北京航空航天大学

考研真题

——北京航空航天大学电磁场理论科目历年考研真题及参考答案

（内部资料，仅供学习研究之用）

Y626

北京航空航天大学 二〇〇一年 招收研究生

题单号:423

电磁场理论 试 题 (共2页)

考生注意:全部答案必须写在答题册上,写在试题上的答案无效。

一、(本题10分)

写出线性各向同性媒质中的媒质特性方程和时变电磁场方程(微分形式)。

二、(本题15分)

线密度为η的均匀无限长直线电荷,平行于z轴,位于$(x,y)=(x',y')$处,线外为线性各向同性电介质(介电常数为ε),求空间任意点(x,y,z)处的电位移$\boldsymbol{D}$、电场强度$\boldsymbol{E}$以及电位Φ。

三、(本题15分)

已知直角坐标系中某区域边界上的电位为

$$\Phi|_{y=0}=0,\Phi|_{y=b}=0,\Phi|_{x=0}=V_0,\Phi|_{x=a}=0 \quad (a、b>0)$$

求域内电位分布。

四、(本题15分)

已知球面$r=a$上电位分布为$f(\theta)$,球面内、外无电荷,求球内外电位分布。

五、(本题 15 分)

均匀线极化平面波从真空垂直入射到无限大理想导体平面上,求反射系数和反射场量表示式。

六、(本题 15 分)

写出均匀理想介质(μ、ε)中沿 $\hat{k}$(单位常矢量)方向传播的时谐电磁场量($\dot{\boldsymbol{E}}$、$\dot{\boldsymbol{H}}$)的表示式,并导出它们的相互关系式。

七、(本题 15 分)

无限长导体圆柱的截面半径为 a,柱轴沿 z 轴放置,处在均匀电场 $E_0=\hat{x}E_0$ 中($\hat{x}$ 为正 x 方向单位矢量),柱外为均匀电介质,求空间电位 Φ 和电场 E 分布。

北京航空航天大学

二〇〇二年硕士生试题 题单号：423

电磁场理论 （共2页）

考生注意：所有答题务必书写在考场提供的答题纸上，写在本试题单上的答题一律无效（本题单不参与阅卷）。

一、（本题10分）

写出一种媒质中时变电磁场方程的微分关系式、相应的场量组成关系式及边界条件，并阐明各式的物理意义。

二、（本题15分）

已知直角坐标系中二维区域$(-a<x<a, 0<y<b)$边界上的电位分布为

$$\Phi|_{x=-a}=\Phi|_{x=+a}=\Phi|_{y=0}=0(V), \Phi|_{y=+b}=V_0(V)$$

求该区域内的电位分布（式中$a>0, b>0$）。

三、（本题15分）

证明：如果已知一个标量函数在某区域内的泊松方程，在该区域边界上，该标量函数的值给定$\phi|_s=\phi_s(\bar{r})$，则在该区域上的标量函数有唯一的解；如果在该区域的边界法向上，该标量函数的导数值给定$\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_S=f(\bar{r})$，则在该区域中，除一个常数外，标量函数有唯一的解，该标量函数的梯度有唯一的解。

四、（本题10分）

已知空间$y\geq 0$区域为理想导体，$y\leq 0$为线性各向同性电介质（介电常数为ε，且ε=常数）。在$(0,-b,0)$处放置了一个电荷量为Q（库仑）的点电荷。求空间任意一点处的电位Φ、电场强度$\bar{E}$和电位移$\bar{D}$。

3

五、（本题 10 分）

已知半径为 r=R 的球面上的电位分布为 $V_0\cos2\theta$（V），求球内外的电荷分布和电位分布，并画出等位线的分布。

六、（本题 10 分）

一个天线的远区辐射磁场为 $\tilde{H}=\hat{i}_\varphi\dot{H}_0\sin\vartheta\left(\frac{j\beta_0}{r}\right)\exp(-j\beta_0 r)\quad(A/m)$，求它的辐射电场（式中 $\tilde{H}$ 为复数矢量，$\dot{H}_0$ 为复常数，$\hat{i}_\varphi$ 为 φ 方向的单位矢量，j 为虚数单位）。

