

几何-直线型几何-燕尾模型-0 星题

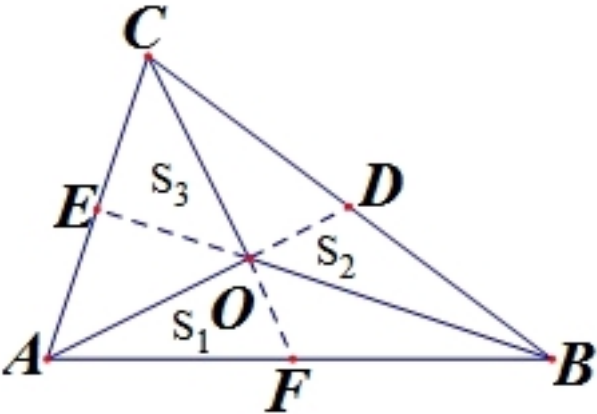
课程目标

知识点	考试要求	具体要求	考察频率
燕尾模型	C	1.了解燕尾模型的一般形状 2.熟悉燕尾模型的关系式 3.能够灵活运用燕尾模型解决复杂的几何问题	少考

知识提要

燕尾模型

- 燕尾模型



- 结论一

$$(1) \frac{S_1}{S_2} = \frac{AE}{CE} \quad (2) \frac{S_2}{S_3} = \frac{BF}{AF} \quad (3) \frac{S_3}{S_1} = \frac{CD}{BD}$$

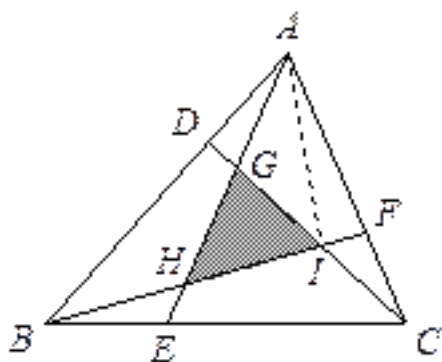
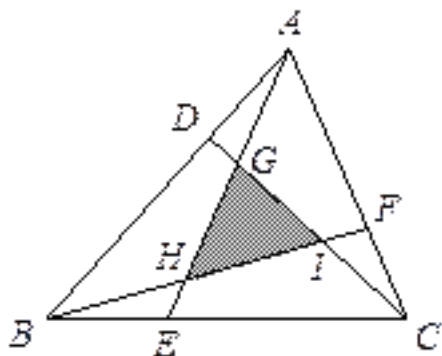
- 结论二

$$\frac{S_2 + S_3}{S_1} = \frac{CO}{OF}$$

精选例题

燕尾模型

1. 如图, $\triangle ABC$ 中 $BD = 2DA$, $CE = 2EB$, $AF = 2FC$, 那么 $\triangle ABC$ 的面积是阴影三角形面积的_____倍.



【答案】 7

【分析】 如图, 连接 AI .

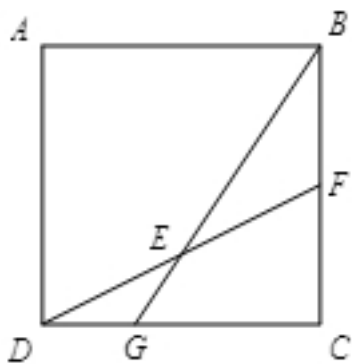
根据燕尾定理, $S_{\triangle BCI} : S_{\triangle ACI} = BD : AD = 2 : 1$, $S_{\triangle BCI} : S_{\triangle ABI} = CF : AF = 1 : 2$,

所以, $S_{\triangle ACI} : S_{\triangle BCI} : S_{\triangle ABI} = 1 : 2 : 4$,

那么, $S_{\triangle BCI} = \frac{2}{1+2+4} S_{\triangle ABC} = \frac{2}{7} S_{\triangle ABC}$.

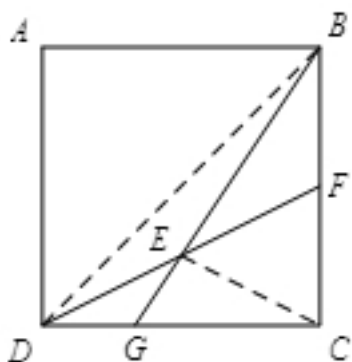
同理可知 $\triangle ACG$ 和 $\triangle ABH$ 的面积也都等于 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{2}{7}$, 所以阴影三角形的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的 $1 - \frac{2}{7} \times 3 = \frac{1}{7}$, 所以 $\triangle ABC$ 的面积是阴影三角形面积的 7 倍.

2. 如图, 已知正方形 $ABCD$ 中, F 是 BC 边的中点, $GC = 2DG$, E 是 DF 与 BG 的交点. 四边形 $ABED$ 的面积与正方形 $ABCD$ 的比是_____.



【答案】 5:8

【分析】 连接 BD 、 EC ,



可得

$$\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BEC}} = \frac{1}{2}, \frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle CDE}} = \frac{1}{1},$$

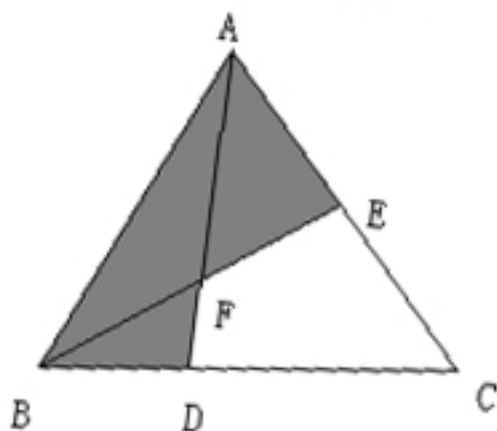
$$S_{\triangle BDE} : S_{\triangle CDE} : S_{\triangle BEC} = 1 : 1 : 2,$$

$$S_{\triangle BDE} = \frac{1}{4} S_{\triangle BDC} = \frac{1}{8} S_{ABCD},$$

$$S_{ABED} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) S_{ABCD} = \frac{5}{8} S_{ABCD},$$

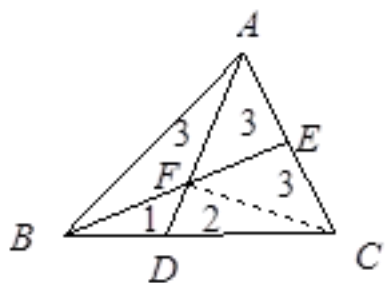
四边形 $ABED$ 的面积与正方形 $ABCD$ 的比是 5:8.

3. 如图, 三角形 ABC 的面积是 1, E 是 AC 的中点, 点 D 在 BC 上, 且 $BD:DC = 1:2$, AD 与 BE 交于点 F . 则阴影部分面积等于_____.



