

2025 二轮复习专项训练 4

函数的图象与性质

[考情分析] 以基本初等函数为载体,考查函数的定义域、最值、奇偶性、单调性、周期性、分段函数求值或分段函数中参数的求解以及函数图象的识别,多以选择题、填空题的形式考查,难度属中档及以上.

【练前疑难讲解】

一、函数的概念与表示

1. 复合函数的定义域

(1)若 $f(x)$ 的定义域为 $[m, n]$,则在 $f(g(x))$ 中, $m \leq g(x) \leq n$,从中解得 x 的范围即为 $f(g(x))$ 的定义域.

(2)若 $f(g(x))$ 的定义域为 $[m, n]$,则由 $m \leq x \leq n$ 确定的 $g(x)$ 的范围即为 $f(x)$ 的定义域.

2. 分段函数

分段函数的定义域等于各段函数的定义域的并集,值域等于各段函数值域的并集.

二、函数的性质

1. 函数的奇偶性

(1)定义:若函数的定义域关于原点对称,则有

$f(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(-x)=f(x)=f(|x|)$;

$f(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$.

(2)判断方法:定义法、图象法、奇偶函数性质法(如奇函数 $\times$ 奇函数是偶函数).

2. 函数单调性判断方法:定义法、图象法、导数法.

3. 函数图象的对称中心和对称轴

(1)若函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(a+x)=2b-f(a-x)$,则函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 (a, b) 对称.

(2)若函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(a+x)=f(b-x)$,则函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称.

三、函数的图象

1. 作函数图象有两种基本方法:一是描点法;二是图象变换法,其中图象变换有平移变换、伸缩变换、对称变换.

2. 由函数的解析式判断其图象的主要方法是利用函数的性质,如定义域、奇偶性、单调性等,以及利用函数图象上的特殊点排除不符合要求的图象.

一、单选题

1. (2022·全国·模拟预测) 设函数 $f(x)=\sqrt{8-2^x}$,则函数 $f\left(\frac{x}{2}\right)$ 的定义域为()

A. $(-\infty, 6]$

B. $(-\infty, 3]$

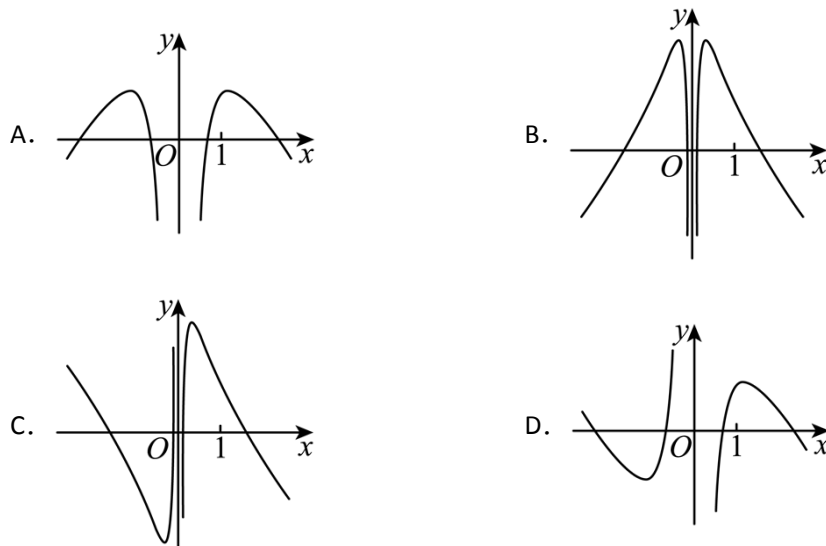
C. $[3, +\infty)$

D. $[6, +\infty)$

2. (2024·湖南益阳·一模) 已知 $f(x) = \begin{cases} -x^{-1} (x < 0) \\ \sin \pi x (x \geq 0) \end{cases}$, 则 $f(f(-3)) = (\quad)$

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. (2023·福建·模拟预测) 函数 $f(x) = \frac{\ln|x| - x^2 + 2}{x}$ 的图象大数为 ()



4. (2023·广东广州·二模) 已知偶函数 $f(x)$ 与其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 且 $f'(x) + e^{-x} + x$ 也是偶函数, 若 $f(2a-1) < f(a+1)$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(0, 2)$
C. $(2, +\infty)$ D. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

