点击目录，进入相关章节

时域分析，以冲激函数为基本信号，任意输入信号可分解为一系列冲激函数；而$y_f(t) = h(t)*f(t)$。

本章将以正弦信号和虚指数信号$e^{j\omega t}$为基本信号，任意输入信号可分解为一系列不同频率的正弦信号或虚指数信号之和。

这里用于系统分析的独立变量是频率。故称为频域分析。

3.1 傅里叶级数

傅里叶级数是信号的一种分解形式，可以视作矢量正交分解的一种推广。下面先介绍信号正交和正交函数集的概念。

一、信号正交与正交函数集

1. 定义：

定义在(t_1，t_2)区间的两个函数$\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$,若满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t)\varphi_2^*(t)\,\mathrm{d}t = 0$$ (两函数的内积为0)

则称$\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$ 在区间(t_1，t_2)内**正交**。

2. 正交函数集：

若n个函数$\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$，…，$\varphi_n(t)$构成一个函数集，当这些函数在区间(t_1，t_2)内满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\varphi_j^*(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K_i \neq 0, & i = j \end{cases}$$

则称此函数集为在区间(t_1，t_2)的**正交函数集**。

3. 完备正交函数集：

如果在正交函数集{$\varphi_1(t)$， $\varphi_2(t)$， …， $\varphi_n(t)$}之外，不存在非零函数$\varphi(t)$满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\varphi_i(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

则称此函数集为**完备正交函数集**。

例如：三角函数集 $\{1, \cos n\omega_0 t, \sin n\omega_0 t,\ n=1,2,3\ldots\}$

和虚指数函数集 $\{e^{jn\omega_0 t},\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ 是两组典型的

在区间 $(t_0,\ t_0+T)\left(T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}\right)$ 上的完备正交函数集。

二、傅里叶级数的三角形式

1. 表示式

设f（t）是以T为周期的信号，且满足狄利赫里条件，则它可分解为：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \qquad (*)$$

其中，$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 为f（t）的基波角频率

上式称为傅里叶级数，系数a_n , b_n称为傅里叶系数

2. 系数的计算

系数a_n , b_n可通过函数正交的定义来推出：

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\omega_0 t)dt \qquad a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

容易验证， a_n 是n的偶函数， b_n是n的奇函数。

3. 等价形式

将式（*）中同频率项合并后，可得如下等价形式：

$$f(t)=\underbrace{A_0}_{\text{直流分量}}+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{A_n\cos(n\omega_0 t+\varphi_n)}_{\text{n次谐波分量}} \quad 其中\begin{cases}A_0=a_0,\\ A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\end{cases}$$

三、傅里叶级数的指数形式

1. 表示式

周期为T 的信号f（t）还可以分解为：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t} \qquad (**)$$

其中，$\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$ 含义同前

上式称为指数形式的傅里叶级数，傅里叶系数为 F_n

2. 系数F_n的计算

系数F_n可通过函数正交的定义或由三角形式推出：

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$ 复系数F_n可表示为： $$F_n = |F_n|e^{j\varphi_n}$$

3. 两种形式傅里叶系数的关系

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$ 对n = ±1，±2，…，但是 $$F_0 = a_0$$

（注意： $a_{-n} = a_n, b_{-n} = -b_n$）

$$|F_n| = \frac{1}{2}A_n = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}}$$ 但 $$|F_0| = |A_0| = |a_0|$$

由此可知，F_n 是n的偶函数，而 φ_n 是n的奇函数

四、周期信号的频谱及其特点

1、信号频谱的概念

从广义上说，信号的某种**特征量**随信号频率变化的关系，称为**信号的频谱**，所画出的图形称为信号的**频谱图**。

周期信号的频谱是指周期信号中各次谐波幅值、相位随频率的变化关系，即

将$A_n \sim \omega$和$\varphi_n \sim \omega$的关系分别画在以ω为横轴的平面上得到的两个图，分别称为**幅度频谱图**和**相位频谱图**。两个图合称为**频谱图**。因为$n \geq 0$，所以称这种频谱为**单边谱**。

