 2)$ ，在第一象限.

故选：A

3. D

【分析】利用特殊值以及函数的图象、单调性等知识确定正确答案.

【详解】A 选项，若 $a=1, b=-1$ ，满足 $a > b$ ，但 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ，所以 A 选项错误.

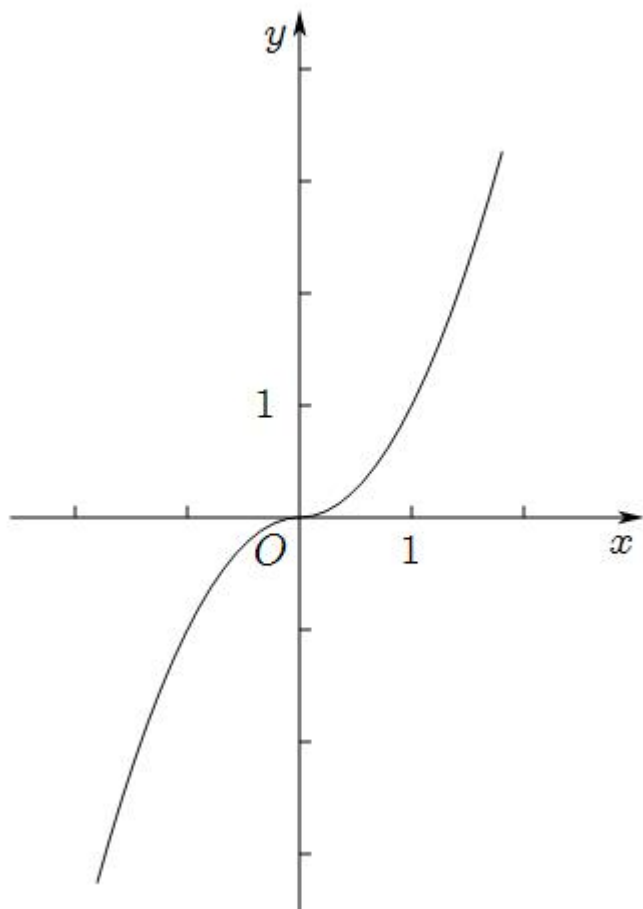
B 选项，若 $a = \frac{2\pi}{3}, b = \frac{\pi}{3}$ ，满足 $a > b$ ，但 $\tan a < \tan b$ ，所以 B 选项错误.

C 选项，若 $a=3, b=2$ ，满足 $a > b$ ，但 $3-a \neq 2-b$ ，所以 C 选项错误.

D 选项，对于函数 $y = x|x| = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$ ，图象如下图所示，

由图可知函数在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 D 选项正确.

故选：D



4. D

【分析】根据已知条件求得 a, b ，进而求得正确答案.

【详解】由于焦点 $F_1(0, 2)$ ，所以 $c = 2$ 且双曲线的焦点在 y 轴上，

双曲线的渐近线 $y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \sqrt{3}x$ ，所以 $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$ ，

结合 $c^2 = a^2 + b^2$ 可得 $a = \sqrt{3}, b = 1$ ，

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$.

故选：D

5. C

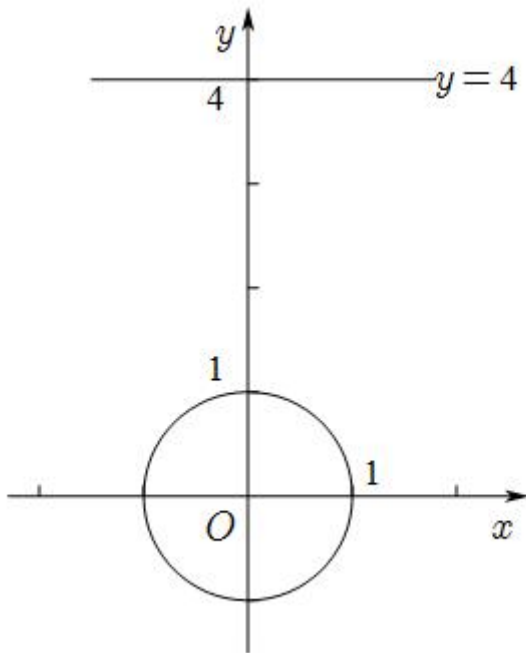
【分析】根据直线和圆的位置关系求得正确答案.

