

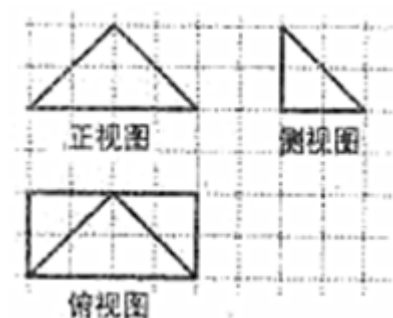
2025 届湖北省钟祥市第一中学高三适应性调研考试数学试题

注意事项:

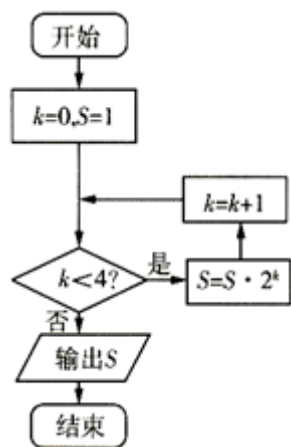
1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 如图，正方形网格纸中的实线图形是一个多面体的三视图，则该多面体各表面所在平面互相垂直的有（ ）



- A. 2 对
B. 3 对
C. 4 对
D. 5 对
2. 若复数 $z = 1 + \frac{2i}{1+i}$ (i 为虚数单位), 则 z 的共轭复数的模为 ()
A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$
B. 4
C. 2
D. $\sqrt{5}$
3. 若直线 $y = -2x$ 的倾斜角为 α , 则 $\sin 2\alpha$ 的值为 ()
A. $\frac{4}{5}$
B. $-\frac{4}{5}$
C. $\pm\frac{4}{5}$
D. $-\frac{3}{5}$
4. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 则 ()
A. $f(\log_3 0.3) > f(2^{-0.3}) > f(2^{-0.4})$
B. $f(\log_3 0.3) > f(2^{-0.4}) > f(2^{-0.3})$
C. $f(2^{-0.3}) > f(2^{-0.4}) > f(\log_3 0.3)$
D. $f(2^{-0.4}) > f(2^{-0.3}) > f(\log_3 0.3)$
5. $\frac{2+i}{1-i} =$ ()
A. $\frac{1+3i}{2}$
B. $\frac{3+i}{2}$
C. $\frac{3-i}{2}$
D. $\frac{-1+3i}{2}$
6. 执行如图所示的程序框图, 则输出的 S 的值是 ()



- A. 8 B. 32 C. 64 D. 128

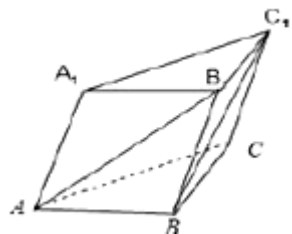
7. 一个正四棱锥形骨架的底边边长为2，高为 $\sqrt{2}$ ，有一个球的表面与这个正四棱锥的每个边都相切，则该球的表面积为（ ）

- A. $4\sqrt{3}\pi$ B. 4π C. $4\sqrt{2}\pi$ D. 3π

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列， S_n 为其前 n 项和， $4 + a_5 = a_6 + a_{10}$ ，则 $S_{21} =$ （ ）

- A. 7 B. 14 C. 28 D. 84

9. 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，底面边长和侧棱长都相等， $\angle BAA_1 = \angle CAA_1 = 60^\circ$ ，则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为（ ）



- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

10. 一个盒子里有4个分别标有号码为1, 2, 3, 4的小球，每次取出一个，记下它的标号后再放回盒子中，共取3次，则取得小球标号最大值是4的取法有（ ）

- A. 17种 B. 27种 C. 37种 D. 47种

11. 盒中装有形状、大小完全相同的5张“刮刮卡”，其中只有2张“刮刮卡”有奖，现甲从盒中随机取出2张，则至少有一张有奖的概率为（ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{7}{10}$ D. $\frac{4}{5}$

12. 若 $a \in [1, 6]$, 则函数 $y = \frac{x^2 + a}{x}$ 在区间 $[2, +\infty)$ 内单调递增的概率是 ()

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 函数 $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x}$ 的极大值为_____.

14. 已知 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 30° , $(\vec{a} + 2\vec{b}) \perp (2\vec{a} + \lambda\vec{b})$, 则 $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) =$ _____.

15. 函数 $f(x) = 4 \cos \omega x \sin(\omega x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} (\omega > 0)$ 的最大值与最小正周期相同, 则 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的单调递增区间为_____.