也可画$|F_n|$~ω和φ_n~ω的关系，称为双边谱。若F_n为实数，也可直接画F_n 。

2.两种谱的关系

双边幅度谱谱线长度是单边谱相应频率的一半，而双边相位谱在正频率部分与单边相位谱相同。

3.周期信号频谱的特点

特点： (1)周期信号的频谱具有谐波(离散)性。谱线位置是基频ω_0的整数倍；(2)一般具有收敛性。总趋势减小。（3）随着T增大，谱线间隔频谱ω_0变小，频谱趋于连续谱。

例3.1.1：周期信号 $f(t) = 1-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}\right)$

试求该周期信号的基波周期T，基波角频率 ω_0，画出它的单边频谱图。

解 首先应用三角公式改写$f(t)$的表达式，即

$$f(t)=1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{2\pi}{3}+\pi\right)+\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)$$

显然1是该信号的直流分量。

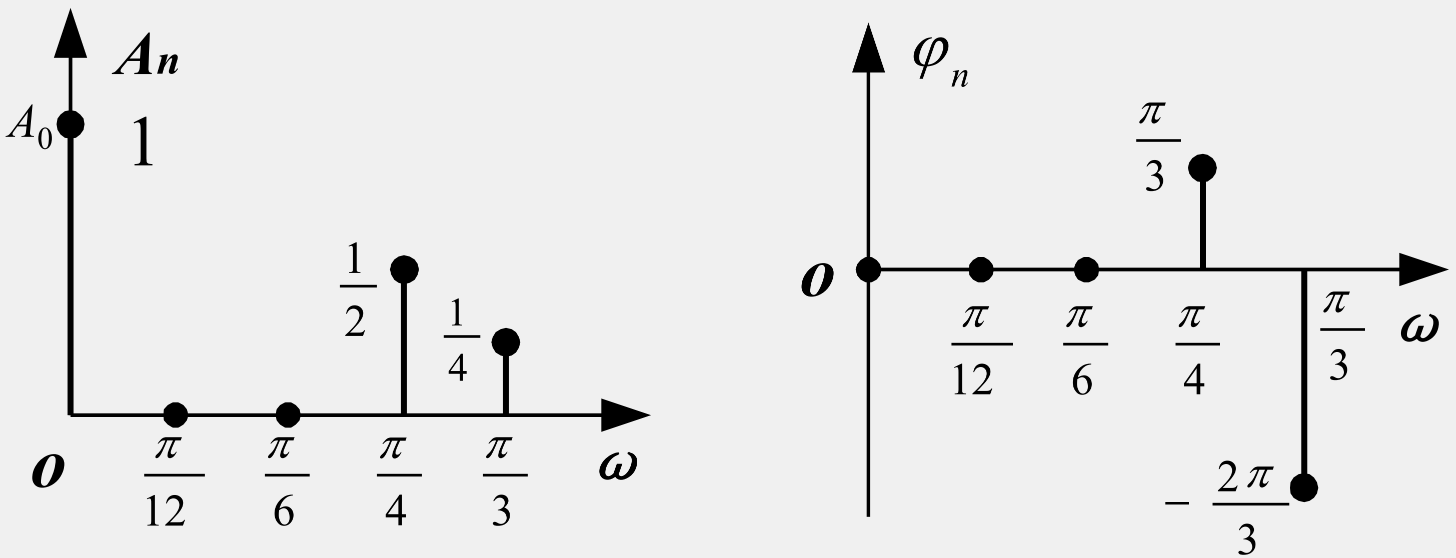
$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)$ 的周期$T_1 = 8$ $\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)$ 的周期$T_2 = 6$

所以f(t)的周期T = 24，基波角频率$\omega_0 = 2\pi/T = \pi/12$

$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)$ 是f(t)的[π/4]/[π/12]=3次谐波分量;