5. (2023·吉林·模拟预测) 已知函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 满足 $f(x) + f(-x) = 2$, 若函数

$y = \frac{x+3}{x}$ 与 $y = f(x)$ 图象的交点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{2022}, y_{2022})$, 则 $\sum_{i=1}^{2022} (x_i + y_i) = (\quad)$

- A. 0 B. 2022 C. 4044 D. 1011

6. (2023·全国·模拟预测) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为 $(0, +\infty)$, 若

$f(x+1)f(x-1) = 4$, 函数 $f(x-2)$ 为偶函数, $f(2024) = 1$, 则 $\sum_{n=1}^{2023} f(n) = (\quad)$

- A. 4050 B. 4553 C. 4556 D. 4559

参考答案:

题号	1	2	3	4	5	6				
答案	A	D	C	B	B	B				

1. A

【分析】先求 $f(x)$ 的定义域，再利用复合函数求 $f\left(\frac{x}{2}\right)$ 的定义域。

【详解】由题意得， $8-2^x \geq 0$ ，解得 $x \leq 3$ ， $\therefore$ 函数 $f\left(\frac{x}{2}\right)$ 满足 $\frac{x}{2} \leq 3$ ，解得 $x \leq 6$ ，

即函数 $f\left(\frac{x}{2}\right)$ 的定义域为 $(-\infty, 6]$ 。

故选:A

2. D

【分析】先求 $f(-3) = \frac{1}{3}$ ，再求 $f(f(-3)) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3}$ ，即可求解。

【详解】根据已知 $f(-3) = -(-3)^{-1} = \frac{1}{3}$ ，

所以 $f(f(-3)) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

故选：D。

3. C

【分析】求出函数的定义域，由已知可得函数 $f(x)$ 为奇函数.然后得到 $x > 0$ 时，

$f(x) = -x + \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x}$ ，根据导函数求得 $f(x)$ 的单调性，并且可得极大值点 $x_0 < \frac{1}{e} < 1$ ，即可

得出答案。

【详解】由题意可知，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$ 。

又 $f(-x) = \frac{\ln|-x| - (-x)^2 + 2}{-x} = \frac{\ln|x| - x^2 + 2}{-x} = -f(x)$ ，

所以，函数 $f(x)$ 为奇函数。

当 $x > 0$ 时， $f(x) = \frac{\ln x - x^2 + 2}{x} = -x + \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x}$ ，

则 $f'(x) = -1 + \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} - \frac{2}{x^2} = -\frac{x^2 + \ln x + 1}{x^2}$ 。

设 $g(x) = x^2 + \ln x + 1$ ，则 $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，

所以， $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增。

又 $g\left(\frac{1}{e^2}\right) = e^{-4} - 2 + 1 < 0$, $g\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-2} - 1 + 1 > 0$,

所以, 根据零点存在定理可得, $\exists x_0 \in \left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right)$, 有 $g(x_0) = 0$,

且当 $0 < x < x_0$ 时, 有 $g(x) < 0$, 显然 $f'(x) = -\frac{x^2 + \ln x + 1}{x^2} > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增;

当 $x > x_0$ 时, 有 $g(x) > 0$, 显然 $f'(x) = -\frac{x^2 + \ln x + 1}{x^2} < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减.

因为 $x_0 < \frac{1}{e} < 1$, 所以 C 项满足题意.

故选: C.

4. B

【分析】由偶函数的定义结合导数可得出 $f'(x) = -f'(-x)$, 由已知可得出

$f'(x) + e^{-x} + x = f'(-x) + e^x - x$, 可求出 $f'(x)$ 的表达式, 利用导数分析函数 $f'(x)$ 的单调

性, 可知函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数, 再由 $f(2a-1) < f(a+1)$ 可得出

$f(|2a-1|) < f(|a+1|)$, 可得出关于实数 a 的不等式, 解之即可.

