

湖南省长沙市 2021-2022 学年高二数学下学期期中试题

时量：120 分钟 满分：150 分

第 I 卷（选择题共 60 分）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -2 < x < 1\}$, $B = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $\{x | 0 \leq x < 1\}$ B. $\{x | -2 < x \leq 3\}$ C. $\{x | 1 < x \leq 3\}$ D. $\{x | 0 < x < 1\}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据集合的并集计算即可.

【详解】 $Q A = \{x | -2 < x < 1\}$, $B = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$

$$\therefore A \cup B = \{x | -2 < x \leq 3\},$$

故选：B

2. 若单位向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ()

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 1

【答案】B

【解析】

【分析】由向量的数量积的定义，代入可得选项.

【详解】因为单位向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 所以 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

故选：B.

【点睛】本题考查向量的数量积的定义，属于基础题.

3. 某校高一、高二、高三的住校生人数分别为 120, 180, 150, 为了解他们对学校宿舍的满意程度，按人数比例用分层抽样的方法抽取 90 人进行问卷调查，则高一、高二、高三被抽到的住校生人数分别为 ()

- A. 12, 18, 15 B. 20, 40, 30 C. 25, 35, 30 D. 24, 36, 30

【答案】D

【解析】

【分析】由题意求出抽样比，根据抽样比求高一、高二、高三被抽到的住校生人数即可.

【详解】三个年级的住校生一共有 $120 + 180 + 150 = 450$ 人，

∴ 抽样比为 $\frac{90}{450} = \frac{1}{5}$ ，故三个年级抽取的人数分别为 $120 \times \frac{1}{5} = 24$ ， $180 \times \frac{1}{5} = 36$ ， $150 \times \frac{1}{5} = 30$ 。

故选：D.

4. 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ ，则 $f(f(0))$ 等于 ()

- A. 1 B. 0 C. 2 D. -1

【答案】C

【解析】

【分析】根据函数解析式，先求 $f(0)$ ，再根据其值大小求 $f(f(0))$ 即可。

【详解】Q $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 故 $f(0) = 1$ ， $f(f(0)) = f(1) = 1+1 = 2$ 。

故选：C.

【点睛】本题考查分段函数函数值的求解，属简单题。

5. 已知复数 z 满足 $iz = 2 + i$ ，则 z 的虚部为 ()

- A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

【答案】B

【解析】

【分析】根据复数除法的运算性质，结合复数虚部的定义进行求解即可。

【详解】由 $iz = 2 + i \Rightarrow z = \frac{2+i}{i} = \frac{2i+i^2}{i^2} = 1-2i$ ，所以 z 的虚部为 -2，

故选：B

6. 椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的左、右焦点为 F_1 、 F_2 ，一直线过 F_1 交椭圆于 A、B，则 $\triangle ABF_2$ 的周长为 ()

- A. 32 B. 16 C. 8 D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】利用椭圆的定义可求得 $\triangle ABF_2$ 的周长。

【详解】在椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 中， $a = 4$ ，则 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $|AF_1| + |AF_2| + |BF_1| + |BF_2| = 4a = 16$ 。

故选：B.

7. 在正方形 $ABCD$ 中, O 为两条对角线的交点, E 为边 BC 上的动点. 若 $\vec{AE} = \lambda \vec{AC} + \mu \vec{DO}$ ($\lambda, \mu > 0$),

则 $\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$ 的最小值为 ()

A. 2

B. 5

C. $\frac{9}{2}$

D. $\frac{14}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】以点 A 为原点, 以 AB , AD 所在直线为 x , y 轴建立平面直角坐标系, 设正方形的边长为 1, 求出已知点的坐标, 然后设出点 E 的坐标, 代入已知关系式, 即可求出 λ , μ 的关系式, 然后根据基本不等式即可求解.

