

湖南省岳阳市一中下学期 2023-2024 学年高三（最后冲刺）数学试卷

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，若双曲线右支上存在一点 P ，使 $(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF_2}) \cdot \overrightarrow{F_2P} = 0$

(O 为坐标原点)，且 $\overrightarrow{PF_1} = \sqrt{3} \overrightarrow{PF_2}$ ，则双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ B. $\sqrt{2}+1$ C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ D. $\sqrt{3}+1$

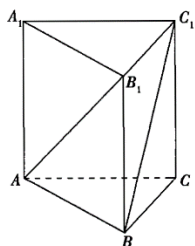
2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + \frac{1}{2}x, & x < 0 \\ \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$ ，若函数 $g(x) = f(x) - kx$ 有三个零点，则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ C. $(0, 1)$ D. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

3. 博览会安排了分别标有序号为“1 号”“2 号”“3 号”的三辆车，等可能随机顺序前往酒店接嘉宾。某嘉宾突发奇想，设计两种乘车方案。方案一：不乘坐第一辆车，若第二辆车的车序号大于第一辆车的车序号，就乘坐此车，否则乘坐第三辆车；方案二：直接乘坐第一辆车。记方案一与方案二坐到“3 号”车的概率分别为 P_1, P_2 ，则 ()

- A. $P_1 \cdot P_2 = \frac{1}{4}$ B. $P_1 = P_2 = \frac{1}{3}$ C. $P_1 + P_2 = \frac{5}{6}$ D. $P_1 < P_2$

4. 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的所有棱长均相等，侧棱 $AA_1 \perp$ 平面 ABC ，过 AB_1 作平面 α 与 BC_1 平行，设平面 α 与平面 ACC_1A_1 的交线为 l ，记直线 l 与直线 AB, BC, CA 所成锐角分别为 α, β, γ ，则这三个角的大小关系为 ()

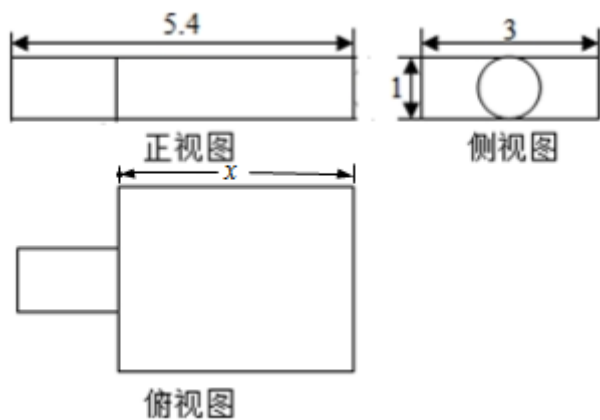


- A. $\alpha > \gamma > \beta$ B. $\alpha = \beta > \gamma$

C. $\gamma > \beta > \alpha$

D. $\alpha > \beta = \gamma$

5. 中国古代数学名著《九章算术》中记载了公元前 344 年商鞅督造的一种标准量器——商鞅铜方升，其三视图如图所示（单位：寸），若 π 取 3，当该量器口密闭时其表面积为 42.2（平方寸），则图中 x 的值为（ ）



A. 3

B. 3.4

C. 3.8

D. 4

6. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点，点 P 是其一条渐近线上一点，且以 F_1F_2 为直径的圆经过点

P ，若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}b^2$ ，则双曲线的离心率为（ ）

A. $\sqrt{3}$

B. 2

C. $\sqrt{5}$

D. 3

7. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A 的平分线交 BC 边于点 D ， $AB = 4$ ， $AC = 8$ ， $BD = 2$ ，则 $\triangle ABD$ 的面积是（ ）

A. $16\sqrt{2}$

B. $\sqrt{15}$

C. 3

D. $8\sqrt{3}$

8. 在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别为 $\angle A, \angle B, \angle C$ 所对的边，若函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + bx^2 + (a^2 + c^2 - ac)x + 1$ 有极值点，则 $\angle B$ 的范围是（ ）

A. $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

B. $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

C. $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

D. $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$

9. 已知复数 z 在复平面内对应的点的坐标为 $(-1, 2)$ ，则下列结论正确的是（ ）

A. $z \cdot i = 2 - i$

B. 复数 z 的共轭复数是 $1 - 2i$

C. $|z| = 5$

D. $\frac{z}{1+i} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

10. 用 1, 2, 3, 4, 5 组成不含重复数字的五位数，要求数字 4 不出现首位和末位，数字 1, 3, 5 中有且仅有两个数字相邻，则满足条件的不同五位数的个数是（ ）