【答案】 $\frac{7}{12}$

【分析】 方法一：连接 CF ，



根据燕尾定理，

$$\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ACF}} = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{2},$$

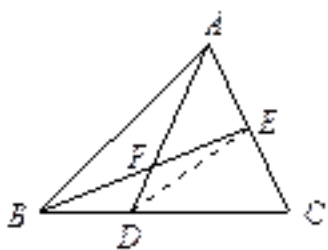
$$\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle CBF}} = \frac{AE}{EC} = 1,$$

设 $S_{\triangle BDF} = 1$ 份，则 $S_{\triangle DCF} = 2$ 份， $S_{\triangle ABF} = 3$ 份， $S_{\triangle AEF} = S_{\triangle EFC} = 3$ 份，如图所标。
所以

$$S_{DCEF} = \frac{5}{12} S_{\triangle ABC} = \frac{5}{12},$$

易得，阴影部分面积为 $\frac{7}{12}$ 。

方法二：连接 DE ，



由题目条件可得到

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3},$$

$$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3},$$

所以

$$\frac{BF}{FE} = \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{1}{1},$$

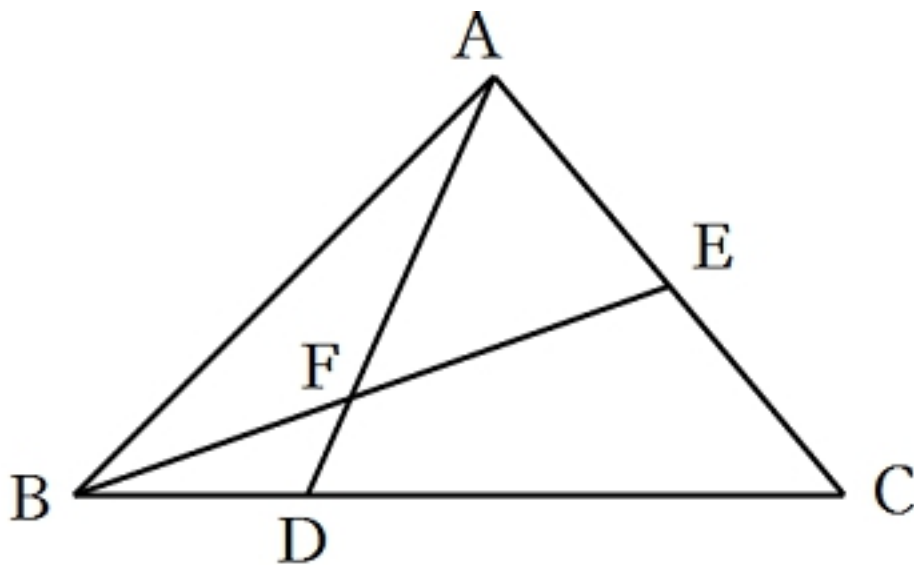
$$\begin{aligned} S_{\triangle DEF} &= \frac{1}{2} \times S_{\triangle DEB} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times S_{\triangle BEC} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times S_{\triangle ABC} \\ &= \frac{1}{12}, \end{aligned}$$

而

$$S_{\triangle CDE} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}.$$

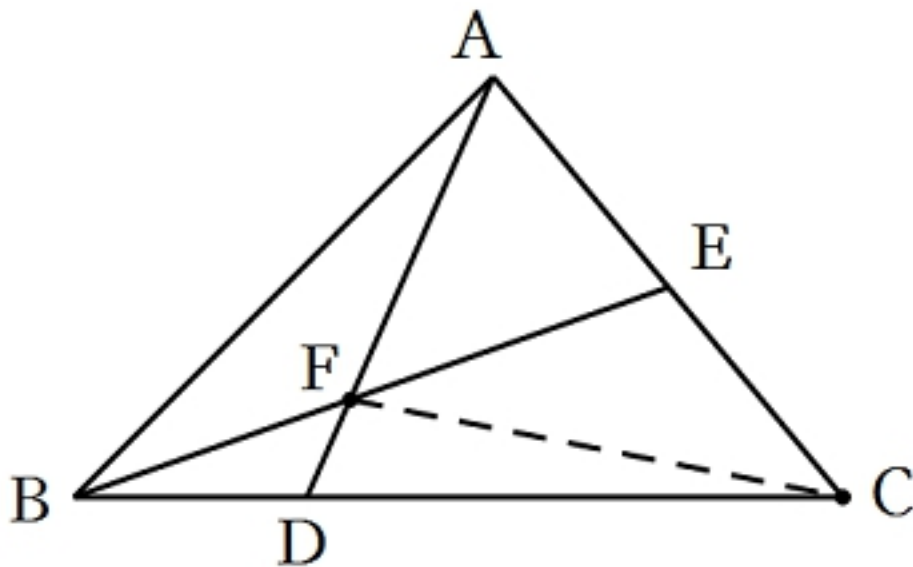
所以则四边形 $DFEC$ 的面积等于 $\frac{5}{12}$. 易得, 阴影部分面积为 $\frac{7}{12}$.

4. 如下图所示, 三角形 BAC 的面积是 1, E 是 AC 的中点, 点 D 在 BC 上, 且 $BD:DC = 1:2$, AD 与 BE 交于点 F , 则四边形 $DFEC$ 的面积等于_____.



【答案】 $\frac{5}{12}$

【分析】 如下图所示，连接 CF ，因为 $AE = EC, DC = 2BD$ ，三角形 ABC 的面积是 1，



所以

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}, S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}.$$

根据燕尾模型，

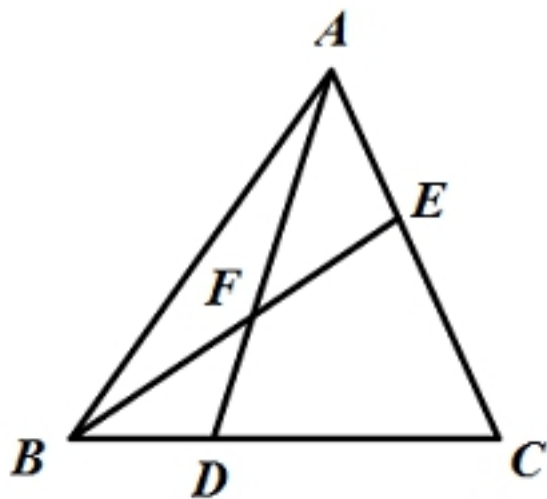
$$\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ACF}} = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}, \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle CBF}} = \frac{AE}{EC} = 1,$$

所以

$$S_{\triangle ABF} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4}, S_{\triangle AFE} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

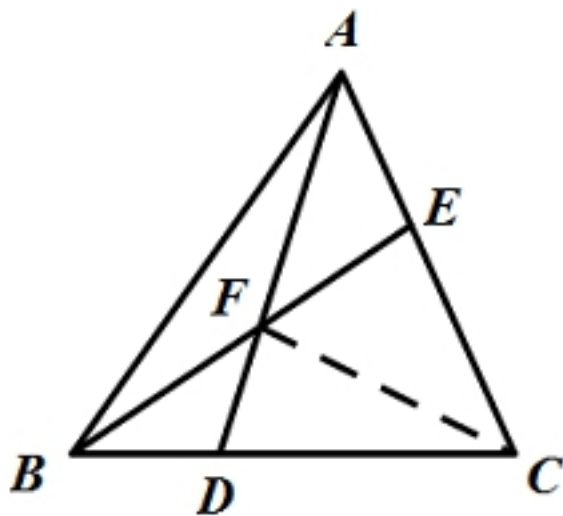
所以四边形 $DFEC$ 的面积是 $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$.