【详解】因为 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(x) = f(-x)$, 等式两边求导可得 $f'(x) = -f'(-x)$, ①

因为函数 $f'(x) + e^{-x} + x$ 为偶函数, 则 $f'(x) + e^{-x} + x = f'(-x) + e^x - x$, ②

联立①②可得 $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} - x$,

令 $g(x) = f'(x)$, 则 $g'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 \geq \sqrt{e^x \cdot e^{-x}} - 1 = 0$, 且 $g'(x)$ 不恒为零,

所以, 函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 即函数 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数,

故当 $x > 0$ 时, $f'(x) > f'(0) = 0$, 所以, 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数,

由 $f(2a-1) < f(a+1)$ 可得 $f(|2a-1|) < f(|a+1|)$,

所以, $|2a-1| < |a+1|$, 整理可得 $a^2 - 2a < 0$, 解得 $0 < a < 2$.

故选: B.

5. B

【分析】根据函数对称性的定义得到函数 $f(x)$ 关于点 $(0,1)$ 对称，函数 $y = \frac{x+3}{x} = 1 + \frac{3}{x}$ 也关于点 $(0,1)$ 对称，从而得到函数 $y = \frac{x+1}{x}$ 与 $y = f(x)$ 的图象的交点关于点 $(0,1)$ 对称，即可求解。

【详解】由 $f(-x) = 2 - f(x)$ 可得 $\frac{f(x) + f(-x)}{2} = 1$ ，

则函数 $y = f(x)$ 图象上的点 $A(x, f(x))$ 关于点 $M(0,1)$ 的对称点 $A_1(-x, f(-x))$ 也在 $y = f(x)$ 的图象上。

又由 $y = \frac{x+3}{x} = 1 + \frac{3}{x}$ 可知，函数 $y = \frac{x+3}{x}$ 的图象也关于点 $M(0,1)$ 对称。

因此，函数 $y = \frac{x+1}{x}$ 与 $y = f(x)$ 的图象的交点关于点 $(0,1)$ 对称。

不妨设 $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{2022}$ ， (x_1, y_1) 与 (x_{2022}, y_{2022}) 关于点 $(0,1)$ 对称，

(x_2, y_2) 与 (x_{2021}, y_{2021}) 关于点 $(0,1)$ 对称， $\dots$ ， (x_{1011}, y_{1011}) 与 (x_{1012}, y_{1012}) 关于点 $(0,1)$ 对称，

$$\text{则 } \sum_{i=1}^{2022} x_i = \frac{x_1 + x_{2022}}{2} + \frac{x_2 + x_{2021}}{2} + \dots + \frac{x_{2022} + x_1}{2} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{2022} y_i = \frac{y_1 + y_{2022}}{2} + \frac{y_2 + y_{2021}}{2} + \dots + \frac{y_{2022} + y_1}{2} = 2022,$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^{2022} (x_i + y_i) = 2022,$$

故选：B。

6. B

【分析】推导出函数 $f(x)$ 为周期函数，确定该函数的周期，求出 $f(1)$ 、 $f(2)$ 、 $f(3)$ 、 $f(4)$ 的值，结合周期性可求得 $\sum_{n=1}^{2023} f(n)$ 的值。

【详解】由 $f(x+1)f(x-1) = 4$ 可得 $f(x+2)f(x) = 4$ ，①

对任意的 $x \in \mathbf{R}$ ， $f(x) > 0$ ，所以， $f(x+4)f(x+2) = 4$ ，②

由①②可得 $f(x+4) = f(x)$ ，所以函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数。

因为 $f(x-2)$ 为偶函数，则 $f(-x-2) = f(x-2)$ ，

因为 $f(2024) = f(4 \times 506) = f(0) = 1$ ，由 $f(x+2)f(x) = 4$ 可得 $f(2) = \frac{4}{f(0)} = 4$ ，且

$$f(4) = f(0) = 1,$$

由 $f(x-2)f(x)=4$ 可得 $f(-x-2)f(-x)=4$,

因为 $f(-x-2)=f(x-2)$, 所以, $f(-x)=f(x)$, 故函数 $f(x)$ 为偶函数,

因为 $f(x+2)f(x)=4$, 则 $f(1)f(-1)=4=[f(1)]^2$, 所以, $f(1)=2$,

由 $f(1)f(3)=4$ 可得 $f(3)=2$,

因为 $2023=4\times 505+3$, 所以, $\sum_{n=1}^{2023} f(n)=505\sum_{n=1}^4 f(n)+\sum_{n=1}^3 f(n)$
 $=505\times(2+4+2+1)+(2+4+2)=4553$.