【详解】如图所示, 以点 A 为原点, 以 AB , AD 所在直线为 x , y 轴建立平面直角坐标系, 设正方形的边长为 1, 则 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$,

则根据中点坐标公式可得 $O(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 设点 E 的坐标为 $(1, m)$,

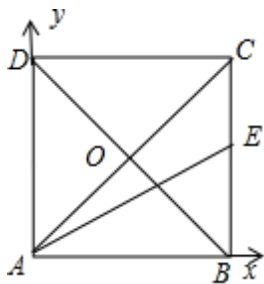
则由 $\vec{AE} = \lambda \vec{AC} + \mu \vec{DO}$ ($\lambda, \mu > 0$), 可得 $(1, m) = \lambda(1, 1) + \mu(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$,

所以 $1 = \lambda + \frac{1}{2}\mu$, 则 $\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = (\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\mu})(\lambda + \frac{1}{2}\mu) = 2 + \frac{1}{2} + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\lambda}{\mu} \dots \frac{5}{2} + 2\sqrt{\frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\mu}{\lambda}} = \frac{9}{2}$,

当且仅当 $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\mu}{\lambda}$, 即 $\lambda = \mu$ 时取等号,

此时 $\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$,

故选：C



【点睛】关键点睛：解答本题有两个关键点，其一，是联想到利用坐标法分析求解，坐标法和基底法是解决向量问题常用的策略，要灵活选择；其二，是利用常量代换结合基本不等式求函数的最值.

8. 数列 $\{b_n\}$ 为正项等比数列, 且 $b_1=1$; 等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=2$, 且 $a_2=b_3$, $a_4=b_4$; 记 $c_n=\frac{a_n}{b_n}$,

数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $k > S_n \geq t (k, t \in \mathbf{Z})$ 恒成立, 则 $k-t$ 的最小值为 ()

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

【答案】C

【解析】

【分析】运用等差数列和等比数列的通项公式, 解方程可得公差和公比, 从而可得 a_n, b_n , 再由数列的错位相减法求和, 可得 S_n , 求得 S_n 的最大值和最小值, 结合不等式成立思想可得所求 $k-t$ 的最小值

【详解】设正项等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q, q > 0$, 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

则由题意可得 $2+d=q^2, 2+3d=q^3$,

得 $q^3-3q^2+4=0$, 化为 $(q+1)(q-2)^2=0$,

解得 $q=2$ 或 $q=-1$ (舍去), 则 $d=2$,

所以 $a_n=2+2(n-1)=2n, b_n=2^{n-1}$,

所以 $c_n=\frac{a_n}{b_n}=n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$,

所以 $S_n=1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \cdots + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$,

$\frac{1}{2}S_n=1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \cdots + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

两式相减可得

$\frac{1}{2}S_n=2+1+\frac{1}{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=2+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

得 $S_n=8-(n+2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$,

由 $S_n \geq S_1 = 2, S_n < 8$, 可得 $2 \leq S_n < 8$,

因为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 $\forall n \in \mathbf{N}^*, k > S_n \geq t (k, t \in \mathbf{Z})$ 恒成立,

所以可得 $k \geq 8, t \leq 2$,

所以 k 的最小值为 8, t 的最大值为 2, $k - t$ 的最小值为 6

故选: C

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 全选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知直线 a, b 和平面 α , 若 $a \perp \alpha, a \perp b$, 则直线 b 与平面 α 的位置关系可能是 ()

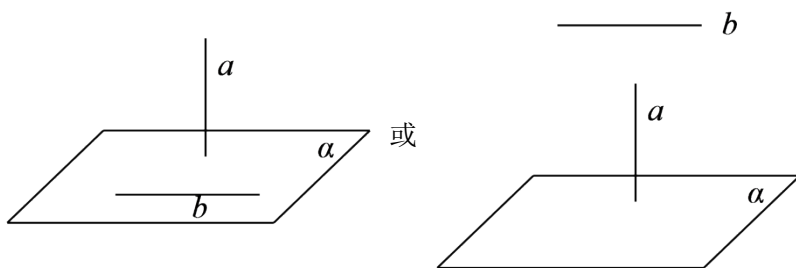
- A. $b // \alpha$ B. b 与 α 相交 C. $b \subset \alpha$ D. $b \perp \alpha$

【答案】AC

【解析】

【分析】画出图形, 发现直线 b 与平面 α 的位置关系有两种

【详解】如图, 直线 b 与平面 α 的位置关系有两种, 即 $b // \alpha$ 或 $b \subset \alpha$



故选: AC

10. 下列函数中, 在定义域上既是增函数, 又是奇函数的是 ()

- A. $y = -\frac{1}{x}$ B. $y = x^3$ C. $y = \tan x$ D. $y = \begin{cases} x^2 + 3x, & x \geq 0 \\ -x^2 + 3x, & x < 0 \end{cases}$

【答案】BD

【解析】

【分析】根据各项函数的定义域, 结合函数的奇偶性和单调性分别对选项进行判断即可.