七、（本题 15 分）

设 $z<0$ 为理想导体．$z>0$ 为均匀理想电介质（ε,μ_0）。一右旋圆极化波从 $z>0$ 区域垂直入射到上述两种材料构成的边界（$z=0$）上，求反射波的极化状态。

八、（本题 15 分）

自由空间中，均匀平面波的电场为

$$\tilde{E}=(-\hat{i}_x-\hat{i}_y+j\sqrt{5}\hat{i}_z)\exp[j(x+by+cz)]\quad(V/m)$$

试求解该波的传播方向、波长和极化状态，

北京航空航天大学

二OO三年硕士试题　　题单号：424

电磁场理论　　（共 2 页）

考生注意：所有答题务必书写在考场提供的答题纸上，写在本试题单上的答题一律无效（本题单不参与阅卷）。

一、（本题 15 分）

写出线性各向同性媒质中的微分形式时变电磁场方程和相应的边界条件。

二、（本题 20 分）

电荷量为 Q 的点电荷，位于 $(x,y,z)=(x',y',z')$ 处，点电荷之外为均匀线性各向同性电介质（介电常数为 ε=常数），求空间任意点 (x,y,z) 处的电位移 $\bar{D}$、电场强度 $\bar{E}$ 以及电位 Φ。

三、（本题 20 分）

已知球坐标系中一个半径为 a 的球面上的电位分布为 $\Phi|_{r=a}=V_0$，球内外无电荷，求球内外的电场强度 $\bar{E}$ 以及电位 Φ。

四、（本题 15 分）

已知直角坐标系中一个二维区域边界上的电位分布为：

$$\Phi|_{x=0}=0,\quad \Phi|_{x=a}=0,\quad \Phi|_{y=0}=0,\quad \Phi|_{y=a}=V_0\sin\frac{\pi x}{a}$$

求该区域内的电位分布。

五、（本题 20 分）

已知球坐标系中一个半径为 a 的球面具有面电荷分布 $\eta = \eta_0 \cos\theta$（也可记为面电荷分布 $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$），球内外无电荷．求球内外的电场强度 $\tilde{E}$（球坐标系的坐标变量为 r,θ,φ）。

六、（本题 20 分）

设 $z>0$ 区域为均匀理想介质 (ε_1,μ_1)，$z<0$ 区域为均匀理想介质 (ε_2,μ_2)，垂直极化波从 $z>0$ 区域以 θ 入射角（入射角即入射线与界面法线的锐夹角）斜入射到上述两种介质的界面，求反射系数和透射系数。

七、（本题 20 分）

分析判断平面波

$$\tilde{E} = (4\hat{x} + 3\hat{y} + j5\hat{z})e^{j(3x-4y)} \quad (V/m)$$

的极化状态和极化旋转方向。其中，$\tilde{E}$ 分别为电场复矢量（也可记为 $\dot{E}$），$\hat{x}$、$\hat{y}$、$\hat{z}$ 为直角坐标相应的单位矢量）。

八、（本题 20 分）

位于座标原点的电流元 $I d\vec{z}$（I 为电流元的复数电流强度，$d\vec{z}$ 为指向 $+\hat{z}$ 方向的位移矢量）的远区辐射场为

$$\tilde{E} = \hat{\theta}\tilde{E}_\theta, \quad \tilde{H} = \hat{\varphi}\frac{\tilde{E}_\theta}{\eta}$$

其中 $\tilde{E},\tilde{H}$ 分别为电场复矢量和磁场复矢量（也可记为 $\dot{E}$、$\dot{H}$），$\hat{\theta}$、$\hat{\varphi}$ 为球坐标 θ、φ 相应的单位矢量，$\dot{E}_\theta = \sin\theta \dfrac{e^{-j\eta r}}{r} c\eta$（$c$、$\eta$ 为常数）。求中心位于 $(x,y,z)=(0,0,d)$ $(d \ll r)$ 的电流元 $I d\vec{z}$ 的远区辐射场。

2003. 11. 13

2000. 6. 24 期末

一. 试写出时谐形式微分场定律、边界条件 (2) P353.