【详解】由于 $|PO| = 1$ ，所以 P 是单位圆上的点，

由于 $A(t, 4)$ ，其中 $t \in \mathbf{R}$ ，所以 A 是直线 $y = 4$ 上的点，

画出图象如下图所示，由图可知， $|PA|$ 的最小值为 $4 - 1 = 3$.

故选：C



6. B

【分析】利用余弦定理求得 ac ，进而求得三角形 ABC 的面积.

【详解】由余弦定理得 $7 = a^2 + c^2 - 2ac \cos 60^\circ = (a - c)^2 + ac = 4 + ac$,

所以 $ac = 3$ ，所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

故选：B

7. D

【分析】根据复合函数的单调性、函数的奇偶性等知识确定正确答案.

【详解】由 $\frac{1+x}{1-x} > 0$ 得 $(x+1)(x-1) < 0$ ，解得 $-1 < x < 1$ ，所以 $f(x)$ 的定义域是 $(-1, 1)$ ，

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \left(\frac{-(1-x)+2}{1-x} \right) = \ln \left(-1 + \frac{2}{1-x} \right),$$

$y = -1 + \frac{1}{1-x}$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增， $y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

根据复合函数单调性同增异减可知 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上是增函数，

$$f(-x) = \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1} = -\ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数，图象关于原点对称，即 D 选项正确.

故选：D

8. A

【分析】根据数量积的定义，结合 $|\cos \vec{a}, \vec{b}| \in [0, 1]$ ，利用充分、必要条件的定义，结合不等式性质进行分析判定.

【详解】若 $|\vec{a}| < |\vec{b}|$ 成立，则 $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\cos \vec{a}, \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| < |\vec{b}|^2$ ，所以充分性成立，

若 $|\vec{a} \cdot \vec{b}| < |\vec{b}|^2$ 成立，即 $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\cos \vec{a}, \vec{b}| < |\vec{b}|^2$ ，

等价于 $|\vec{a}| |\cos \vec{a}, \vec{b}| < |\vec{b}|$ （因为 $|\vec{b}| \neq 0$ ），

当 $|\cos \vec{a}, \vec{b}| = \frac{1}{3}$ ， $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ 时，满足则 $|\vec{a}| |\cos \vec{a}, \vec{b}| < |\vec{b}|$ ，但 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}| > |\vec{b}|$ ，

故必要性不成立，

所以“ $|\vec{a}| < |\vec{b}|$ ”是“ $|\vec{a} \cdot \vec{b}| < |\vec{b}|^2$ ”的充分不必要条件，

故选：A

9. B

【分析】对 q 进行分类讨论，结合等比数列前 n 项和公式求得正确答案.

【详解】依题意 $a_1 > 0$ ， $q \neq 0$ ，

若 $q > 0$ ，则 $a_n > 0$ ， $S_n > 0$ ，此时不存在符合题意的 k ，所以 $q < 0$.

若 $q = -1$ ，则 $S_n = a_1 \times \frac{1 - (-1)^n}{1 - (-1)} = \frac{a_1}{2} [1 - (-1)^n]$ ，

当 n 为正偶数时， $S_n = 0$ ，所以存在无穷多个正整数 k ，使 $S_k \leq 0$.

当 $-1 < q < 0$ 时， $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} (1 - q^n)$ ，

其中 $\frac{a_1}{1 - q} > 0$ ， $1 - q^n > 0$ ，所以 $S_n > 0$ ，此时不存在符合题意的 k .

当 $q < -1$ 时， $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} (1 - q^n)$ ，

其中 $\frac{a_1}{1 - q} > 0$ ，当 n 是正奇数时， $1 - q^n > 0$ ，所以 $S_n > 0$ ，此时不存在符合题意的 k ；

当 n 是正偶数时， $1 - q^n < 0$ ， $S_n < 0$ ，所以存在无穷多个正整数 k ，使 $S_k \leq 0$.

综上所述， q 的取值范围是 $(-\infty, -1]$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/636240025100010040>