16. 若函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0)$ 的图像与直线 $y = m$ 的三个相邻交点的横坐标分别是 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$, 则实数 ω 的值为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

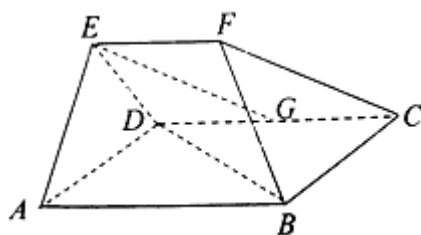
17. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 为等差数列, 且 $b_1 = a_1 = 1$, $b_3 = a_3 + 1$, $b_5 = a_5 - 7$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 A_n ;

(3) 设 S_n 为数列 $\{a_n^2\}$ 的前 n 项和, 若对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 有 $S_n + \frac{1}{3} = t \cdot 2^{b_n}$, 求实数 t 的值.

18. (12 分) 在以 $ABCDEF$ 为顶点的五面体中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = AE = ED = 2EF$, $EF \parallel AB$, 点 G 为 CD 中点, 平面 $EAD \perp$ 平面 $ABCD$.



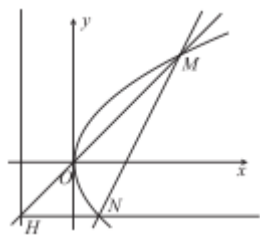
(1) 证明: $BD \perp EG$;

(2) 若三棱锥 $V_{E-FBC} = \frac{1}{2}$, 求菱形 $ABCD$ 的边长.

19. (12 分) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 直线 $y = x - 1$ 与 C 交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 8$.

(1) 求 p 的值;

(2) 如图, 过原点 O 的直线 l 与抛物线 C 交于点 M , 与直线 $x = -1$ 交于点 H , 过点 H 作 y 轴的垂线交抛物线 C 于点 N , 证明: 直线 MN 过定点.



20. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 - x + a \ln x$ ($a < 0$), 且 $f(x)$ 只有一个零点.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 若 $x_1 < x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明: $x_1 + x_2 > 2$.

21. (12 分) 已知 $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

(1) 求证: $a^4 - a^2b^2 + b^4 \geq \frac{ab(a^4 + b^4)}{a^2 + b^2}$;

(2) 若 $abc = 1$, 求证: $a^3 + b^3 + c^3 \geq ab + bc + ac$.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + x + 1}{e^x} - 1$.

(1) 证明: 当 $x > 0$ 时, $e^x > x^{\frac{5}{2}}$;

(2) 若函数 $f(x)$ 只有一个零点, 求正实数 a 的值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

画出该几何体的直观图 $P-ABCD$, 易证平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PCD \perp$ 平面 PAD , 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD , 平面 $PAB \perp$ 平面 PCD , 从而可选出答案.

【详解】

该几何体是一个四棱锥, 直观图如下图所示, 易知平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$,

作 $PO \perp AD$ 于 O , 则有 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, $PO \perp CD$,

又 $AD \perp CD$, 所以, $CD \perp$ 平面 PAD ,

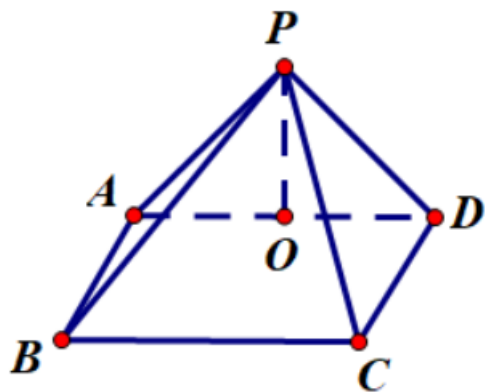
所以平面 $PCD \perp$ 平面 PAD ,

同理可证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD ,

由三视图可知: $PO=AO=OD$, 所以, $AP \perp PD$, 又 $AP \perp CD$,

所以, $AP \perp$ 平面 PCD , 所以, 平面 $PAB \perp$ 平面 PCD ,

所以该多面体各表面所在平面互相垂直的有 4 对.



【点睛】

本题考查了空间几何体的三视图, 考查了四棱锥的结构特征, 考查了面面垂直的证明, 属于中档题.

2、D

【解析】

由复数的综合运算求出 z , 再写出其共轭复数, 然后由模的定义计算模.

【详解】

$$Q z = 1 + \frac{2i}{1+i} = 1 + \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 2+i, \therefore \bar{z} = 2-i, \therefore |\bar{z}| = \sqrt{5}.$$

故选: D.

【点睛】

本题考查复数的运算, 考查共轭复数与模的定义, 属于基础题.

3、B

【解析】

根据题意可得 $\tan \alpha = -2$, 所求式子利用二倍角的正弦函数公式化简, 再利用同角三角函数间的基本关系弦化切后, 将 $\tan \alpha = -2$ 代入计算即可求出值.