A. 48

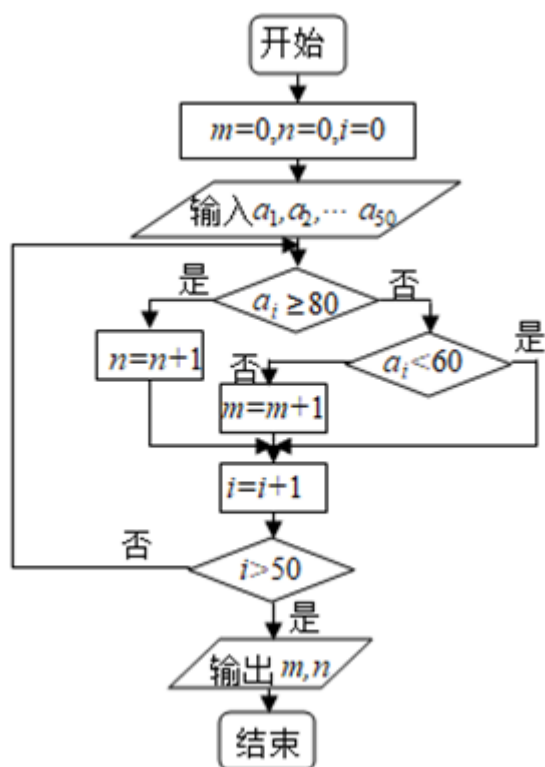
B. 60

C. 72

D. 120

11. 如图所示的茎叶图为高三某班 50 名学生的化学考试成绩，算法框图中输入的 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{50}$ 为茎叶图中的学生成绩，则输出的 m, n 分别是 ()

4	3 6 7 8
5	0 1 2 3 3 6 8 9
6	0 0 1 3 4 4 6 6 7 8 8 9
7	0 1 2 2 4 5 6 6 6 7 8 8 9 9
8	0 0 2 4 4 5 6 9
9	0 1 6 8

A. $m = 38, n = 12$ B. $m = 26, n = 12$ C. $m = 12, n = 12$ D. $m = 24, n = 10$

12. 已知复数 $z_1 = 3 + 4i, z_2 = a + i$, 且 $z_1 \bar{z}_2$ 是实数, 则实数 a 等于 ()

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. $-\frac{3}{4}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若 $a + b \neq 0$, 则 $a^2 + b^2 + \frac{1}{(a+b)^2}$ 的最小值为_____.

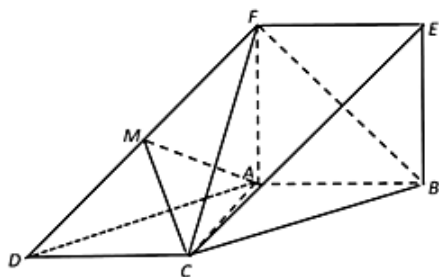
14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, \frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 2$, 若 $b_n = 2^{\sqrt{2}a_n}$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n =$ _____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 若 $c=1$, $C=60^\circ$, 则 b 的取值范围是_____.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中, A 、 B 为 x 轴正半轴上的两个动点, P (异于原点 O) 为 y 轴上的一个定点. 若以 AB 为直径的圆与圆 $x^2+(y-2)^2=1$ 相外切, 且 $\angle APB$ 的大小恒为定值, 则线段 OP 的长为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

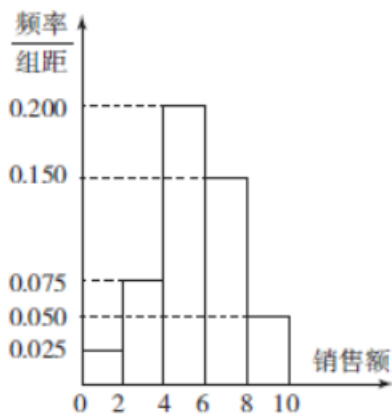
17. (12 分) 如图, 在三棱柱 $ADF-BCE$ 中, 平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$, 侧面 $ABCD$ 为平行四边形, 侧面 $ABEF$ 为正方形, $AC \perp AB$, $AC=2AB=4$, M 为 FD 的中点.



(1) 求证: $FB \parallel$ 平面 ACM ;

(2) 求二面角 $M-AC-F$ 的大小.

18. (12 分) 某网络商城在 2019 年 1 月 1 日开展“庆元旦”活动, 当天各店铺销售额破十亿, 为了提高各店铺销售的积极性, 采用摇号抽奖的方式, 抽取了 40 家店铺进行红包奖励. 如图是抽取的 40 家店铺元旦当天的销售额 (单位: 千元) 的频率分布直方图.