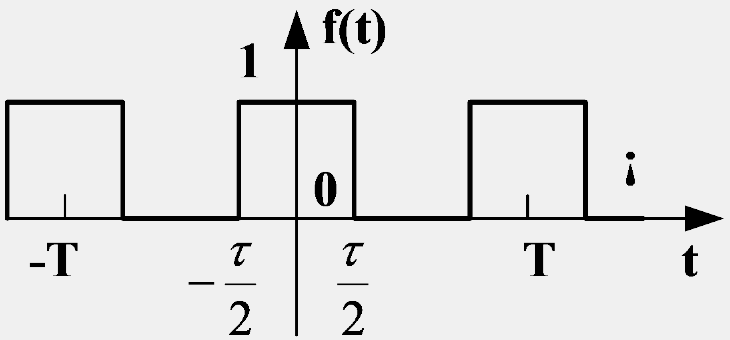
$\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)$ 是f(t)的[π/3]/[π/12]=4次谐波分量;

画出$f(t)$的单边幅度频谱图、相位频谱图如下



(a) (b)

例3.1.2：有一幅度为1，脉冲宽度为τ的周期矩形脉冲，其周期为T，如图所示。求频谱。

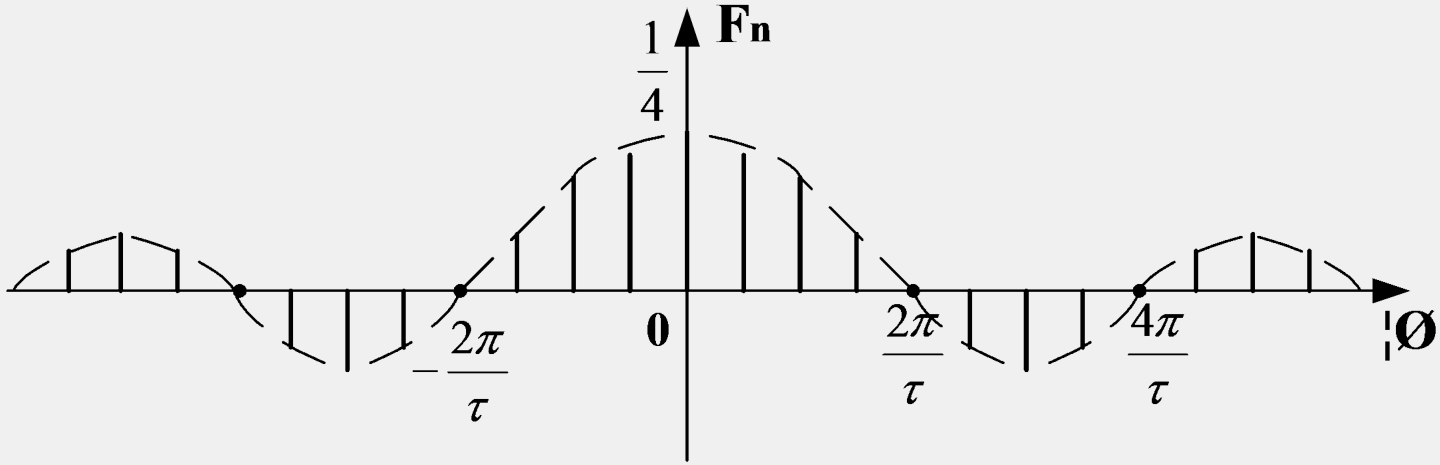


解：

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T}\left.\frac{\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\right|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{2}{T}\frac{\sin(\frac{n\omega_0\tau}{2})}{n\omega_0}=\frac{\tau}{T}Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

F_n为实数，可直接画成一个频谱图。下图是T = 4τ的情形。


Fn
1/4
0
-2π/τ
2π/τ
4π/τ
Ø

3. 2　非周期信号的频谱—傅里叶变换

一、傅里叶变换

非周期信号f(t)可看成是周期T→∞时的周期信号。

前已指出当周期T趋近于无穷大时，谱线间隔ω_0趋近于无穷小，从而信号的频谱变为连续频谱。各频率分量的幅度也趋近于无穷小，不过，这些无穷小量之间仍有差别。

为了描述非周期信号的频谱特性，引入频谱密度的概念。令

$$F(j\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{F_n}{1/T}=\lim_{T\to\infty}F_nT$$ (单位频率上的频谱)