1) $\nabla\times\vec{\tilde{E}}(r) = -j\omega\tilde{B}(r)$ $\qquad$ $\nabla\times\tilde{E}(r) = -j\omega\mu\tilde{H}(r)$

$\nabla\times\hat{H}(r) = \tilde{J}_f(r) + j\omega\hat{D}(r)$ $\qquad$ $\nabla\times\tilde{H}(r) = \tilde{J}_f(r) + j\omega\varepsilon\tilde{E}(r)$

$\nabla\cdot\tilde{D}(r) = \dot{\rho}_f(r)$ $\qquad$ $\nabla\cdot\varepsilon\tilde{E}(r) = \dot{\rho}_f(r)$

$\nabla\cdot\hat{B}(r) = 0$ $\qquad$ $\nabla\cdot\mu\tilde{H}(r) = 0$

$\nabla\cdot\tilde{J}_f(r) = -j\omega\dot{\rho}_f(r)$ $\qquad$ $\nabla\cdot\hat{J}_f(r) = -j\omega\dot{\rho}_f(r)$.

② B.C.: $\vec{i}_n\times(\vec{E}_1-\vec{E}_2)=0$

$\vec{i}_n\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=\vec{K}$

$\vec{i}_n\cdot(\varepsilon E_1-\varepsilon E_2)=\eta$

$\vec{i}_n\cdot(\mu\vec{H}_1-\mu\vec{H}_2)=0$

$\vec{i}_n\cdot(\vec{J}_1-\vec{J}_2)+\nabla_\Sigma\cdot\vec{K}=-\frac{\partial\eta}{\partial t}$

二. poynting 矢量公式、导电媒质中 P.T. 积分式、微分式及物理意义.

P286. $\vec{S}(r,t)=\vec{E}(r,t)\times\vec{H}(r,t)$ $\quad(W/m^2)$.

P293. 8-106.

微: $\underbrace{-\nabla\cdot\vec{S}(r,t)+p_s(r,t)}_{\text{供给的区域的功率密度}} = \underbrace{p_d(r,t)+p_p(r,t)+p_m(r,t)}_{\text{媒质吸收的功率密度}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}[w_E(r,t)+w_H(r,t)]}_{\text{电磁储能密度的增加率}}$

$\underbrace{-\oint_A\vec{S}(r,t)\cdot d\vec{a}+P_s}_{\text{P-T.}} = P_d+P_p+P_m+\frac{d}{dt}(W_E+W_H)\ (W)$

(电磁储能密度的增加率) (W/m³)

5.

7

V内由于物质电导率而消耗的功率　V内物质极化消耗的功率　V内物质磁化消耗的功率　V内电磁场储能增加所消耗的功率

$$-\oint_A \underbrace{\vec{S}(r,t)\cdot d\vec{a} + P_S}_{\text{供给V内总体功率}} = \underbrace{P_d + P_p + P_M}_{\text{V内物质吸收总功率}} + \underbrace{\frac{d}{dt}(W_E + W_H)}_{\text{V内电磁场总能量增加的功率（V内电磁场吸收的总功率）}} \quad (W)$$

P2P4

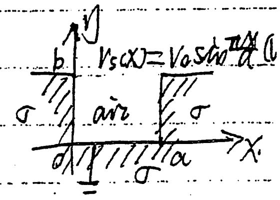
穿过A面流入V内的总电磁功率　V内的源供给的总功率

物理解释：区域V外向V内提供的电磁功率及V内源提供的电磁功率之和，一部分转化为V内的焦耳热被消耗，一部分被V内物质的极化和磁化所消耗，其余部分将使V内电磁场储存的能量增加。

1) P156 例4

三、解：这是一给定边值的静电场问题，与z无关的二维场。求解区域满足Laplace方程，即

$\nabla^2\Phi(r)=0$



B.C.: 1) $x=0,\ 0\le y\le b,\ -\infty<z<\infty$　$\Phi=0$

2) $x=a,\ 0\le y\le b,\ -\infty<z<+\infty$, $\Phi=0$

3) $y=0,\ 0\le x\le a,\ -\infty<z<\infty$　$\Phi=0$

4) $y=b;\ 0\le x\le a,\ -\infty<z<\infty$, $\Phi=V_0(x)=V_0\sin\frac{\pi x}{a}$ (V).