(1) 求抽取的这 40 家店铺, 元旦当天销售额的平均值;

(2) 估计抽取的 40 家店铺中元旦当天销售额不低于 4000 元的有多少家;

(3) 为了了解抽取的各店铺的销售方案, 销售额在 $[0, 2)$ 和 $[8, 10]$ 的店铺中共抽取两家店铺进行销售研究, 求抽取的店铺销售额在 $[0, 2)$ 中的个数 ζ 的分布列和数学期望.

19. (12 分) 已知 $f(x) = |x+1| + |x+3|$.

(1) 解不等式 $f(x) < 6$;

(2) 若 a, b, c 均为正数, 且 $f(a) + f(b) + c = 10$, 求 $a^2 + b^2 + c^2$ 的最小值.

20. (12 分) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ 与 x 轴正半轴交于点 A , 圆 O 在点 A 处的切线被椭圆 C 截得的弦长为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设圆 O 上任意一点 P 处的切线交椭圆 C 于点 M, N , 试判断 $|PM| \cdot |PN|$ 是否为定值? 若为定值, 求出该定值; 若不是定值, 请说明理由.

21. (12 分) 设函数 $f(x) = |x+2| - |2x-2|$.

(1) 解不等式 $f(x) \geq 2x-1$;

(2) 记 $f(x)$ 的最大值为 M , 若实数 a, b, c 满足 $a+b+c=M$, 求证:

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} \geq 3\sqrt{2}.$$

22. (10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 $l: \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴的非负半

轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\cos\theta$.

(1) 求曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 设点 M 的极坐标为 $(1, \frac{\pi}{2})$, 直线 l 与曲线 C 的交点为 A, B , 求 $|MA| + |MB|$ 的值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

利用向量运算可得 $2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{F_2P} = 0$, 即 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{F_2P}$, 由 OA 为 $\triangle PF_1F_2$ 的中位线, 得到 $PF_1 \perp PF_2$, 所以

$|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = (2c)^2$ ，再根据双曲线定义即可求得离心率.

【详解】

取 PF_2 的中点 A ，则由 $(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF_2}) \cdot \overrightarrow{F_2P} = 0$ 得 $2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{F_2P} = 0$ ，

即 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{F_2P}$ ；

在 $\triangle PF_1F_2$ 中， OA 为 $\triangle PF_1F_2$ 的中位线，

所以 $PF_1 \perp PF_2$ ，

所以 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = (2c)^2$ ；

由双曲线定义知 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$ ，且 $|PF_1| = \sqrt{3}|PF_2|$ ，所以 $(\sqrt{3} - 1)c = 2a$ ，

解得 $e = \sqrt{3} + 1$ ，

故选：D

【点睛】

本题综合考查向量运算与双曲线的相关性质，难度一般.

2、B

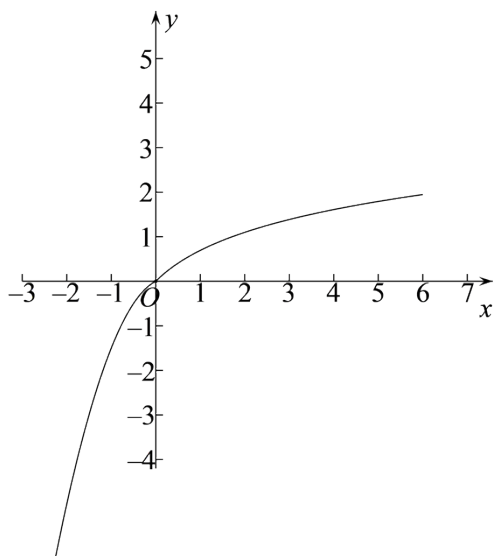
【解析】

根据所给函数解析式，画出函数图像. 结合图像，分段讨论函数的零点情况：易知 $x = 0$ 为 $g(x) = f(x) - kx$ 的一个零

点；对于当 $x < 0$ 时，由代入解析式解方程可求得零点，结合 $x < 0$ 即可求得 k 的范围；对于当 $x > 0$ 时，结合导函数，结合导数的几何意义即可判断 k 的范围. 综合后可得 k 的范围.

【详解】

根据题意，画出函数图像如下图所示：



函数 $g(x) = f(x) - kx$ 的零点，即 $f(x) = kx$.

由图像可知， $f(0) = 0$,

所以 $x = 0$ 是 $f(x) - kx = 0$ 的一个零点，

当 $x < 0$ 时， $f(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x$, 若 $f(x) - kx = 0$,

则 $-x^2 + \frac{1}{2}x - kx = 0$, 即 $x = \frac{1}{2} - k$, 所以 $\frac{1}{2} - k < 0$, 解得 $\frac{1}{2} < k$;

当 $x > 0$ 时， $f(x) = \ln(x+1)$,

则 $f'(x) = \frac{1}{x+1}$, 且 $\frac{1}{x+1} \in (0, 1)$

若 $f(x) - kx = 0$ 在 $x > 0$ 时有一个零点，则 $k \in (0, 1)$,

综上可得 $k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$,

故选：B.