故选: B.

【基础保分训练】

一、单选题

1. (23-24 高一上·江苏南京·阶段练习) 函数 $f(x)=\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}$ 的定义域为 ()

- A. $(-\infty, 3]$ B. $(1, +\infty)$ C. $(1, 3]$ D. $(-\infty, 1) \cup [3, +\infty)$

2. (2024·陕西渭南·二模) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-2ax, & x \geq 1 \\ \frac{a}{2}x-1, & x < 1 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{4}{5})$ B. $(0, \frac{4}{5}]$ C. $(0, 1)$ D. $(0, 1]$

3. (2024·山东·二模) 已知函数 $f(x)=2x^2-mx+1$ 在区间 $[-1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $f(1)$ 的取值范围是 ().

- A. $[7, +\infty)$ B. $(7, +\infty)$
C. $(-\infty, 7]$ D. $(-\infty, 7)$

4. (2021·山东滨州·二模) 已知 $a=\frac{\ln 2}{2}$, $b=\frac{1}{e}$, $c=\frac{2\ln 3}{9}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$
C. $b > a > c$ D. $b > c > a$

5. (2023·北京石景山·一模) 下列函数中, 是奇函数且在定义域内单调递减的是 ()

- A. $f(x)=\sin x$ B. $f(x)=2^{|x|}$

C. $f(x) = x^3 + x$

D. $f(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x)$

6. (22-23 高三下·黑龙江哈尔滨·开学考试) 对任意的 $x \in (1, 4)$, 不等式 $ax^2 - 2x + 2 > 0$ 都成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $[1, +\infty)$

B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

C. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

D. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

7. (2023·江西南昌·二模) 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3) = -f(x)$,

$g(x) = f(x) - 2$ 为奇函数, 则 $f(198) =$ ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

8. (24-25 高三上·云南·阶段练习) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(2x-1)$ 为奇函数,

$f(x+1)$ 为偶函数, 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x) = ax + 1$, 则 $f(2025) =$ ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 2025

9. (2023·河北邯郸·一模) 已知函数 $f(x-1)$ 为偶函数, 且函数 $f(x)$ 在 $[-1, +\infty)$ 上单调递

增, 则关于 x 的不等式 $f(1-2^x) < f(-7)$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, 3)$

B. $(3, +\infty)$

C. $(-\infty, 2)$

D. $(2, +\infty)$

10. (2024·湖南长沙·二模) 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 是奇函数, 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有

$f(x+1) = f(1-x)$, 当 $f(-3) = -2$ 时, 则 $f(2023)$ 等于 ()

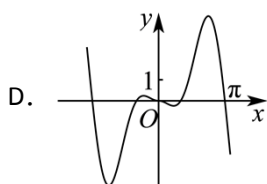
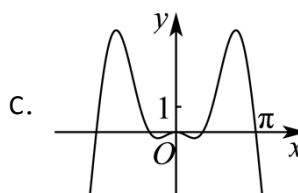
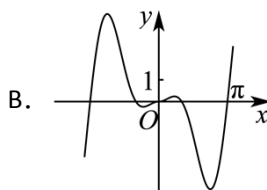
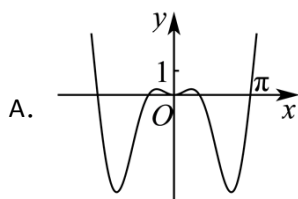
A. 2

B. -2

C. 0

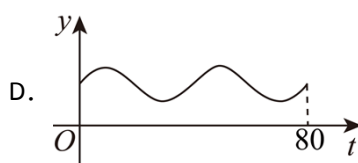
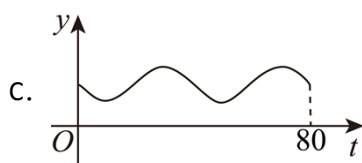
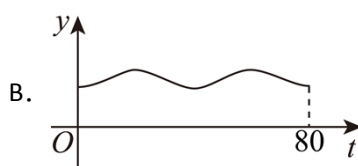
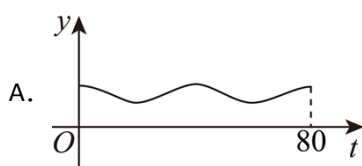
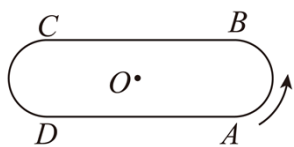
D. -4