由边界条件选试探解：x方向：$x=0$ 和 $x=a$ 有两个电位零点 ∴x方向选为正弦形式。

y方向：$y=0$ 有一个电位零点 ∴选双曲正弦

∴选为 $\Phi=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{sh}\frac{n\pi y}{a}$　①

为求系数 A_n，以条件 $y=b$ 时，$\Phi(r)=V_0\sin\frac{\pi x}{a}$　∴①中只取 $n=1$ 时的试探解

6.

所取 $\Phi(r)=\Phi_1(r)=A\sin\frac{\pi x}{a}sh\frac{\pi y}{a}$

又 $\because \Phi(r)|_{y=b}=A\sin\frac{\pi x}{a}sh\frac{b}{a}\pi=V_0\sin\frac{\pi x}{a}$ $\therefore A=\frac{V_0}{sh\frac{\pi b}{a}}$

$\therefore$ 此时域内电位分布为 $\Phi(r)=\frac{V_0}{sh\frac{\pi b}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}sh\frac{\pi y}{a}$ (V) $(0<x<a, 0<y<b, -\infty<z<+\infty)$.

电场分布为: $\vec{E}(r)=-\nabla\Phi(r)=-\frac{\pi V_0}{a\,sh\frac{\pi b}{a}}(\hat{i}_x\cos\frac{\pi x}{a}sh\frac{\pi y}{a}+\hat{i}_y\sin\frac{\pi x}{a}ch\frac{\pi y}{a})$ V/m $(0<x<a, 0<y<b, -\infty<z<+\infty)$

面电荷分布: $\hat{i}_n\cdot(\varepsilon_0\vec{E}_1-\varepsilon_0\vec{E}_2)=\eta$ $(\hat{i}_{n}: 2\to 1)$

$y=0$: $\eta|_{y=0}=-\varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial y}|_{y=0}=-\varepsilon_0\frac{\pi}{a}\frac{V_0}{sh\frac{\pi b}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}$ (C/m^2)

$x=0$: $\eta|_{x=0}=-\varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial x}|_{x=0}=-\varepsilon_0\frac{\pi V_0}{a\,sh\frac{\pi b}{a}}\cancel{\cos\frac{\pi x}{a}}\,sh\frac{\pi y}{a}$ (C/m^2).

$x=a$: $\eta|_{x=a}=\varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial x}|_{x=a}=-\varepsilon_0\frac{\pi V_0}{a\,sh\frac{\pi b}{a}}\cdot sh\frac{\pi y}{a}$ (C/m^2)

2). 将上题条件 $V_s(x)=V_0$ 即可. 应用迭加原理和 F.S 把它满足边界条件的.

$\Phi(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(r)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{a}x\,sh\frac{n\pi}{a}y$ ②

$\therefore \Phi(r)|_{y=b}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{a}x\,sh\frac{b}{a}n\pi=V_0$

$$A_n=\frac{2V_0}{a\,sh\frac{bn\pi}{a}}\int_0^a\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx=\begin{cases}\frac{4V_0}{n\pi\,sh\frac{n\pi b}{a}} & (n=1,3,5,\cdots)\\ 0, & (n=2,4,6,\cdots)\end{cases}$$

将 A_n 代入②, 用 $n\to(2n-1)$ 代换, 得

$A_n=\frac{4V_0}{(2n-1)\pi\,sh\frac{(2n-1)\pi b}{a}}$ $(n=1,2,3,\cdots)$

$\therefore V_s(x)=V_0$ 时, 电位分布 $\Phi(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4V_0\sin(\frac{(2n-1)\pi}{a}x)sh(\frac{(2n-1)\pi y}{a})}{(2n-1)\pi\,sh\frac{(2n-1)\pi b}{a}}$ (V) $0<x<a$, $0<y<b$, $-\infty<z<+\infty$

四、推导均匀无耗介质（μ,ε）中，$\tilde{E}=\tilde{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$，$\tilde{H}=\tilde{H}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ （$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$）

$\tilde{E}$、$\tilde{H}$、$\hat{i}_k$ 之间的关系。P224、波的特性

① ∵ $\nabla\cdot\tilde{E}(r)=\nabla\cdot(\tilde{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}})=0$ ∵ $\nabla\cdot(\vec{A}f)=f\nabla\cdot\vec{A}+\vec{A}\nabla f$