称F(jω)为频谱密度函数。

根据傅里叶级数

$$F_n T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \qquad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n T\,\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}\,\frac{1}{T}$$

考虑到：T→∞， ω_0→无穷小，记为dω；

n ω_0 → ω（由离散量变为连续量），而

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \to \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$$

同时，$\sum \to \int$

于是，

$$F(j\omega) = \lim_{T\to\infty} F_n T = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

傅里叶变换式“–”

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\,\mathrm{e}^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

傅里叶反变换式

F(jω)称为f(t)的傅里叶变换或频谱密度函数，简称频谱。
f(t)称为F(jω)的傅里叶反变换或原函数。

也可简记为　$F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$

$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)]$

或 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$

$F(j\omega)$一般是复函数，写为

$$F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$$

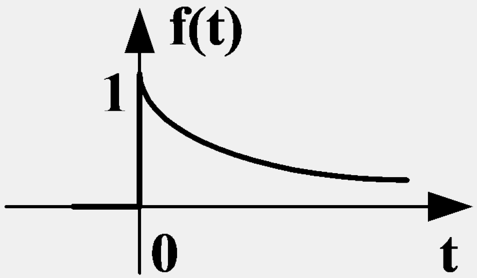
说明 (1)前面推导并未遵循严格的数学步骤。可证明，函数f(t)的傅里叶变换存在的充分条件为:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \mathrm{d}t < \infty$$

(2)用下列关系还可方便计算一些积分

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \qquad f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\mathrm{d}\omega$$

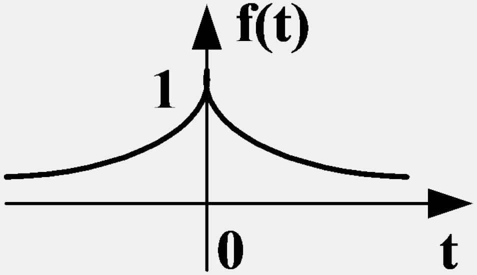
二、常用函数的傅里叶变换



1. 单边指数函数f(t) = $e^{-\alpha t}U(t)$，α >0实数

$$F(j\omega)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{\alpha+j\omega}\mathrm{e}^{-(\alpha+j\omega)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{\alpha+j\omega}$$

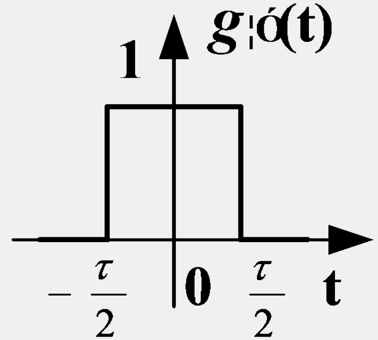
2. 双边指数函数f(t) = $e^{-\alpha|t|}$, α >0



$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\alpha-j\omega}+\frac{1}{\alpha+j\omega}=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

3. 门函数(矩形脉冲)

$$g_\tau(t)=\begin{cases}1, & |t|\le \dfrac{\tau}{2}\\[2mm] 0, & |t|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$



$$F(j\omega)=\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{-j\omega\frac{\tau}{2}}-\mathrm{e}^{j\omega\frac{\tau}{2}}}{-j\omega}=\frac{2\sin\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega}=\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

4. 冲激函数δ(t)、δ′(t)

$$\delta(t)\longleftrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t=1$$

$$\delta'(t)\longleftrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-j\omega t}\Big|_{t=0}=j\omega$$