11. (2023·山东烟台·二模) 函数 $y = x(\sin x - \sin 2x)$ 的部分图象大致为 ()



12. (2023·海南省直辖县级单位·三模) 小李在如图所示的跑道 (其中左、右两边分别是两个半圆) 上匀速跑步, 他从点 A 处出发, 沿箭头方向经过点 B、C、D 返回到点 A

，共用时80秒，他的同桌小陈在固定点 O 位置观察小李跑步的过程，设小李跑步的时间为 t （单位：秒），他与同桌小陈间的距离为 y （单位：米），若 $y=f(t)$ ，则 $f(t)$ 的图象大致为（ ）



二、多选题

13.（22-23 高一上·四川·阶段练习）已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且对任意 $a, b \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ ，且当 $x>0$ 时， $f(x)<0$ 恒成立，则（ ）

A. 函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数

B. 函数 $f(x)$ 是奇函数

C. 若 $f(-2)=2$ ，则 $|f(x)|<1$ 的解集为 $(-1,1)$

D. 函数 $f(x)+x^2$ 为偶函数

14.（2024·重庆·模拟预测）函数 $f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{3}$ ， $g(x)=\ln(\sqrt{1+9x^2}-3x)$ ，那么（ ）

A. $f(x)+g(x)$ 是偶函数

B. $f(x)g(x)$ 是奇函数

C. $\frac{g(x)}{f(x)}$ 是奇函数

D. $g(f(x))$ 是奇函数

15.（22-23 高一下·河南·阶段练习）已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-2x, & x \geq 0 \\ -x^2-ax, & x < 0 \end{cases}$ 为奇函数，则下列说法正确的为（ ）

A. $a=-2$

B. $a=2$

C. $f(f(-1))=-1$

D. $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

16. (2023·浙江·模拟预测) 已知定义域为 I 的偶函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且

$\exists x_0 \in I$, 使 $f(x_0) < 0$. 则下列函数中符合上述条件的是 ()

A. $f(x) = x^4 - 3$

B. $f(x) = 2^x - 2^{-x}$

C. $f(x) = \log_2 |x|$

D. $f(x) = \cos x - 1$

三、填空题

17. (2023·河南·三模) 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$, 若 $f(2x-1) + f(2-x) > 0$, 则

x 的取值范围是_____.

18. (2021·陕西咸阳·一模) 若偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4) = f(x)$, $f(-1) = -1$, 则

$f(2021) =$ _____.

19. (2023·河南安阳·三模) 已知函数 $f(x) = b + \frac{2a-1}{2^x-a}$ ($a > 0$) 是奇函数, 则 $a+b =$ _____.

20. (2024·广西柳州·模拟预测) 记实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的最小数为 $\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 若

$f(x) = \min\{x+1, x^2-2x+1, -x+8\}$, 则函数 $f(x)$ 的最大值为_____.

参考答案:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	A	C	D	D	C	C	A	A
题号	11	12	13	14	15	16				
答案	C	D	ABC	BC	BC	AC				

1. C

【分析】由函数形式得到不等式组, 解出即可.

【详解】由题意得 $\begin{cases} (3-x)(x-1) \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$, 解得 $1 < x \leq 3$, 则定义域为 $(1, 3]$,

故选: C.

2. B

【分析】根据给定条件, 利用分段函数单调性, 结合一次、二次函数单调性求解即得.

【详解】由 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax, & x \geq 1 \\ \frac{a}{2}x - 1, & x < 1 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 得 $\begin{cases} a \leq 1 \\ \frac{a}{2} > 0 \\ \frac{a}{2} - 1 \leq 1 - 2a \end{cases}$, 解得 $0 < a \leq \frac{4}{5}$,

所以实数 a 的取值范围是 $(0, \frac{4}{5}]$.

故选: B

3. A

【分析】根据题意, 结合二次函数的性质, 求得解得 $m \leq -4$, 再由 $f(1) = 3 - m$, 进而求得 $f(1)$ 的取值范围.