∴ 取 $\vec{A}=\tilde{E}_0$，$f=e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ ∴ $\tilde{E}_0\cdot\nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}+e^{-j\vec{k}\cdot r}\nabla\cdot\tilde{E}_0=0$

∵ $\tilde{E}_0$ 与坐标无关 ∴ $\nabla\tilde{E}_0=0$ 又∵ $\nabla e^{-j\vec{k}\cdot r}=-j\vec{k}e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$

∴ $\tilde{E}_0\cdot\nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}=-j\vec{k}\cdot(\tilde{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot r})=-j\tilde{k}\cdot\tilde{E}(r)=0$

即 $\tilde{k}\cdot\tilde{E}(r)=0$ $\hat{i}_k\cdot\tilde{E}(r)=0$ ∴UPW 电场垂直于波的传播方向.

② ∵ $\nabla\times\tilde{E}(r)=-j\omega\mu\tilde{H}(r)=\nabla\times(\tilde{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}})$ $\nabla\times(fA)=\nabla f\times A+f\nabla\times A$

取 $A=\tilde{E}_0$，$f=e^{-j\vec{k}\cdot r}$ $\tilde{E}_0$ 与坐标无关 ∴ $\nabla\times\tilde{E}_0=0$

∴ $\nabla\times\tilde{E}(r)=-j\vec{k}\times\tilde{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot r}=-j\omega\mu\tilde{H}(r)$

∴ $\tilde{H}(r)=\frac{1}{\omega\mu}\tilde{k}\times\tilde{E}(r)$ (A/m) ①

两边点乘 $\tilde{k}$ ∴ $\tilde{k}\cdot\tilde{H}(r)=0$ $\hat{i}_k\cdot\tilde{H}(r)=0$ UPW 磁场矢量垂直于传播方向.

两边点乘 $\tilde{E}(r)$ ∴ $\tilde{E}(r)\cdot\tilde{H}(r)=0$ ∴ $\tilde{E}(r)$, $\tilde{H}(r)$, $\tilde{k}$ 在空间方向上彼此正交

①中，$\tilde{k}=\hat{i}_k k$ $\eta=\frac{\omega\mu}{k}$ 为复数波阻抗

$\tilde{H}(r)=\frac{1}{\eta}\hat{i}_k\times\tilde{E}(r)$ ②

两边叉乘 $\hat{i}_k$，得 $\tilde{E}(r)=\eta\tilde{H}(r)\times\hat{i}_k$ ③

② ③ 即为导出的三者之间的关系.

五 1). 自由空间 $\vec{E}(\vec{r}) = (\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + j\sqrt{5}\hat{a}_z)e^{-j(2x+by+cz)}$ (V/m)

求波长、传播方向、极化状态 P.357 例12.

解：$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$\vec{E}_0 = \hat{a}_x + 2\hat{a}_y + j\sqrt{5}\hat{a}_z$，$\vec{k}\cdot\vec{r} = 2x+by+cz$

∴ $\vec{k} = 2\hat{a}_x + b\hat{a}_y + c\hat{a}_z$

∵ $\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 2+2b+jc\sqrt{5} = 0$ ∴ $b=-1$，$c=0$.

∴ $\vec{k} = 2\hat{a}_x - \hat{a}_y$. ∴传播矢量为实矢量，衰减因子 $\alpha=0$.

∴ $\vec{k} = \vec{\beta} = 2\hat{a}_x - \hat{a}_y$

传播方向 $\hat{a}_\beta = \frac{\vec{\beta}}{|\beta|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\hat{a}_x - \hat{a}_y)$

∵ $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ ∴ 波长 $\lambda = \frac{2\pi}{|\beta|} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2.81m$

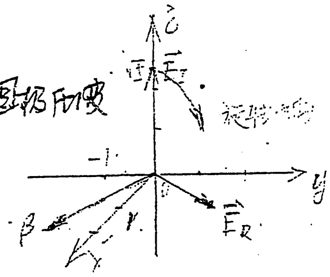
为求极化状态，将 $\vec{E}_0$ 分为实部矢量和虚部矢量.