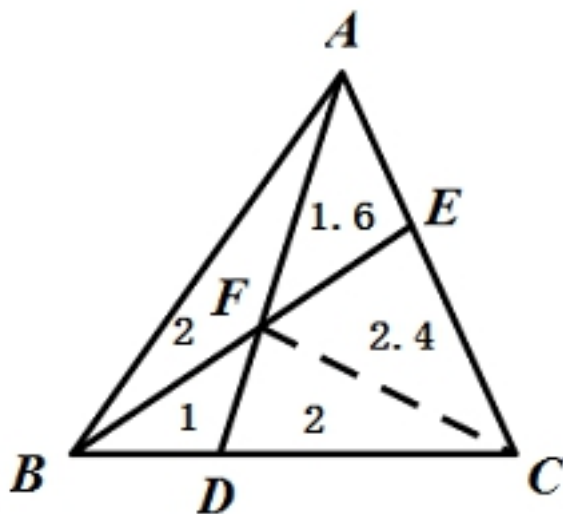
5. 如图, E 在 AC 上, D 在 BC 上, 且 $AE:EC = 2:3$, $BD:DC = 1:2$, AD 与 BE 交于点 F . 四边形 $DFEC$ 的面积等于 22 cm^2 , 则三角形 ABC 的面积_____.



【答案】 45cm^2

【分析】 连接 CF ,



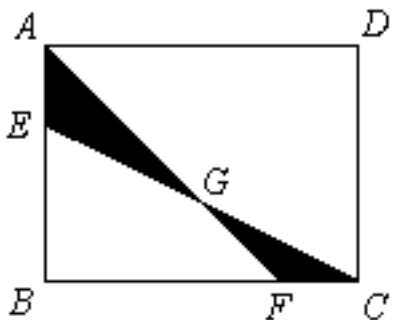


根据燕尾模型, $\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ACF}} = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$, $\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle CBF}} = \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$,

设 $S_{\triangle BDF} = 1$ 份, 则 $S_{\triangle DCF} = 2$ 份, $S_{\triangle ABF} = 2$ 份, $S_{\triangle AFC} = 4$ 份, $S_{\triangle AEF} = 4 \times \frac{2}{2+3} = 1.6$ 份, $S_{\triangle EFC} = 4 \times \frac{3}{2+3} = 2.4$ 份, 如图所标, 所以 $S_{\text{平行四边形 } EFDC} = 2 + 2.4 = 4.4$ 份, $S_{\triangle ABC} = 2 + 3 + 4 = 9$ 份.

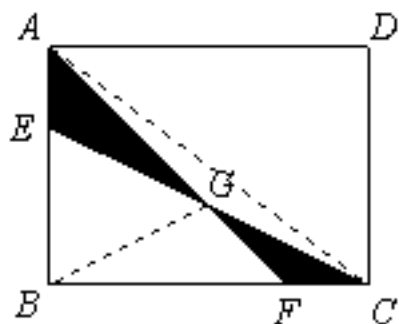
所以 $S_{\triangle ABC} = 22 \div 4.4 \times 9 = 45 \text{ (cm}^2\text{)}.$

6. 如图, 四边形 $ABCD$ 是矩形, E 、 F 分别是 AB 、 BC 上的点, 且 $AE = \frac{1}{3}AB$, $CF = \frac{1}{4}BC$, AF 与 CE 相交于 G , 若矩形 $ABCD$ 的面积为 120, 则 $\triangle AEG$ 与 $\triangle CGF$ 的面积之和为_____.



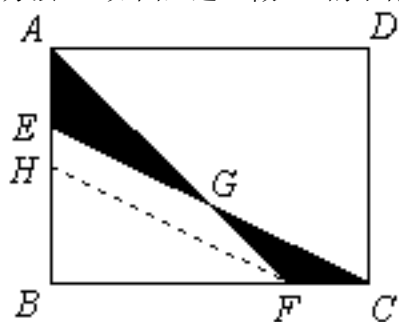
【答案】 15

【分析】 方法 1: 如图, 连接 AC 、 BG .



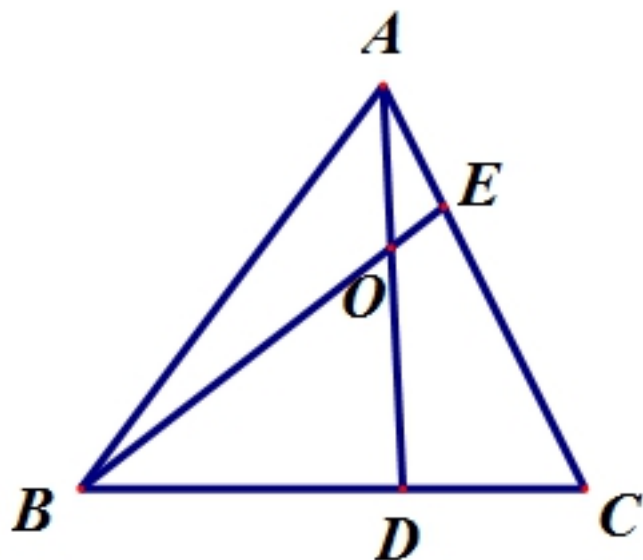
根据燕尾模型, $S_{\triangle ABG}:S_{\triangle ACG} = BF:CF = 3:1$, $S_{\triangle BCG}:S_{\triangle ACG} = BE:AE = 2:1$, 而 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}S_{\square ABCD} = 60$, 所以 $S_{\triangle ABG} = \frac{3}{3+2+1}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 60 = 30$, $S_{\triangle BCG} = \frac{2}{3+2+1}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \times 60 = 20$, 则 $S_{\triangle AEG} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABG} = 10$, $S_{\triangle CFG} = \frac{1}{4}S_{\triangle BCG} = 5$, 所以两个三角形的面积之和为 15.

方法 2: 如图, 过 F 做 CE 的平行线交 AB 于 H,



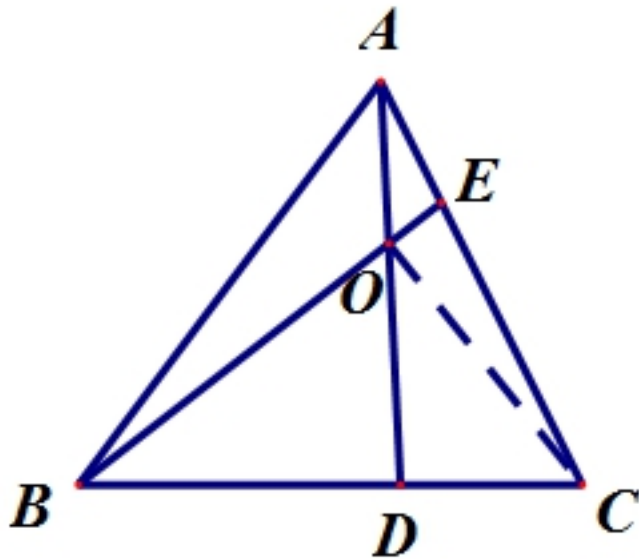
则 $EH:HB = CF:FB = 1:3$, 所以 $AE = \frac{1}{2}EB = 2EH$, $AG:GF = AE:EH = 2$, 即 $AG = 2GF$, 所以 $S_{\triangle AEG} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times S_{\triangle ABF} = \frac{2}{9} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}S_{\square ABCD} = 10$. 且 $EG = \frac{2}{3}HF = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}EC = \frac{1}{2}EC$, 故 $CG = GE$, 则 $S_{\triangle CGF} = 1 \times \frac{1}{2} \times S_{\triangle AEG} = 5$. 所以两三角形面积之和为 $10 + 5 = 15$.

7. 如图所示在 $\triangle ABC$ 中, $BD:DC = 2:1$, $AE:EC = 1:3$, 求 $OB:OE =$ _____.