【详解】函数 $y = -\frac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而函数 $y = -\frac{1}{x}$ 在其定义域内不具有单调性, 故 A 不符合题意;

函数 $y = x^3$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 由幂函数的性质, 可知函数 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 且为奇函

数，故 B 符合题意；

由正切函数的性质可知，函数 $y = \tan x$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$ ，且函数 $y = \tan x$ 在其定义域内

不具有单调性，故 C 不符合题意；

由二次函数的性质可知，函数 $y = x^2 + 3x$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，函数 $y = -x^2 + 3x$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，

又当 $x = 0$ 时， $x^2 + 3x = -x^2 + 3x = 0$ ，所以函数 $y = \begin{cases} x^2 + 3x, x \geq 0 \\ -x^2 + 3x, x < 0 \end{cases}$ 在其定义域上是增函数；令

$f(x) = y = \begin{cases} x^2 + 3x, x \geq 0 \\ -x^2 + 3x, x < 0 \end{cases}$ 设任意的 $x \in (0, +\infty)$ ，则 $-x \in (-\infty, 0)$ ，所以 $f(-x) = -x^2 - 3x = -f(x)$ ，

所以函数 $y = \begin{cases} x^2 + 3x, x \geq 0 \\ -x^2 + 3x, x < 0 \end{cases}$ 为奇函数，故 D 符合题意。

故选：BD.

11. 直线 $y = x + b$ 与曲线 $x = \sqrt{1 - y^2}$ 恰有一个交点，则实数 b 可取下列哪些值 ()

A. $-\sqrt{2}$

B. -1

C. 1

D. $\sqrt{2}$

【答案】AC

【解析】

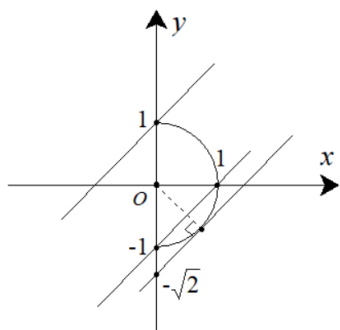
【分析】先画直线与曲线图象，再结合题意判断实数 b 的取值范围即可解题.

【详解】解：曲线 $x = \sqrt{1 - y^2}$ ，整理得 $x^2 + y^2 = 1$ ， $x \geq 0$ ，

画出直线与曲线的图象，如图，

直线 $y = x + b$ 与曲线 $x = \sqrt{1 - y^2}$ 恰有一个交点，

则 $b \in (-1, 1] \cup \{-\sqrt{2}\}$



故选：AC.

【点睛】本题考查根据直线与半圆的交点个数求参数，是基础题.

12. 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左右焦点, 过 F_2 作 x 轴的垂线与 C 交于 A, B 两点, 若 $\triangle ABF_1$ 为正三角形, 则 ()

A. $b = 2$

B. C 的焦距为 $2\sqrt{3}$

C. C 的离心率为 $\sqrt{3}$

D. $\triangle OBF_1$ 的面积为 $2\sqrt{3}$

【答案】BC

【解析】

【分析】由题可得 $|BF_2| = \frac{2c}{\sqrt{3}}, |BF_1| = \frac{4c}{\sqrt{3}}$, 根据双曲线定义可求出 c , 即可得出 b , 再依次判断即可.

【详解】由题可得 $|F_1F_2| = 2c, \angle BF_1F_2 = 30^\circ, \therefore |BF_2| = \frac{2c}{\sqrt{3}}, |BF_1| = \frac{4c}{\sqrt{3}}$,

由双曲线定义可得 $|BF_1| - |BF_2| = \frac{4c}{\sqrt{3}} - \frac{2c}{\sqrt{3}} = 2$, 解得 $c = \sqrt{3}$,

则 $1 + b^2 = 3$, 解得 $b = \sqrt{2}$, 故 A 错 B 对;

$e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$, C 对; $S_{\triangle OBF_1} = \frac{1}{2} |OF_1| |BF_2| = \sqrt{3}$, D 错.