∵ $\vec{E}_0 = \hat{a}_x + 2\hat{a}_y + j\sqrt{5}\hat{a}_z$

∴ $\begin{cases} \vec{E}_R = \hat{a}_x + 2\hat{a}_y \\ \vec{E}_I = \sqrt{5}\hat{a}_z \end{cases}$ ∵ $\begin{cases} |\vec{E}_R| = |\vec{E}_I| = \sqrt{5} \\ \vec{E}_R \cdot \vec{E}_I = 0 \to \vec{E}_R \perp \vec{E}_I \end{cases}$ ∴圆极化波

画出 $\vec{\beta}$、$\vec{E}_R$、$\vec{E}_I$.

旋转方向与 $\vec{\beta}$ 方向成左手螺旋关系 ∴左旋圆极化波



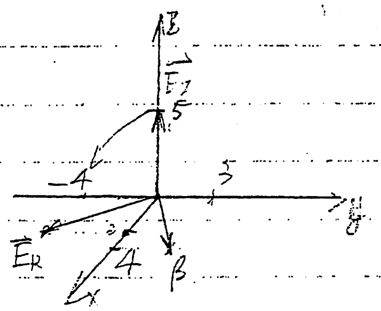
2). $\vec{E}=(3\hat{i}_x-4\hat{i}_y+j5\hat{i}_z)E_0e^{-j(4x+3y)}$、求传播方向、极化形式、旋转性

解：$\vec{E}(r)=\vec{E}_0e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$\vec{k}\cdot\vec{r}=4x+3y$ $\therefore\vec{k}=4\hat{i}_x+3\hat{i}_y$

传播常数是实常数，$\vec{k}=\vec{\beta}=4\hat{i}_x+3\hat{i}_y$

$\therefore$ 传播方向 $\vec{i}_\beta=\frac{\vec{\beta}}{|\beta|}=\frac{4}{5}\hat{i}_x+\frac{3}{5}\hat{i}_y$



$\vec{E}_R\ \vec{E}_0=E_0(3\hat{i}_x-4\hat{i}_y+j5\hat{i}_z)$ (V/m)

$\therefore\begin{cases}\vec{E}_R=3\hat{i}_x-4\hat{i}_y\\ \vec{E}_I=5\hat{i}_z\end{cases}$

$\because$ $|\vec{E}_R|=|\vec{E}_I|=5$ $\therefore$ 圆极化波

$\vec{E}_R\cdot\vec{E}_I=0$

在同一坐标系中画出 $\vec{E}_R$、$\vec{E}_I$、$\vec{\beta}$，旋转方向与$\vec{\beta}$方向成右手螺旋关系

$\therefore$ 右旋圆极化波.

10.

13

两种媒质的理想介质分界面.

回 六、1) 垂直极化 UPW (幅度为常数)，θ 入射. 求反/折射系数 $[(\mu_1,\varepsilon_1),(\mu_2,\varepsilon_2)]$.

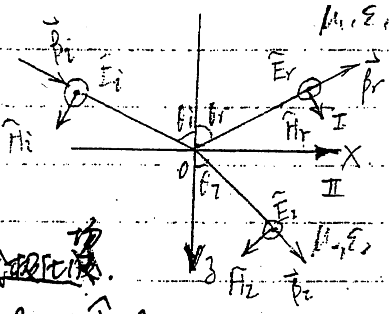
(与第2)题同

(21) $z<0$：$(\mu_1\varepsilon_1)$，$z>0$，(μ_2,ε_2) P411 ~~推导菲涅尔公式~~ (2)

垂直极化 UPW 从 $z<0$ 以 θ_i 入射斜入射，求反/透射系数。

如图所示，设入射波是电场为y方向的线极化场的均匀平面波，入射角 θ_i，由 Snell 定律

$\theta_r=\theta_i$，$n_2\sin\theta_t=n_1\sin\theta_i$



线性介质中，线极化波的极化状态不变，∴反/折射波也应是垂直极化波，它们的电场也是y方向的线极化场。

由图示，有 $\vec{\beta_i}=\beta_1(\hat{i}_x\sin\theta_i+\hat{i}_z\cos\theta_i)=\hat{i}_x\beta_{1x}+\hat{i}_z\beta_{1z}$

$\vec{\beta_r}=\beta_1(\hat{i}_x\sin\theta_i-\hat{i}_z\cos\theta_i)=\hat{i}_x\beta_{1x}-\hat{i}_z\beta_{1z}$