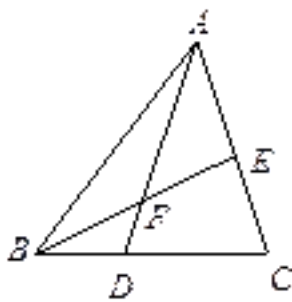
【答案】 8:1

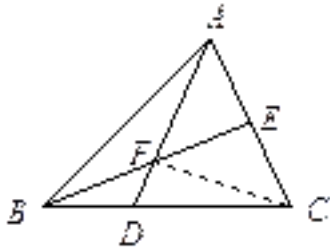
【分析】 连接 OC .



因为 $BD:DC = 2:1$, 根据燕尾模型, $S_{\triangle AOB}:S_{\triangle AOC} = BD:BC = 2:1$, 即 $S_{\triangle AOB} = 2S_{\triangle AOC}$; 又 $AE:EC = 1:3$, 所以 $S_{\triangle AOC} = 4S_{\triangle AOE}$. 则 $S_{\triangle AOB} = 2S_{\triangle AOC} = 2 \times 4S_{\triangle AOE} = 8S_{\triangle AOE}$, 所以 $OB:OE = S_{\triangle AOB}:S_{\triangle AOE} = 8:1$.

8. 如图, 三角形 ABC 的面积是 200 cm^2 , E 在 AC 上, 点 D 在 BC 上, 且 $AE:EC = 3:5$, $BD:DC = 2:3$, AD 与 BE 交于点 F . 则四边形 $DFEC$ 的面积等于_____.

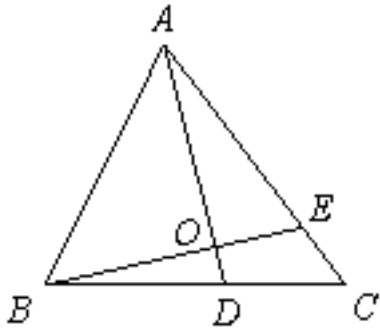




【答案】 93cm^2

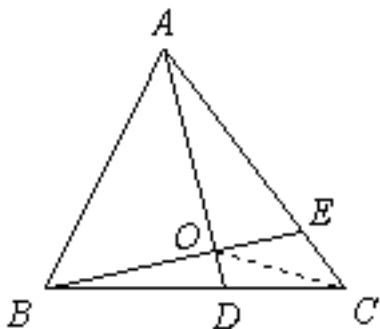
【分析】 连接 CF ，
 根据燕尾定理， $\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ACF}} = \frac{BD}{DC} = \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ ， $\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle CBF}} = \frac{AE}{EC} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ ，
 设 $S_{\triangle ABF} = 6$ 份，则 $S_{\triangle ACF} = 9$ 份， $S_{\triangle BCF} = 10$ 份， $S_{\triangle EFC} = 9 \times \frac{5}{3+5} = \frac{45}{8}$ 份， $S_{\triangle CDF} = 10 \times \frac{3}{2+3} = 6$ 份，所以 $S_{\triangle DCFE} = 200 \div (6 + 9 + 10) \times (\frac{45}{8} + 6) = 8 \times (\frac{45}{8} + 6) = 93 \text{ cm}^2$

9. 在 $\triangle ABC$ 中， $BD:DC = 3:2$ ， $AE:EC = 3:1$ ，求 $OB:OE =$ _____.



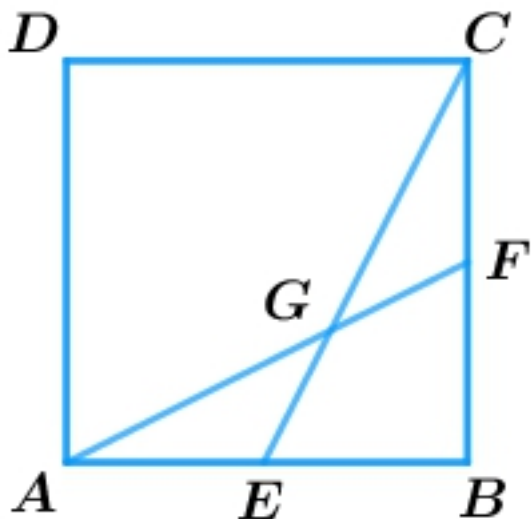
【答案】 2:1

【分析】 连接 OC 。



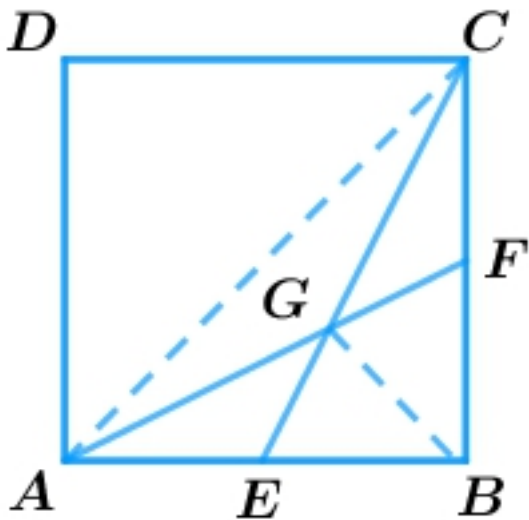
因为 $BD:DC = 3:2$ ，根据燕尾模型， $S_{\triangle AOB}:S_{\triangle AOC} = BD:BC = 3:2$ ，即 $S_{\triangle AOB} = \frac{3}{2}S_{\triangle AOC}$ ；又 $AE:EC = 3:1$ ，所以 $S_{\triangle AOC} = \frac{4}{3}S_{\triangle AOE}$ ， $S_{\triangle AOB} = \frac{3}{2}S_{\triangle AOC} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3}S_{\triangle AOE} = 2S_{\triangle AOE}$ ，所以 $OB:OE = S_{\triangle AOB}:S_{\triangle AOE} = 2:1$ 。

10. $ABCD$ 是边长为 12 厘米的正方形， E 、 F 分别是 AB 、 BC 边的中点， AF 与 CE 交于 G ，则四边形 $AGCD$ 的面积是_____平方厘米。



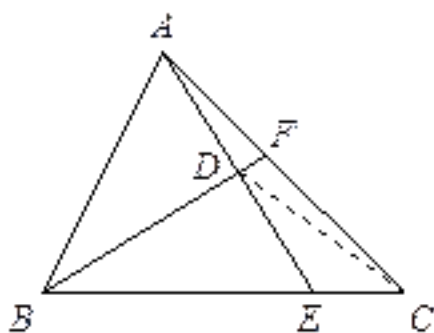
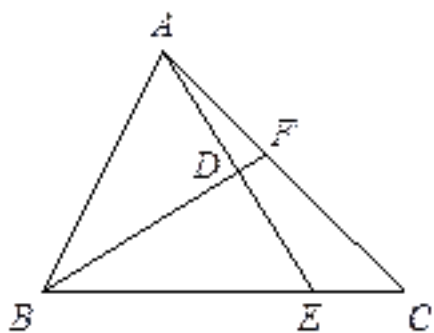
【答案】 96

【分析】 连结 AC 、 GB 。



设 $S_{\triangle AGC} = 1$ 份，根据燕尾模型得 $S_{\triangle AGB} = 1$ 份， $S_{\triangle BGC} = 1$ 份， $S_{\text{正方形}} = (1 + 1 + 1) \times 2 = 6$ 份， $S_{\triangle ACG} = 3 + 1 = 4$ 份，所以 $S_{\triangle ACG} = 12^2 \times \frac{4}{6} = 96 \text{ (cm}^2\text{)}$

11. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $BE:EC = 3:1$ ， D 是 AE 的中点，那么 $AF:FC =$ _____.