5. 常数1

常数1 不满足绝对可积条件，不过其傅里叶变换也存在。因为 $\delta(t) \longleftrightarrow 1$，代入反变换定义式，有

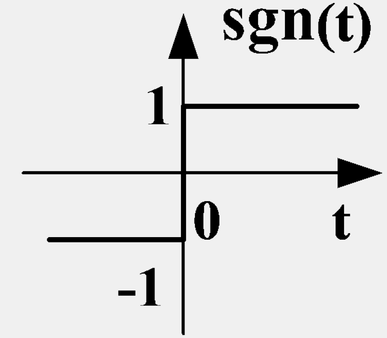
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega = \delta(t)$$

将ω→t，t→-ω，得 $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = \delta(-\omega)$$

再根据傅里叶变换定义式，得

$$1 \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

6. 符号函数



$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}-1, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

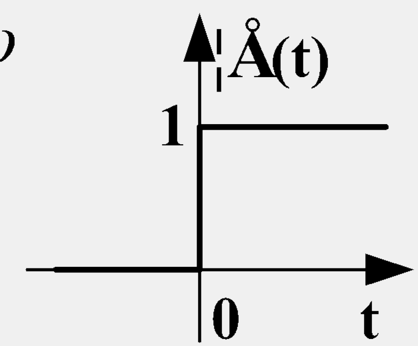
构造函数

$$f_\alpha(t)=\begin{cases}-\mathrm{e}^{\alpha t}, & t<0\\ \mathrm{e}^{-\alpha t}, & t>0\end{cases}\qquad \alpha>0$$

$$\mathrm{sgn}(t)=\lim_{\alpha\to 0} f_\alpha(t)\qquad f_\alpha(t)\longleftrightarrow F_\alpha(j\omega)=\frac{1}{\alpha+j\omega}-\frac{1}{\alpha-j\omega}=-\frac{j2\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$\mathrm{sgn}(t)\longleftrightarrow \lim_{\alpha\to 0}F_\alpha(j\omega)=\lim_{\alpha\to 0}\left(-\frac{j2\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right)=\frac{2}{j\omega}$$

7. 阶跃函数U(t)

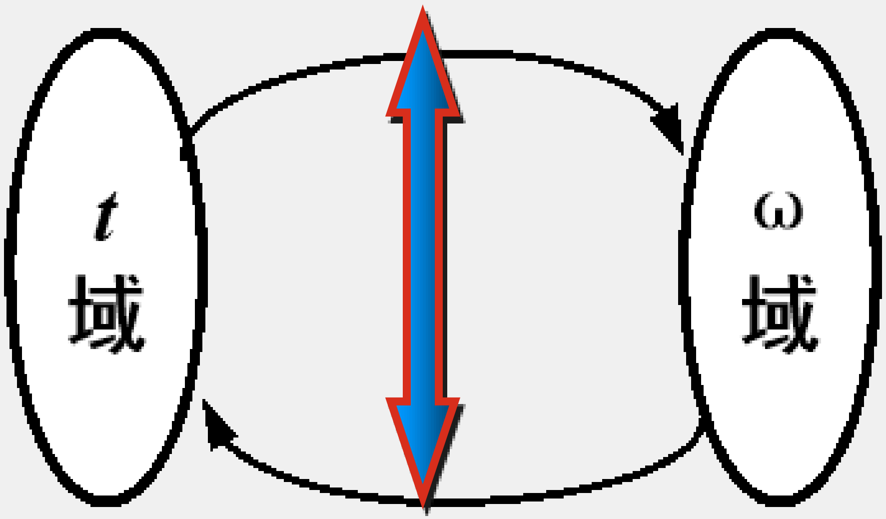


$$\varepsilon(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)\longleftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

归纳记忆：

1. 时频对应关系

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$



2. 常用函数 变换对：

$$\delta(t) \Longleftrightarrow 1$$

$$1 \Longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$U(t) \Longleftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

$$e^{-\alpha t}U(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{j\omega+\alpha}$$

$$g_{\tau}(t) \Longleftrightarrow \tau\, Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$\mathrm{sgn}(t) \Longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$e^{-\alpha|t|} \Longleftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