$\vec{\beta_t}=\beta_2(\hat{i}_x\sin\theta_t+\hat{i}_z\cos\theta_t)=\hat{i}_x\beta_{2x}+\hat{i}_z\beta_{2z}$

其中 $\begin{cases}\beta_{1x}=\beta_1\sin\theta_i, & \beta_{1z}=\beta_1\cos\theta_i,\\ \beta_{2x}=\beta_2\sin\theta_t, & \beta_{2z}=\beta_2\cos\theta_t\end{cases}$ 为 $\vec{\beta_i}$，$\vec{\beta_t}$ 在x、z方向的投影

∴入射波电场 $\tilde{E}_i=\hat{i}_y E_{i0}e^{-j(\beta_{1x}x+\beta_{1z}z)}$ (V/m)

∵ $\tilde{H}(r)=\frac{1}{\eta}\hat{i}_\beta\times\tilde{E}(r)$ ∴ $\tilde{H}_i=\frac{E_{i0}}{\eta_1}(-\hat{i}_x\cos\theta_i+\hat{i}_z\sin\theta_i)e^{-j(\beta_{1x}x+\beta_{1z}z)}$ (A/m)

反射波：$\tilde{E}_r=\hat{i}_y E_{r0}e^{-j(\beta_{1x}x-\beta_{1z}z)}$ (V/m)

$\tilde{H}_r(r)=\frac{1}{\eta_1}\hat{i}_{\beta r}\times\tilde{E}_r=\frac{E_{r0}}{\eta_1}(\hat{i}_x\cos\theta_i+\hat{i}_z\sin\theta_i)e^{-j(\beta_{1x}x-\beta_{1z}z)}$ (A/m)

折射波：$\tilde{E}_t=\hat{i}_y E_{t0}e^{-j(\beta_{2x}x+\beta_{2z}z)}$ (V/m)

$\tilde{H}_t=\frac{1}{\eta_2}\hat{i}_{\beta t}\times\tilde{E}_t=\frac{E_{t0}}{\eta_2}(-\hat{i}_x\cos\theta_t+\hat{i}_z\sin\theta_t)e^{-j(\beta_{2x}x+\beta_{2z}z)}$ (A/m)

为求出 E_{r0}，E_{t0} 与 E_{i0} 之间的关系，使用边界条件

$$\begin{cases}\hat{i}_n\times(\tilde{E}_1-\tilde{E}_2)|_{z=0}=0\\ \hat{i}_n\times(\tilde{H}_1-\tilde{H}_2)|_{z=0}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[(\dot{E}_{it}+\dot{E}_{rt})-\dot{E}_{tt}]|_{z=0}=0 & ①\\ [(\dot{H}_{it}+\dot{H}_{rt})-\dot{H}_{tt}]|_{z=0}=0 & ②\end{cases}$$

12.

下标x表示分界面切线方向的分量，由①可得

$$\dot{E}_{i0}e^{-j\beta_{1x}x}+\dot{E}_{r0}e^{-j\beta_{1x}x}=\dot{E}_{t0}e^{-j\beta_{2x}x}$$

由Snell定律 $\because$ $n_2\sin\theta_t=n_1\sin\theta_i$，$\begin{cases}\beta_{1x}=\beta_1\sin\theta_i=n_1\beta_0\sin\theta_i\\ \beta_{2x}=\beta_2\sin\theta_t=n_2\beta_0\sin\theta_t\end{cases}$ $\therefore\ \beta_{1x}=\beta_{2x}$

$\therefore\ \dot{E}_{i0}+\dot{E}_{r0}=\dot{E}_{t0}$ ✓ ③

同理由②式可得 $\dfrac{\cos\theta_i}{\eta_1}(\dot{E}_{i0}-\dot{E}_{r0})=\dfrac{\cos\theta_t}{\eta_2}\dot{E}_{t0}$ ④，由③，④

$\therefore$ 反射系数 $\Gamma_\perp=\dfrac{\dot{E}_{r0}}{\dot{E}_{i0}}=\dfrac{\eta_2\cos\theta_i-\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t}$

折 - - - $T_\perp=\dfrac{\dot{E}_{t0}}{\dot{E}_{i0}}=1+\Gamma_\perp=\dfrac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t}$

14.

17