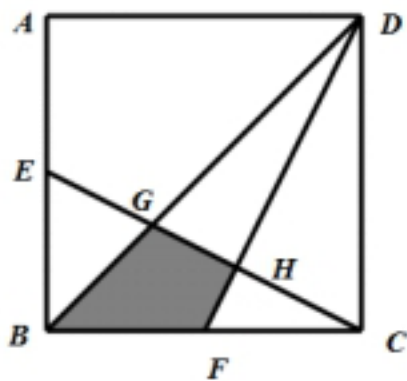


【答案】 3:4

【分析】 连接 CD .

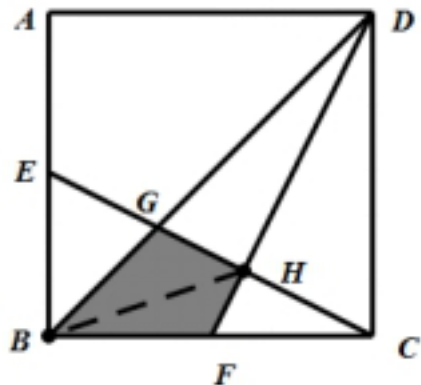
由于 $S_{\triangle ABD}:S_{\triangle BED} = 1:1$ ， $S_{\triangle BED}:S_{\triangle BCD} = 3:4$ ，所以 $S_{\triangle ABD}:S_{\triangle BCD} = 3:4$ ，
根据燕尾定理， $AF:FC = S_{\triangle ABD}:S_{\triangle BCD} = 3:4$.

12. 如图，正方形 $ABCD$ 的面积是 120 平方厘米， E 是 AB 的中点， F 是 BC 的中点，四边形 $BGHF$ 的面积是_____平方厘米.



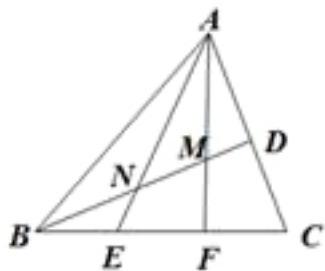
【答案】 14

【分析】 连接 BH ,



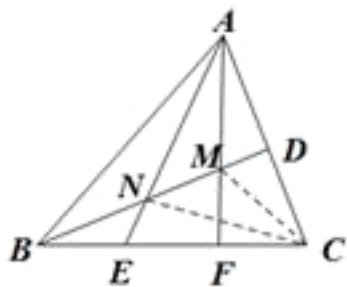
根据沙漏模型得 $BG:GD = 1:2$, 设 $S_{\triangle BHC} = 1$ 份, 根据燕尾模型 $S_{\triangle CHD} = 2$ 份, $S_{\triangle BHD} = 2$ 份, 因此 $S_{\text{正方形}} = (1 + 2 + 2) \times 2 = 10$ 份, $S_{\text{四边形 } BFHG} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$ 份, 所以 $S_{\text{四边形 } BFHG} = 120 \div 10 \times \frac{7}{6} = 14$ (平方厘米) .

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是边 AC 的中点, 点 E 、 F 是边 BC 的三等分点, 若 $\triangle ABC$ 的面积为 1, 那么四边形 $CDMF$ 的面积是_____.



【答案】 $\frac{7}{30}$

【分析】 由于点 D 是边 AC 的中点, 点 E 、 F 是边 BC 的三等分点, 如果能求出 BN 、 NM 、 MD 三段的比, 那么说分成的六小块的面积可以求出来, 其中当然也包括四边形 $CDMF$ 的面积. 连接 CM 、 CN .



根据燕尾模型，

$$S_{\triangle ABM} : S_{\triangle ACM} = BF : CF = 2 : 1,$$

$$S_{\triangle ACM} = 2S_{\triangle ADM},$$

$$S_{\triangle ABM} = 2S_{\triangle ACM} = 4S_{\triangle ADM},$$

那么 $BM = 4DM$ ，即

$$BM = \frac{4}{5}BD.$$

那么

$$S_{\triangle BMF} = \frac{BM}{BD} \times \frac{BF}{BC} \times S_{\triangle BCD} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{15},$$

$$S_{\text{四边形 } CDMF} = \frac{1}{2} - \frac{4}{15} = \frac{7}{30}.$$

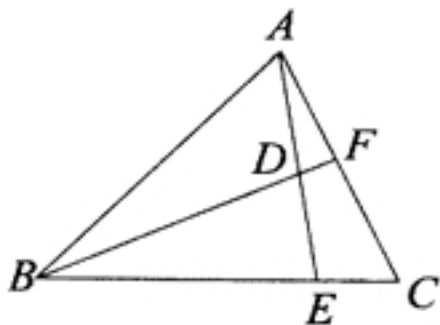
另解：得出 $S_{\triangle ABM} = 2S_{\triangle ACM} = 4S_{\triangle ADM}$ 后，可得

$$S_{\triangle ADM} = \frac{1}{5}S_{\triangle ABD} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10},$$

则

$$S_{\text{四边形 } CDMF} = S_{\triangle ACF} - S_{\triangle ADM} = \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{7}{30}.$$

14. 如下图所示，在 $\triangle ABC$ 中， E 是 BC 上一点， $BE:EC = 3:1$ ， D 是 AE 的中点， F 是直线 BD 与 AC 的交点，则 $AF:FC = \underline{\hspace{2cm}}$.

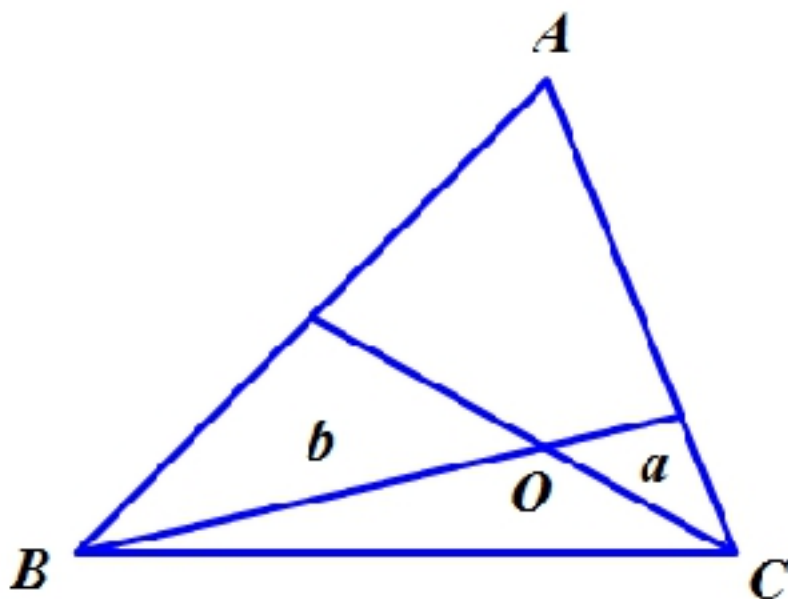


【答案】 3:4

【分析】 连接 DC ，设 $\triangle CDE$ 的面积为 1 份，因为 $BE:EC = 3:1, AD = DE$ ，那么 $\triangle ADC$ 的面积也为 1 份， $\triangle BDE$ 的面积为 3 份，那么也可以推出 $\triangle ADB$ 的面积也为 3 份，所以 $\triangle CBD$ 的面积为 $3 + 1 = 4$ 份。