故选: BC.

第 II 卷 (非选择题共 90 分)

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若点 $P(-1, 2)$ 在角 θ 的终边上, 则 $\tan \theta = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】-2

【解析】

【分析】利用任意角三角函数定义求解即可.

【详解】因为点 $P(-1, 2)$ 在角 θ 的终边上, 所以 $\tan \theta = \frac{2}{-1} = -2$.

故答案为: -2.

14. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 直线 AC 与 D_1B 所成角的大小为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 90° 或 $\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{1}{2}\pi$

【解析】

【分析】画出图形, 建立空间直角坐标系, 用空间向量求解 AC 与 D_1B 所成角.

【详解】以 D 为坐标原点，分别以 DA , DC , DD_1 为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系，设正方体棱长为 a ,

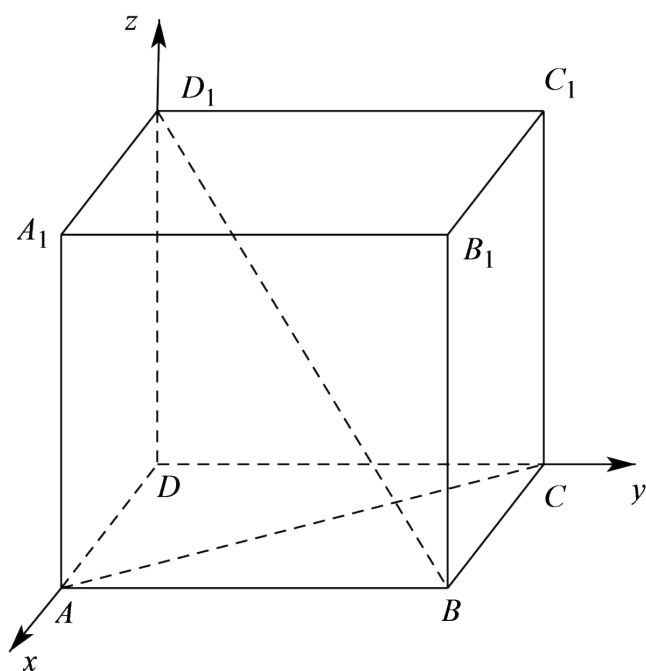
则 $A(a, 0, 0), C(0, a, 0), D_1(0, 0, a), B(a, a, 0)$,

则 $\overrightarrow{AC} = (-a, a, 0), \overrightarrow{D_1B} = (a, a, -a)$,

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{D_1B} = (-a, a, 0) \cdot (a, a, -a) = -a^2 + a^2 = 0$,

所以 $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{D_1B}$,

故直线 AC 与 D_1B 所成角为 90° .



故答案为: 90°

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n , 并且满足 $S_n = 2n^2 - 10n$, 则 a_2a_6 的值为_____.

【答案】 -48

【解析】

【分析】

由 $S_n = 2n^2 - 10n$, $a_2 = S_2 - S_1$, $a_6 = S_6 - S_5$, 能求出 a_2a_6 .

【详解】Q 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n , 且满足 $S_n = 2n^2 - 10n$,

$\therefore a_2 = S_2 - S_1 = (2 \times 4 - 10 \times 2) - (2 - 10) = -4$,

$$a_6 = S_6 - S_5 = (2 \times 36 - 10 \times 6) - (2 \times 25 - 10 \times 5) = 12,$$

$$\therefore a_2 a_6 = -4 \times 12 = -48.$$

故答案为: -48 .

16. $f(x) = x^4 - 6x^3 + rx^2 - 6x + 1$ 在 $(0, 3]$ 有且仅有三个零点, 则实数 r 的取值范围是_____.