【详解】

由于直线 $y = -2x$ 的倾斜角为 α , 所以 $\tan \alpha = -2$,

$$\text{则 } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{-2 \times 2}{(-2)^2 + 1} = -\frac{4}{5}$$

故答案选 B

【点睛】

本题考查二倍角的正弦函数公式，同角三角函数间的基本关系，以及直线倾斜角与斜率之间的关系，熟练掌握公式是解本题的关键.

4、D

【解析】

利用 $f(x)$ 是偶函数化简 $f(\log_3 0.3)$ ，结合 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性，比较出三者的大小关系.

【详解】

Q $f(x)$ 是偶函数， $\therefore f(\log_3 0.3) = f(-\log_3 \frac{10}{3}) = f(\log_3 \frac{10}{3})$,

而 $\log_3 \frac{10}{3} > 1 > 2^{-0.3} > 2^{-0.4} > 0$ ，因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减，

$\therefore f(\log_3 \frac{10}{3}) < f(2^{-0.3}) < f(2^{-0.4})$,

即 $f(\log_3 0.3) < f(2^{-0.3}) < f(2^{-0.4})$.

故选:D

【点睛】

本小题主要考查利用函数的奇偶性和单调性比较大小，属于基础题.

5、A

【解析】

直接利用复数代数形式的乘除运算化简得答案.

【详解】

$$\frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+3i+i^2}{2} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

本题正确选项: A

【点睛】

本题考查复数代数形式的乘除运算，是基础的计算题.

6、C

【解析】

根据给定的程序框图，逐次计算，结合判断条件，即可求解.

【详解】

由题意，执行上述程序框图，可得

第 1 次循环，满足判断条件， $S = 1, k = 1$ ；

第 2 次循环，满足判断条件， $S = 2, k = 2$ ；

第 3 次循环，满足判断条件， $S = 8, k = 3$ ；

第 4 次循环，满足判断条件， $S = 64, k = 4$ ；

不满足判断条件，输出 $S = 64$ 。

故选：C.

【点睛】

本题主要考查了循环结构的程序框图的计算与输出，其中解答中认真审题，逐次计算，结合判断条件求解是解答的关键，着重考查了推理与运算能力，属于基础题.

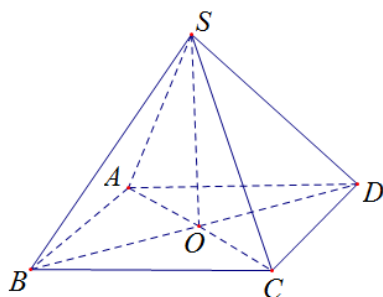
7、B

【解析】

根据正四棱锥底边边长为 2，高为 $\sqrt{2}$ ，得到底面的中心到各棱的距离都是 1，从而底面的中心即为球心.

【详解】

如图所示：



因为正四棱锥底边边长为 2，高为 $\sqrt{2}$ ，

所以 $OB = \sqrt{2}$, $SB = 2$ ，

O 到 SB 的距离为 $d = \frac{SO \times OB}{SB} = 1$,

同理 O 到 SC , SD , SA 的距离为 1,

所以 O 为球的球心，

所以球的半径为：1，

所以球的表面积为 4π 。

故选：B

【点睛】

本题主要考查组合体的表面积，还考查了空间想象的能力，属于中档题.

8、D

【解析】

利用等差数列的通项公式，可求解得到 $a_{11} = 4$ ，利用求和公式和等差中项的性质，即得解

【详解】

$$4 + a_5 = a_6 + a_{10},$$

$$\therefore 4 + a_{11} - 6d = a_{11} - 5d + a_{11} - d$$

解得 $a_{11} = 4$.

$$\therefore S_{21} = \frac{21(a_1 + a_{21})}{2} = 21a_{11} = 84.$$

故选：D

【点睛】

本题考查了等差数列的通项公式、求和公式和等差中项，考查了学生综合分析，转化划归，数学运算的能力，属于中档题.

9、B

【解析】

设 $\vec{AA_1} = \vec{c}$ ， $\vec{AB} = \vec{a}$ ， $\vec{AC} = \vec{b}$ ，根据向量线性运算法则可表示出 $\vec{AB_1}$ 和 $\vec{BC_1}$ ；分别求解出 $\vec{AB_1} \cdot \vec{BC_1}$ 和 $|\vec{AB_1}|$ ， $|\vec{BC_1}|$ ，根据向量夹角的求解方法求得 $\cos \langle \vec{AB_1}, \vec{BC_1} \rangle$ ，即可得所求角的余弦值.