根据燕尾模型 $AF:FC = S_{\triangle ADB}:S_{\triangle CBD} = 3:4$ 。

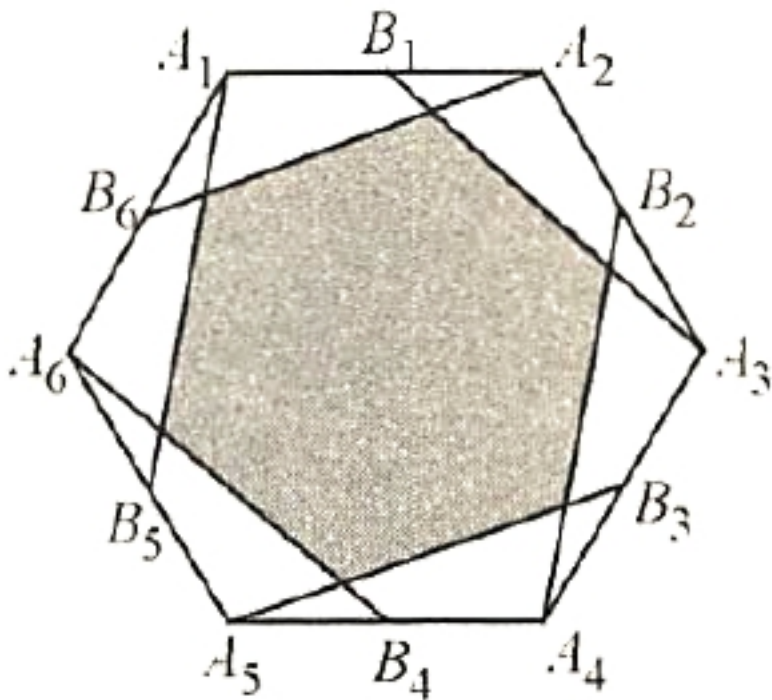
15. 如下图所示， $\triangle ABC$ 中， D 是 AB 边的中点， E 是 AC 边上的一点，且 $AE = 3EC$ ， O 为 DC 与 BE 的交点。若 $\triangle CEO$ 的面积为 a 平方厘米， $\triangle BDO$ 的面积为 b 平方厘米。且 $b - a$ 是 2.5 平方厘米，那么 $\triangle ABC$ 的面积是_____平方厘米。



【答案】 10

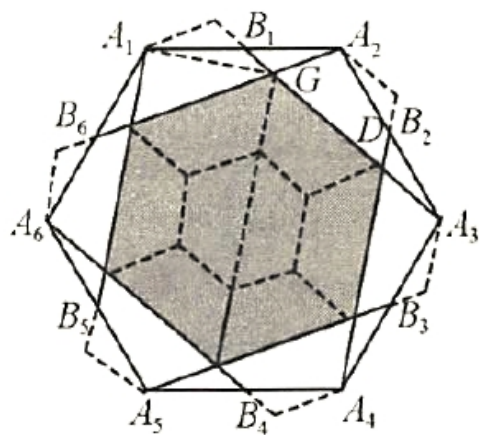
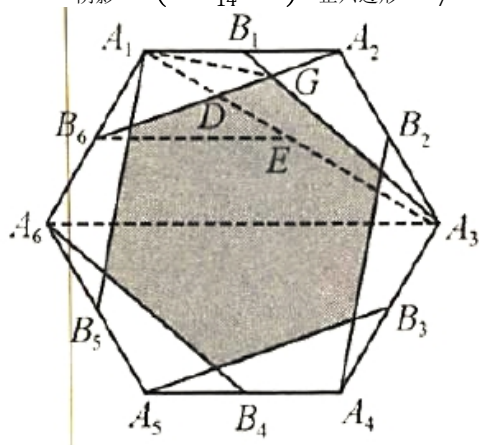
【分析】 连接 AO ，可以看到这是个非常典型的燕尾模型。根据三角形等积变换：由 $AD = BD$ ，有 $S_{\triangle ADO} = b$ ；由 $AE = 3EC$ ，有 $S_{\triangle ABO} = 3a$ 。再根据燕尾模型：由 $AD = BD$ ，有 $S_{\triangle BCO} = S_{\triangle ACO} = 4a$ ；由 $AE = 3EC$ ，有 $S_{\triangle BCO} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABO} = \frac{2}{3}b$ 。所以有 $4a = \frac{2}{3}b$ ，又已知 $b - a = 2.5$ ，所以有 $a = 0.5, b = 3$ 。那么 $S_{\triangle ABC} = 2b + 4a + 4a = 10$ (平方厘米)。

16. 正六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的面积是 2009 平方厘米， $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ 分别是正六边形各边的中点。请问下图中阴影六边形的面积是_____平方厘米。



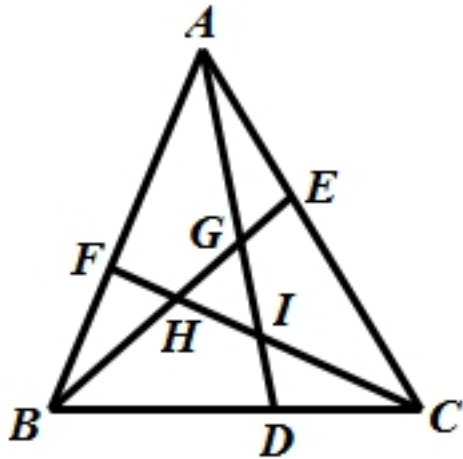
【答案】 1148

【分析】 方法一：如下左图，连接 A_1A_3, A_1G, A_6A_3 ，过 B_6 做 A_6A_3 的平行线 B_6E ，交 A_1A_3 于 E 。因为空白的面积等于 $\triangle A_2A_3G$ 面积的 6 倍，所以关键求 $\triangle A_2A_3G$ 的面积，在 $\triangle A_1A_2A_3$ 中用燕尾模型时，需要知道 A_1D, A_3D 的长度比，根据沙漏模型得 $A_1D = DE$ ，再根据金字塔模型得 $A_1E = A_3E$ ，因此 $A_1D:A_3D = 1:3$ ，在 $\triangle A_1A_2A_3$ 中，设 $S_{\triangle A_1A_2G} = 1$ 份，则 $S_{\triangle A_2A_3G} = 3$ 份， $S_{\triangle A_3A_1G} = 3$ 份，所以 $S_{\triangle A_2A_3G} = \frac{3}{7}S_{\triangle A_1A_2A_3} = \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}S_{\text{正六边形}} = \frac{1}{14}S_{\text{正六边形}}$ ，因此 $S_{\text{阴影}} = \left(1 - \frac{1}{14} \times 6\right)S_{\text{正六边形}} = \frac{4}{7} \times 2009 = 1148$ (平方厘米)。



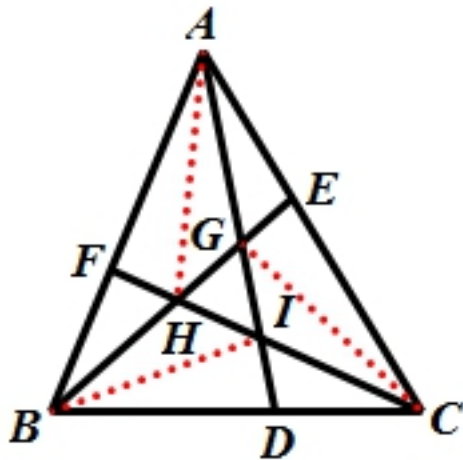
方法二：既然给的图形是特殊的正六边形，且阴影也是正六边形，我们可以用上图的割补思路，把正六边形分割成 14 个大小形状相同的梯形，其中阴影有 8 个梯形，所以阴影面积为 $\frac{8}{14} \times 2009 = 1148$ (平方厘米)。