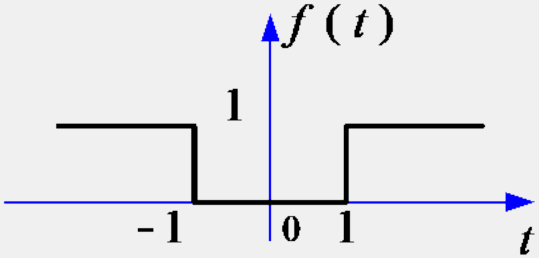
3. 3　傅里叶变换的性质

一、线性(Linear Property)

设　$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega)$，　$f_2(t) \longleftrightarrow F_2(j\omega)$

则　$$\boxed{a\, f_1(t) + b\, f_2(t) \longleftrightarrow a\, F_1(j\omega) + b\, F_2(j\omega)}$$

例　如图信号，$F(j\omega) = ?$



解：$f(t) = 1 - g_2(t)$

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega),\quad g_2(t) \longleftrightarrow 2Sa(\omega)$$

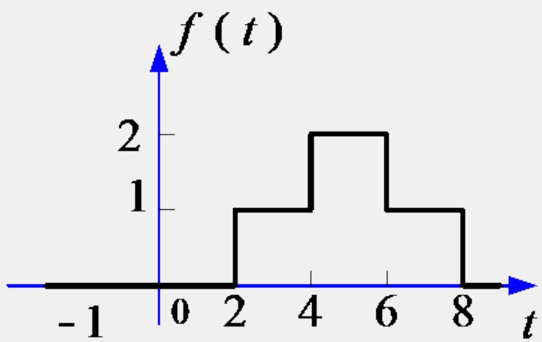
$$\therefore F(j\omega) = 2\pi\delta(\omega) - 2Sa(\omega)$$

二、时移性质(Time-shifting Property)

设 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ ，那么

$$\boxed{f(t-t_0) \longleftrightarrow \mathrm{e}^{-j\omega t_0} F(j\omega)}$$
(其中，t_0为实常数)

例 如图信号， $F(j\omega) = ?$



解: $f(t) = g_6(t-5) + g_2(t-5)$

$$g_6(t-5) \longleftrightarrow 6\,\mathrm{Sa}(3\omega)\,\mathrm{e}^{-j5\omega}$$

$$g_2(t-5) \longleftrightarrow 2\,\mathrm{Sa}(\omega)\,\mathrm{e}^{-j5\omega}$$

$$\therefore F(j\omega) = [6\,\mathrm{Sa}(3\omega) + 2\,\mathrm{Sa}(\omega)]\,\mathrm{e}^{-j5\omega}$$

三、对称性质(Symmetrical Property)

设 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ 则 $\boxed{F(jt) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)}$

证明： $$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\,\mathrm{e}^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \qquad (1)$$

将ω与t 互换，得

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(jt)\,\mathrm{e}^{j\omega t}\,\mathrm{d}t \qquad (2)$$

再将 ω换为-ω，有

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(jt)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$\therefore\ F(j\,t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

例3.3.1 $f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}\leftrightarrow F(j\omega)=?$

解：$\mathrm{e}^{-\alpha|t|}\longleftrightarrow\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$ **令α=1,得** $\mathrm{e}^{-|t|}\longleftrightarrow\dfrac{2}{1+\omega^2}$

$\therefore\ \dfrac{2}{1+t^2}\longleftrightarrow 2\pi\,\mathrm{e}^{-|\omega|}$ $\quad\dfrac{1}{1+t^2}\longleftrightarrow\pi\,\mathrm{e}^{-|\omega|}$

例3.3.2 $f(t)=\dfrac{\sin\omega_0 t}{\pi t}\leftrightarrow F(j\omega)=?$

解： $g_\tau(t)\longleftrightarrow\tau Sa\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$ 令 $\tau=2\omega_0$ 有

$$2\omega_0 Sa(\omega_0 t)\longleftrightarrow 2\pi g_{2\omega_0}(\omega)$$

所以 $f(t)=\dfrac{\omega_0}{\pi}Sa(\omega_0 t)\longleftrightarrow g_{2\omega_0}(\omega)$