【详解】由函数 $f(x) = 2x^2 - mx + 1$ 的对称轴是 $x = \frac{m}{4}$,

因为函数在区间 $[-1, +\infty)$ 上是增函数, 所以 $\frac{m}{4} \leq -1$, 解得 $m \leq -4$,

又因为 $f(1) = 3 - m$, 因此 $3 - m \geq 7$, 所以 $f(1)$ 的取值范围是 $[7, +\infty)$.

故选: A.

4. C

【分析】根据已知, 通过构造函数, 利用导数研究函数的单调性, 再利用单调性比较函数值的大小.

【详解】因为 $a = \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{4}$, $b = \frac{1}{e} = \frac{\ln e}{e}$, $c = \frac{\ln 9}{9}$, 所以构造函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$,

因为 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 由 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$ 有: $0 < x < e$,

由 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$ 有: $x > e$, 所以 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

因为 $a = \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{4} = f(4)$, $b = \frac{1}{e} = \frac{\ln e}{e} = f(e)$, $c = \frac{\ln 9}{9} = f(9)$,

因为 $9 > 4 > e$, 所以 $b > a > c$, 故 A, B, D 错误.

故选: C.

5. D

【分析】根据函数的奇偶性, 基本初等函数的单调性, 逐项判断即可.

【详解】对于 A, 函数 $f(x) = \sin x$ 为奇函数, 但在定义域 $\mathbf{R}$ 上函数不单调, 故 A 不符合;

对于 B, $f(x) = 2^{|x|}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) = 2^{-|x|} = 2^{|x|} = f(x)$, 则 $f(x) = 2^{|x|}$ 为偶函数, 故 B 不符合;

对于 C, $f(x) = x^3 + x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) = -x^3 - x = -f(x)$, 则 $f(x) = x^3 + x$ 为奇函数, 又函数 $y = x^3, y = x$ 在 $\mathbf{R}$ 上均为增函数, 故 $f(x) = x^3 + x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 故 C

不符合；

对于 D, $f(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -f(x)$, 则

$f(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x)$ 为奇函数, 又函数 $y = e^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数, $y = e^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 故

$f(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数, 故 D 符合.

故选: D.

6. D

【分析】分离参数得 $a > \frac{2x-2}{x^2}$ 对任意的 $x \in (1, 4)$ 恒成立, 则求出 $\left(\frac{2x-2}{x^2}\right)_{\max}$ 即可.

【详解】因为对任意的 $x \in (1, 4)$, 都有 $ax^2 - 2x + 2 > 0$ 恒成立,

$\therefore a > \frac{2x-2}{x^2}$ 对任意的 $x \in (1, 4)$ 恒成立.

$$\text{设 } f(x) = \frac{2x-2}{x^2} = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} = -2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2},$$

$$\because x \in (1, 4), \therefore \frac{1}{4} < \frac{1}{x} < 1,$$

$$\therefore \text{当 } \frac{1}{x} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } x = 2 \text{ 时, } f(x)_{\max} = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

故选: D.

7. C

【分析】由题意推出函数 $f(x)$ 的周期以及满足等式 $f(x) + f(-x) = 4$, 赋值求得

$f(0) = 2$, 利用函数的周期性即可求得答案.

【详解】因为 $f(x+3) = -f(x)$, 所以 $f(x+6) = -f(x+3) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 的周期为

6,

又 $g(x) = f(x) - 2$ 为奇函数, 所以 $f(x) - 2 + f(-x) - 2 = 0$, 所以 $f(x) + f(-x) = 4$,

令 $x = 0$, 得 $2f(0) = 4$, 所以 $f(0) = 2$,

所以 $f(198) = f(0 + 6 \times 33) = f(0) = 2$,

故选: C.

8. C

【分析】由函数奇偶性，确定 $f(x)$ 为周期函数，再结合 $f(-1)=0$ ，求得 a ，即可求解.

【详解】因为 $f(2x-1)$ 为奇函数，所以 $f(x)$ 关于点 $(-1,0)$ 中心对称，

又 $f(x+1)$ 为偶函数，所以 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，

所以 $f(x)$ 为周期函数且周期 $T=4\times|1-(-1)|=8$ ，

$\therefore f(2025)=f(8\times 253+1)=f(1)=a+1$ ， $\because f(-1)=-a+1=0$ ， $\therefore a=1$ ，

$\therefore f(2025)=a+1=2$.

故选:C.