【答案】 $\left(10, \frac{98}{9}\right)$

【解析】

【分析】 令 $f(x) = 0$ 有 $r = 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$, 令 $t = x + \frac{1}{x} \in [2, +\infty)$ 知: $t \in \left(2, \frac{10}{3}\right]$ 时, 有两个 x 值对应; $t \in \{2\} \cup \left(\frac{10}{3}, +\infty\right)$ 时, 有一个 x 值对应; 问题转化为 $g(t) = t^2 - 6t - 2 + r$ 的零点必有一个在 $\left(2, \frac{10}{3}\right]$, 另一个在 $\{2\} \cup \left(\frac{10}{3}, +\infty\right)$, 进而讨论零点分布求 r 的范围.

【详解】 令 $f(x) = 0$, 则 $x \in (0, 3]$ 上有 $r = 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$, 令 $t = x + \frac{1}{x} \in [2, +\infty)$, 则

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2,$$

$$\therefore r = 2 + 6t - t^2:$$

$\because t \in \left(2, \frac{10}{3}\right]$ 时, 有两个 x 值对应; $t \in \{2\} \cup \left(\frac{10}{3}, +\infty\right)$ 时, 有一个 x 值对应;

$\therefore$ 要使 $f(x)$ 由三个零点, 则 $g(t) = t^2 - 6t - 2 + r = 0$ 的零点分布如下:

1、 $t_1 \in \left(2, \frac{10}{3}\right]$, $t_2 \in \{2\}$: 将 $t_2 = 2$ 代入有 $r = 10$, 此时 $t_1 = 4 \notin \left(2, \frac{10}{3}\right]$, 不合要求;

2、由 $g(t)$ 对称轴 $t = 3 < \frac{10}{3}$, 若 $t_2 = \frac{10}{3}$ 则 $t_1 = 6 - \frac{10}{3} = \frac{8}{3} \notin \left(2, \frac{10}{3}\right]$, $\left(\frac{10}{3}, +\infty\right)$, 不合要求;

3、 $t_1 \in \left(2, \frac{10}{3}\right]$, $t_2 \in \left(\frac{10}{3}, +\infty\right)$: 有 $\begin{cases} g(2) = r - 10 > 0 \\ g\left(\frac{10}{3}\right) = r - \frac{98}{9} < 0 \end{cases}$, 即 $10 < r < \frac{98}{9}$.

综上, $r \in \left(10, \frac{98}{9}\right)$.

故答案为: $\left(10, \frac{98}{9}\right)$.

【点睛】 关键点点睛: 利用零点有 $r = 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$, 换元法令 $t = x + \frac{1}{x} \in [2, +\infty)$, 将问题转化为 $g(t) = t^2 - 6t - 2 + r$ 在 $[2, +\infty)$ 上零点分布情况分析.

四、解答题: 本题共 70 分, 解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_4 = 4$. 求:

(1) 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 数列 $\{a_n^2\}$ 的前4项和 S_4 .

【答案】(1) $a_n = 2^{n-2}$, $n \in \mathbb{N}^*$

(2) $S_4 = \frac{255}{12}$

【解析】

【分析】(1) 求出等比数列的公比, 再根据等比数列的通项公式即可得解;

(2) 利用等比数列前 n 项和公式即可得出答案.

【小问1详解】

解: 由题意, 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

$$\text{则 } q^3 = \frac{a_4}{a_1} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8, \text{ 解得 } q = 2,$$

$$\text{故 } a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}^*;$$

【小问2详解】

$$\text{解: 由 (1) 知, } a_n^2 = (2^{n-2})^2 = (2^2)^{n-2} = 4^{n-2} = \frac{1}{4} \cdot 4^{n-1},$$

故数列 $\{a_n^2\}$ 是以 $\frac{1}{4}$ 为首项, 4为公比的等比数列,

$$S_4 = \frac{\frac{1}{4} - 4^{4-1}}{1 - 4} = \frac{255}{12}.$$

18. 已知 a 、 b 、 c 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A 、 B 、 C 的边, $b \sin C + a \sin A = b \sin B + c \sin C$.

(1) 求 A ;

(2) 若 $a = \sqrt{7}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

【答案】(1) $A = \frac{\pi}{3}$

(2) $\sqrt{7} + 5$

【解析】

【分析】(1) 由正弦定理得 $bc + a^2 = b^2 + c^2$, 结合余弦定理即可求解;

(2) 利用面积公式得 $bc = 6$, 再根据余弦定理可得 $b^2 + c^2 = 13$, 从而求出周长.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/637042131104006125>