四、频移性质

设 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ 那么

$$\boxed{F[j(\omega-\omega_0)] \longleftrightarrow e^{j\omega_0 t} f(t)}$$ 其中，ω_0 是实常数

例3.3.3 $f(t) = e^{j3t} \longleftrightarrow F(j\omega) = ?$

解: $1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$　　$e^{j3t} \times 1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-3)$

例3.3.4 $f(t) = \cos\omega_0 t \longleftrightarrow F(j\omega) = ?$

解: $f(t) = \dfrac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \dfrac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$

$F(j\omega) = \pi[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$ 类似地，

$\sin\omega_0 t \longleftrightarrow j\pi[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$

五、尺度变换性质(Scaling Transform Property)

设 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ 那么 $\boxed{f(at) \longleftrightarrow \dfrac{1}{|a|} F\left(j\dfrac{\omega}{a}\right)}$

式中，a 为非零实常数

特别地，令$a=-1$,有 $\boxed{f(-t) \longleftrightarrow F(-j\omega)}$

与时移特性结合，可得

$$f(at-b) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} e^{-j\frac{\omega}{a}b} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

六、卷积性质(Convolution Property)

1.时域卷积：

设 $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega)$， $f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\mathrm{j}\omega)$

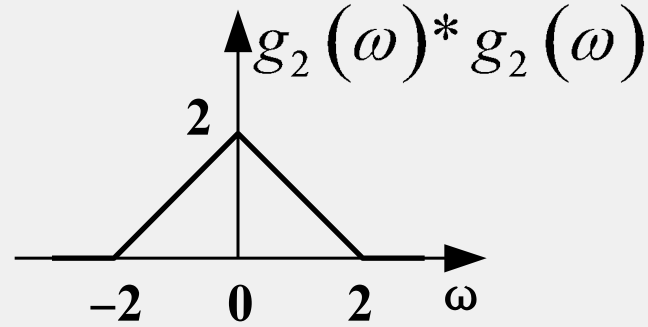
那么 $f_1(t)*f_2(t) \longleftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega)F_2(\mathrm{j}\omega)$

2. 频域卷积：

设 $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega)$， $f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\mathrm{j}\omega)$

那么 $f_1(t)\, f_2(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{2\pi}F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega)$

例3.3.5 $\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2 \longleftrightarrow F(j\omega)=?$

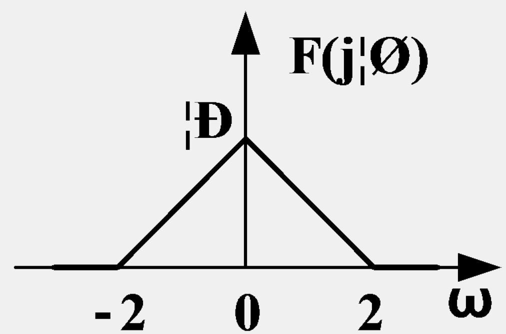


解: $g_2(t) \longleftrightarrow 2\,\mathrm{Sa}(\omega)$

由对称性，得

$$2\,\mathrm{Sa}(t) \longleftrightarrow 2\pi\ g_2(-\omega)$$

$$\mathrm{Sa}(t) \longleftrightarrow \pi\ g_2(\omega)$$



$$\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}[\pi\ g_2(\omega)]*[\pi\ g_2(\omega)] = \frac{\pi}{2} g_2(\omega) * g_2(\omega)$$

如上图所示。

七、时域的微分和积分

设 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ 那么

$$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \longleftrightarrow \pi\, F(0)\delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega} \qquad F(0) = F(j\omega)\Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

证明:

$$f^{(n)}(t) = \delta^{(n)}(t) * f(t) \longleftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$$

$$f^{(-1)}(t) = U(t) * f(t) \longleftrightarrow [\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}]F(j\omega)$$

$$= \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega}$$