9. A

【分析】利用函数的奇偶性和对称性，得到函数的单调区间，利用单调性解函数不等式.

【详解】因为 $f(x-1)$ 为偶函数，所以 $f(x-1)$ 的图象关于 y 轴对称，则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称.

因为 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上单调递减.

因为 $f(1-2^x)<f(-7)=f(5)$ ，所以 $-7<1-2^x<5$ ，解得 $x<3$.

故选: A.

10. A

【分析】根据函数的奇偶性和对称性推得函数 $f(x)$ 的周期为 4，利用周期性和奇函数特征即可求得 $f(2023)$ 的值.

【详解】定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 是奇函数，且对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+1)=f(1-x)$ ，

故函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称， $\therefore f(x)=f(2-x)$ ，故 $f(-x)=f(2+x)=-f(x)$ ，

$\therefore f(x)=-f(2+x)=f(4+x)$ ， $\therefore f(x)$ 是周期为 4 的周期函数.

则 $f(2023)=f(505\times 4+3)=f(3)=-f(-3)=2$.

故选: A.

11. C

【分析】

判断函数的奇偶性，再用赋值法，排除 ABD，即可.

【详解】由 $y = f(x) = x(\sin x - \sin 2x)$,

$$\text{得 } f(-x) = -x[\sin(-x) - \sin(-2x)] = -x(-\sin x + \sin 2x) = f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数, 故排除 BD.

$$\text{当 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } y = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \pi) = \frac{\pi}{2} > 0, \text{ 排除 A.}$$

故选: C.

12. D

【分析】分析在整个运动过程中, 小李和小陈之间的距离的变化, 可得出合适的选项.

【详解】由题图知, 小李从点 A 到点 B 的过程中, y 的值先增后减,

从点 B 到点 C 的过程中, y 的值先减后增,

从点 C 到点 D 的过程中, y 的值先增后减, 从点 D 到点 A 的过程中, y 的值先减后增,

所以, 在整个运动过程中, 小李和小陈之间的距离 (即 y 的值) 的增减性为: 增、减、增、减、增, D 选项合乎题意,

故选: D.

13. ABC

【分析】利用单调性定义结合 $f(x_1) - f(x_2) = f[(x_1 - x_2) + x_2] - f(x_2) = f(x_1 - x_2)$ 可判断 A;

利用特殊值求出 $f(0) = 0$, 从而证明 $f(-x) = -f(x)$ 可判断 B, 根据条件求出

$f(-1) = 1, f(1) = -1$, 进而利用单调性解不等式可判断 C, 利用奇偶性的定义可判断 D.

【详解】设 $x_1 > x_2$, 且 $x_1 \in \mathbf{R}, x_2 \in \mathbf{R}$, 则 $x_1 - x_2 > 0$,

$$\text{而 } f(a+b) = f(a) + f(b)$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) = f[(x_1 - x_2) + x_2] - f(x_2) = f(x_1 - x_2) + f(x_2) - f(x_2) = f(x_1 - x_2),$$

又当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$ 恒成立, 即 $f(x_1 - x_2) < 0$, $\therefore f(x_1) < f(x_2)$,

$\therefore$ 函数 $y = f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, A 正确;

$$\text{由 } f(a+b) = f(a) + f(b),$$

$$\text{令 } a = b = 0 \text{ 可得 } f(0) = f(0) + f(0), \text{ 解得 } f(0) = 0,$$

$$\text{令 } a = x, b = -x \text{ 可得 } f(x-x) = f(x) + f(-x), \text{ 即 } f(x) + f(-x) = f(0), \text{ 而 } f(0) = 0,$$

$$\therefore f(-x) = -f(x), \text{ 而函数 } y = f(x) \text{ 的定义域为 } \mathbf{R},$$

故函数 $y = f(x)$ 是奇函数, B 正确;

令 $a = b = -1$ 可得 $f(-2) = f(-1) + f(-1) = 2$ ，解得 $f(-1) = 1$ ，

因为函数 $y = f(x)$ 是奇函数，所以 $f(1) = -1$ ，

由 $|f(x)| < 1$ ，可得 $-1 < f(x) < 1$ ，

因为函数 $y = f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，所以 $-1 < x < 1$ ，C 正确；

令 $g(x) = f(x) + x^2$ ，易知定义域为 $\mathbf{R}$ ，

因为 $g(x) - g(-x) = f(x) + x^2 - f(-x) - (-x)^2 = 2f(x)$ ，显然 $g(x) - g(-x) = 0$ 不恒成立，所以

$g(x) = f(x) + x^2$ 不是偶函数，D 错误。

故选：ABC.