【详解】

设棱长为 1， $\vec{AA_1} = \vec{c}$ ， $\vec{AB} = \vec{a}$ ， $\vec{AC} = \vec{b}$

由题意得： $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ ， $\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}$ ， $\vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}$

$$\vec{AB_1} = \vec{a} + \vec{c}, \quad \vec{BC_1} = \vec{BC} + \vec{BB_1} = \vec{b} - \vec{a} + \vec{c}$$

$$\therefore \vec{AB_1} \cdot \vec{BC_1} = (\vec{a} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{c}^2 = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + 1 = 1$$

$$|\vec{AB_1}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{c})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{c}^2} = \sqrt{3}$$

$$|\vec{BC_1}| = \sqrt{(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c})^2} = \sqrt{\vec{b}^2 + \vec{a}^2 + \vec{c}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{a} \cdot \vec{c}} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{BC_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{AB_1}| \cdot |\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

即异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为: $\frac{\sqrt{6}}{6}$

本题正确选项: B

【点睛】

本题考查异面直线所成角的求解, 关键是能够通过向量的线性运算、数量积运算将问题转化为向量夹角的求解问题.

10、C

【解析】

由于是放回抽取, 故每次的情况有 4 种, 共有 64 种, 先找到最大值不是 4 的情况, 即三次取出标号均不为 4 的球的情况, 进而求解.

【详解】

所有可能的情况有 $4^3 = 64$ 种, 其中最大值不是 4 的情况有 $3^3 = 27$ 种, 所以取得小球标号最大值是 4 的取法有

$$64 - 27 = 37 \text{ 种,}$$

故选:C

【点睛】

本题考查古典概型, 考查补集思想的应用, 属于基础题.

11、C

【解析】

先计算出总的基本事件的个数, 再计算出两张都没获奖的个数, 根据古典概型的概率, 求出两张都没有奖的概率, 由对立事件的概率关系, 即可求解.

【详解】

从 5 张“刮刮卡”中随机取出 2 张, 共有 $C_5^2 = 10$ 种情况,

2 张均没有奖的情况有 $C_3^2 = 3$ (种), 故所求概率为 $1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

故选:C.

【点睛】

本题考查古典概型的概率、对立事件的概率关系, 意在考查数学建模、数学计算能力, 属于基础题.

12、B

【解析】Q 函数 $y = \frac{x^2 + a}{x}$ 在区间 $[2, +\infty)$ 内单调递增, $\therefore y' = 1 - \frac{a}{x^2} = \frac{x^2 - a}{x^2} \geq 0$, 在 $[2, +\infty)$ 恒成立, $\therefore a \leq x^2$

在 $[2, +\infty)$ 恒成立, $\therefore a \leq 4$, $\because a \in [1, 6], \therefore a \in [1, 4], \therefore$ 函数 $y = \frac{x^2 + a}{x}$ 在区间 $[2, +\infty)$ 内单调递增的概率是

$$\frac{4-1}{6-1} = \frac{3}{5}, \text{ 故选 B.}$$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13、 $\frac{1}{e^2}$

【解析】

先求函数的定义域, 再对函数进行求导, 再解不等式得单调区间, 进而求得极值点, 即可求出函数 $f(x)$ 的极大值.

【详解】

Q 函数 $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x}, x \in (0, +\infty),$

$$\therefore f'(x) = \frac{1 - (\ln x - 1)}{x^2} = \frac{2 - \ln x}{x^2},$$

令 $f'(x) = 0$ 得, $x = e^2,$

$\therefore$ 当 $x \in (0, e^2)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (e^2, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减,

$\therefore$ 当 $x = e^2$ 时, 函数 $f(x)$ 取到极大值, 极大值为 $f(e^2) = \frac{\ln e^2 - 1}{e^2} = \frac{1}{e^2}.$

故答案为: $\frac{1}{e^2}.$

【点睛】

本题考查利用导数研究函数的极值, 考查函数与方程思想、转化与化归思想, 考查运算求解能力, 求解时注意定义域优先法则的应用.

14、1

【解析】

由 $\begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{a} + 2\vec{b} \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} \vec{r} \\ 2\vec{a} + \lambda\vec{b} \end{pmatrix}$ 求出 λ , 代入 $\begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{a} + \lambda\vec{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{a} - \vec{b} \end{pmatrix}$, 进行数量积的运算即得.

【详解】

Q $\begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{a} + 2\vec{b} \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} \vec{r} \\ 2\vec{a} + \lambda\vec{b} \end{pmatrix}, \therefore$ 存在实数 k , 使得 $2\vec{a} + \lambda\vec{b} = k(\vec{a} + 2\vec{b}).$

Q $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线, $\therefore \begin{cases} 2 = k \\ \lambda = 2k \end{cases}, \therefore \lambda = 4.$

Q $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{3}, \vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 $30^\circ,$

$$\therefore \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{a} + \lambda\vec{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{a} - \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{a} + 4\vec{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{a} - \vec{b} \end{pmatrix} = \vec{r}^2 + 3\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^2$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/637110105124010035>