17. 如下图，三角形 ABC 中， $AF:FB = BD:DC = CE:AE = 3:2$ ，且三角形 ABC 的面积是 1，则三角形 ABE 的面积为_____，三角形 AGE 的面积为_____，三角形 GHI 的面积为_____。



【答案】 $\frac{2}{5}$, $\frac{8}{95}$, $\frac{1}{19}$

【分析】 连接 AH 、 BI 、 CG 。



由于 $CE:AE = 3:2$ ，所以 $AE = \frac{2}{5}AC$ ，故

$$S_{\triangle ABE} = \frac{2}{5}S_{\triangle ABC} = \frac{2}{5};$$

根据燕尾模型，

$$S_{\triangle ACG}:S_{\triangle ABG} = CD:BD = 2:3,$$

$$S_{\triangle BCG}:S_{\triangle ABG} = CE:EA = 3:2,$$

所以

$$S_{\triangle ACG}:S_{\triangle ABG}:S_{\triangle BCG} = 4:6:9,$$

则

$$S_{\triangle ACG} = \frac{4}{19},$$

$$S_{\triangle BCG} = \frac{9}{19};$$

那么

$$S_{\triangle AGE} = \frac{2}{5}S_{\triangle AGC} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{19} = \frac{8}{95};$$

同样分析可得 $S_{\triangle ACH} = \frac{9}{19}$, 则

$$EG:EH = S_{\triangle ACG}:S_{\triangle ACH} = 4:9,$$

$$EG:EB = S_{\triangle ACG}:S_{\triangle ACB} = 4:19,$$

所以

$$EG:GH:HB = 4:5:10,$$

同样分析可得

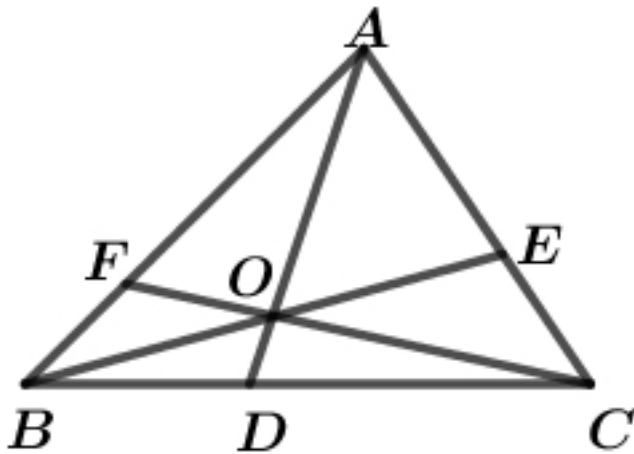
$$AG:GI:ID = 10:5:4.$$

所以

$$S_{\triangle BIE} = \frac{5}{10}S_{\triangle BAE} = \frac{5}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5},$$

$$S_{\triangle GHI} = \frac{5}{19}S_{\triangle BIE} = \frac{5}{19} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{19}.$$

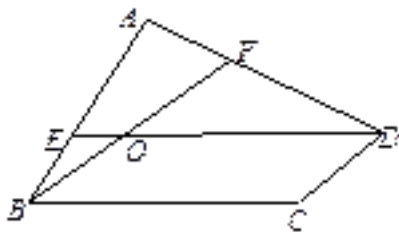
18. 如图, $BD:DC = 2:3$, $AE:CE = 5:3$, 则 $AF:BF =$ _____



【答案】 5:2

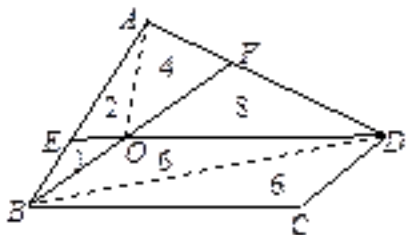
【分析】 根据燕尾模型有 $S_{\triangle ABG}:S_{\triangle ACG} = 2:3 = 10:15$, $S_{\triangle ABG}:S_{\triangle BCG} = 5:3 = 10:6$, 所以 $S_{\triangle ACG}:S_{\triangle BCG} = 15:6 = 5:2 = AF:BF$.

19. 如图所示, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = 3BE$, $AD = 3AF$, 四边形 $AEOF$ 的面积是 12, 那么平行四边形 $BODC$ 的面积为_____.



【答案】 24

【分析】 连接 AO, BD ,



根据燕尾定理

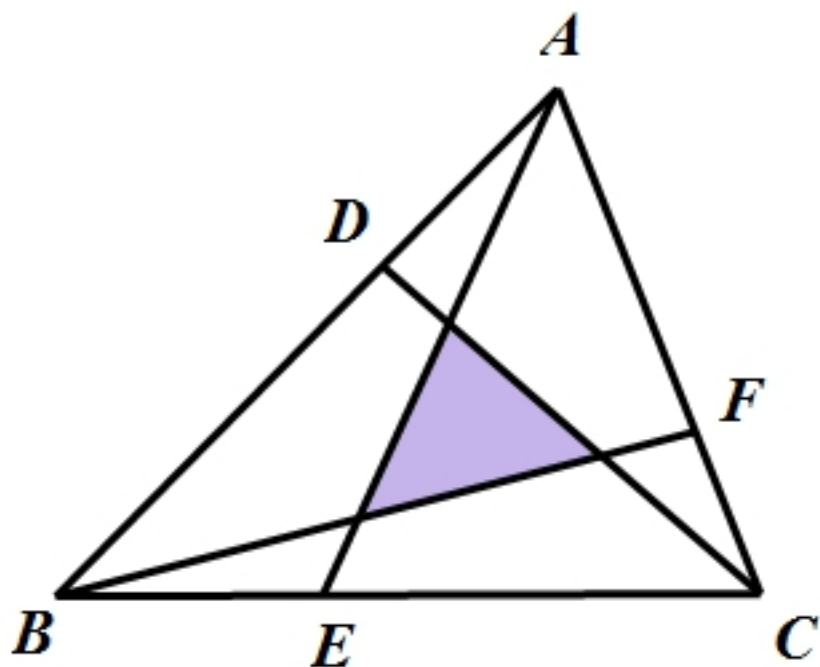
$$S_{\triangle ABO}:S_{\triangle BDO} = AF:FD = 1:2,$$

$$S_{\triangle AOD}:S_{\triangle BOD} = AE:BE = 2:1,$$

设 $S_{\triangle BEO} = 1$, 则其他图形面积, 如图所标, 所以

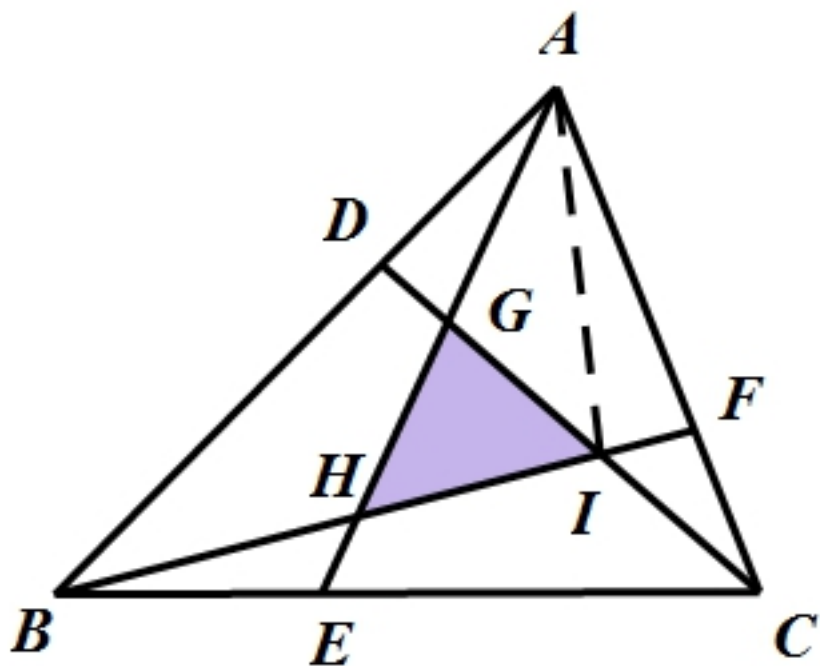
$$S_{BODC} = 2S_{AEOF} = 2 \times 12 = 24.$$