14. BC

【分析】根据函数 $f(x), g(x)$ 的奇偶性，逐项判断四个选项中函数的奇偶性即可。

【详解】因为 $f(-x) = \frac{2^{-x} + 2^x}{3} = f(x)$ ，所以 $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{3}$ 为偶函数，

因为

$$g(-x) + g(x) = \ln(\sqrt{1+9x^2} + 3x) + \ln(\sqrt{1+9x^2} - 3x) = \ln(\sqrt{1+9x^2} + 3x)(\sqrt{1+9x^2} - 3x) = \ln 1 = 0$$

，

即 $g(-x) = -g(x)$ ，所以 $g(x) = \ln(\sqrt{1+9x^2} - 3x)$ 为奇函数，

所以 $f(x) + g(x)$ 为非奇非偶函数，A 错误；

$f(-x)g(-x) = -[f(x)g(x)]$ ，所以 $f(x) \cdot g(x)$ 为奇函数，B 正确；

$\frac{g(-x)}{f(-x)} = \frac{-g(x)}{f(x)} = -\frac{g(x)}{f(x)}$ ，所以 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 是奇函数，C 正确；

令 $H(x) = g(f(x))$ ， $H(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = H(x)$ ， $H(x)$ 为偶函数，D 错误。

故选：BC.

15. BC

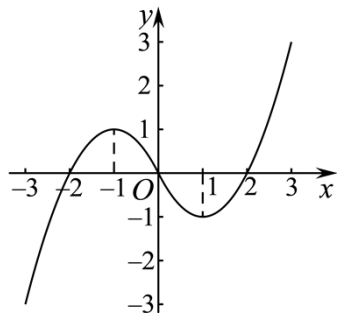
【分析】利用奇函数的性质 $f(-x) = -f(x)$ 可求 a 的值，代数求值可验证 C 项，根据表达式作出函数图象可验证 D 项。

【详解】因为函数 $f(x)$ 为奇函数， $\therefore f(-1) = -f(1)$ ，即 $-1 + a = -(1 - 2)$ ，解得 $a = 2$ ，故 B 正确，A 错误；

因为 $f(-1) = -1 + 2 = 1$ ，所以 $f(f(-1)) = f(1) = -1$ ，故 C 正确；

作出 $f(x)$ 的图象，如图，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1)$ ， $(1, +\infty)$ ，D 选项形式错误，不能用并集的符号。

故选：BC.



16. AC

【分析】逐个分析各函数的定义域、单调性、奇偶性及 $\exists x_0 \in I$ ，使 $f(x_0) < 0$ 。

【详解】对 A， $f(x) = x^4 - 3$ ，定义域为 $\mathbf{R}$ ，在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

$f(-x) = (-x)^4 - 3 = x^4 - 3 = f(x)$ ，所以 $f(x)$ 为偶函数，又 $f(1) = -2 < 0$ ，故 A 正确

对 B， $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ ，定义域为 $\mathbf{R}$ ，为奇函数，故 B 错误；

对 C， $f(x) = \log_2 |x|$ ，定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ， $f(-x) = \log_2 |-x| = \log_2 |x| = f(x)$ ，所以

$f(x)$ 为偶函数，又 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1 < 0$ ，故 C 正确；

对 D，因为 $f(x) = \cos x - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上分区间单调，故 D 错误。

故选：AC.

17. $(-1, +\infty)$

【分析】首先判断函数的奇偶性与单调性，再根据奇偶性与单调性将函数不等式转化为自变量的不等式，解得即可。

【详解】因为函数 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) + x$ ，定义域为 $\mathbf{R}$ ，且 $f(-x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x) - x$ ，

则 $f(-x) + f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x) - x + \ln(\sqrt{x^2+1}+x) + x$

$= \ln\left[(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)\right] = \ln(x^2+1-x^2) = \ln 1 = 0$ ，

即 $f(-x) = -f(x)$ ，即 $f(x)$ 为奇函数，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/637133031021010015>