【点睛】

本题考查了函数图像的画法，函数零点定义及应用，根据零点个数求参数的取值范围，导数的几何意义应用，属于中档题.

3、C

【解析】

将三辆车的出车可能顺序一一列出，找出符合条件的即可.

【详解】

三辆车的出车顺序可能为：123、132、213、231、312、321

方案一坐车可能：132、213、231，所以， $P_1 = \frac{3}{6}$ ；

方案二坐车可能：312、321，所以， $P_1 = \frac{2}{6}$ ；

所以 $P_1 + P_2 = \frac{5}{6}$

故选 C.

【点睛】

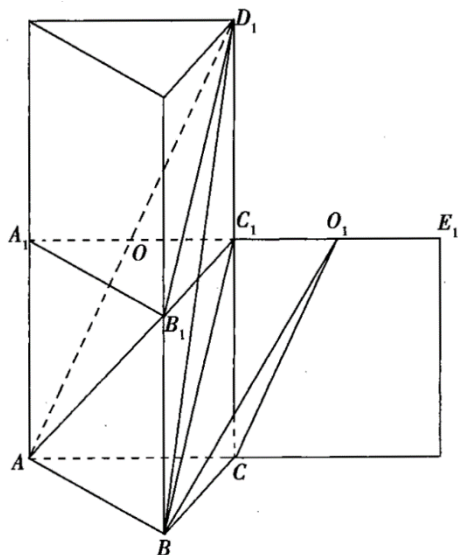
本题考查了古典概型的概率的求法，常用列举法得到各种情况下基本事件的个数，属于基础题.

4、B

【解析】

利用图形作出空间中两直线所成的角，然后利用余弦定理求解即可.

【详解】



如图， $D_1C_1 = CC_1$ ， $C_1E_1 = A_1C_1$ ，设 O 为 A_1C_1 的中点， O_1 为 C_1E_1 的中点，

由图可知过 AB_1 且与 BC_1 平行的平面 α 为平面 AB_1D_1 ，所以直线 l 即为直线 AD_1 ，

由题易知， $\angle D_1AB$ ， $\angle O_1CB$ 的补角， $\angle D_1AC$ 分别为 α ， β ， γ ，

设三棱柱的棱长为 2，

在 $\triangle D_1AB$ 中， $D_1B = 2\sqrt{5}$ ， $AB = 2$ ， $AD_1 = 2\sqrt{5}$ ，

$$\cos \angle D_1AB = \frac{(2\sqrt{5})^2 + 4 - (2\sqrt{5})^2}{2 \times 2 \times 2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}, \therefore \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{10};$$

在 $\triangle O_1BC$ 中， $O_1B = \sqrt{11}$ ， $BC = 2$ ， $O_1C = \sqrt{5}$ ，

$$\cos \angle O_1CB = \frac{(\sqrt{5})^2 + 4 - (\sqrt{11})^2}{2 \times 2 \times \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{10}, \therefore \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{10};$$

在 $\triangle D_1AC$ 中, $CD_1 = 4$, $AC = 2$, $AD_1 = 2\sqrt{5}$,

$$\cos \angle D_1AC = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \therefore \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

Q $\cos \alpha = \cos \beta < \cos \gamma, \therefore \alpha = \beta > \gamma$.

故选: B

【点睛】

本题主要考查了空间中两直线所成角的计算, 考查了学生的作图, 用图能力, 体现了学生直观想象的核心素养.

5、D

【解析】

根据三视图即可求得几何体表面积, 即可解得未知数.

【详解】

由图可知, 该几何体是由一个长宽高分别为 $x, 3, 1$ 和

一个底面半径为 $\frac{1}{2}$, 高为 $5.4 - x$ 的圆柱组合而成.

该几何体的表面积为

$$2(x + 3x + 3) + \pi \cdot (5.4 - x) = 42.2,$$

解得 $x = 4$,

故选: D.

【点睛】

本题考查由三视图还原几何体, 以及圆柱和长方体表面积的求解, 属综合基础题.

6、B

【解析】

根据题意, 设点 $P(x_0, y_0)$ 在第一象限, 求出此坐标, 再利用三角形的面积即可得到结论.

【详解】

由题意, 设点 $P(x_0, y_0)$ 在第一象限, 双曲线的一条渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$,

所以, $y_0 = \frac{b}{a}x_0$,

又以 F_1F_2 为直径的圆经过点 P , 则 $|OP| = c$, 即 $x_0^2 + y_0^2 = c^2$, 解得 $x_0 = a$, $y_0 = b$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/637014162032006101>