20. 如下图所示, $\triangle ABC$ 中, $BD = 2DA, CE = 2EB, AF = 2FC$, 那么 $\triangle ABC$ 的面积是阴影三角形面积的_____倍.



【答案】 7

【分析】 如下图所示，连接 AI 。



根据燕尾模型， $S_{\triangle BCI}:S_{\triangle ACI} = BD:AD = 2:1$ ， $S_{\triangle BCI}:S_{\triangle ABI} = CF:AF = 1:2$ ，
所以

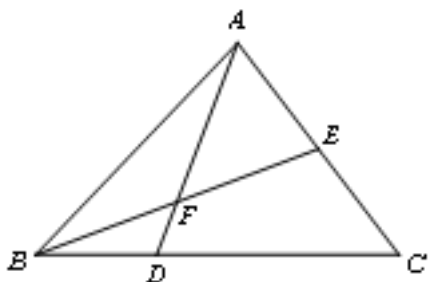
$$S_{\triangle ACI}:S_{\triangle BCI}:S_{\triangle ABI} = 1:2:4,$$

那么

$$S_{\triangle BCI} = \frac{2}{1+2+4} S_{\triangle ABC} = \frac{2}{7} S_{\triangle ABC}.$$

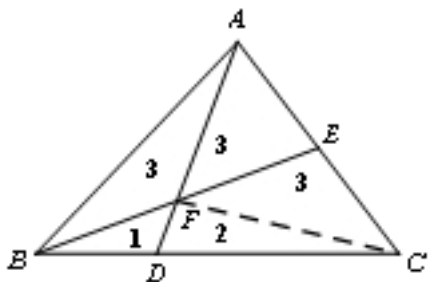
同理可知 $\triangle ACG$ 和 $\triangle ABH$ 的面积也都等于 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{2}{7}$ ，所以阴影三角形的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的 $1 - \frac{2}{7} \times 3 = \frac{1}{7}$ ，所以 $\triangle ABC$ 的面积是阴影三角形面积的 7 倍。

21. 如图，三角形 ABC 的面积是 1， E 是 AC 的中点，点 D 在 BC 上，且 $BD:DC = 1:2$ ， AD 与 BE 交于点 F 。则四边形 $DFEC$ 的面积等于 _____。



【答案】 $\frac{5}{12}$

【分析】 方法一：如图所示，

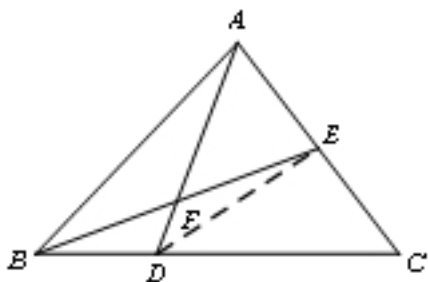


根据燕尾模型， $\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ACF}} = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$ ， $\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle CBF}} = \frac{AE}{EC} = 1$ 。

设 $S_{\triangle BDF} = 1$ 份，则 $S_{\triangle DCF} = 2$ 份， $S_{\triangle ABF} = 3$ 份， $S_{\triangle AEF} = S_{\triangle EFC} = 3$ 份，如图所标

所以 $S_{DCEF} = \frac{5}{12} S_{\triangle ABC} = \frac{5}{12}$ 。

方法二：如图所示，



连接 DE ，由题目条件可得到 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}$ ，

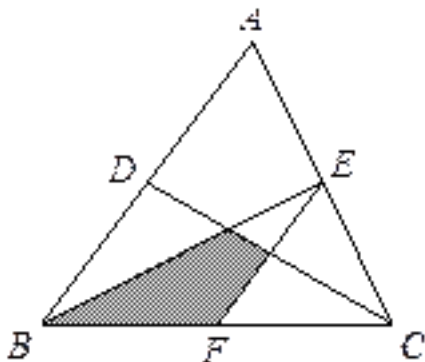
$$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } \frac{BF}{FE} = \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADE}} = 1,$$

$$S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \times S_{\triangle DEB} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times S_{\triangle ABC} = \frac{1}{12},$$

$$\text{而 } S_{\triangle CDE} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}. \text{ 所以则四边形 } DFEC \text{ 的面积等于 } \frac{5}{12}.$$

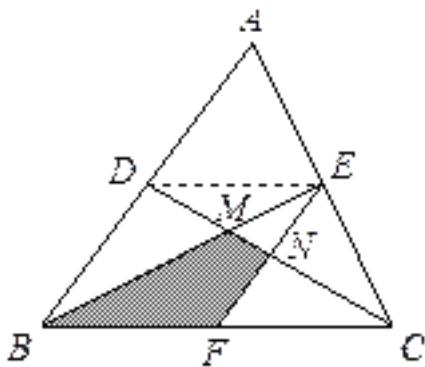
22. 如图，三角形 ABC 的面积为 60 平方厘米， D 、 E 、 F 分别为各边的中点，那么阴影部分的面积是_____平方厘米.



【答案】 12.5

【分析】 阴影部分是一个不规则的四边形，不方便直接求面积，可以将其转化为两个三角形的面积之差. 而从图中来看，既可以转化为 $\triangle BEF$ 与 $\triangle EMN$ 的面积之差，又可以转化为 $\triangle BCM$ 与 $\triangle CFN$ 的面积之差.

(法一) 如图，连接 DE .



由于 D 、 E 、 F 分别为各边的中点，那么 $BDEF$ 为平行四边形，且面积为三角形 ABC 面积的一半，即 30 平方厘米；那么 $\triangle BEF$ 的面积为平行四边形 $BDEF$ 面积的一半，为 15 平方厘米. 根据几何五大模型中的相似模型，由于 DE 为三角形 ABC 的中位线，长度为 BC 的一半，则

$$EM:BM = DE:BC = 1:2,$$

所以

$$EM = \frac{1}{3}EB;$$

$$EN:FN = DE:FC = 1:1,$$

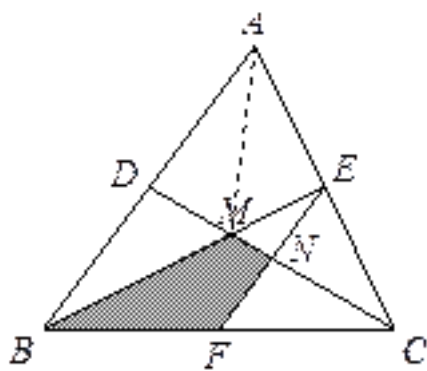
所以

$$EN = \frac{1}{2}EF.$$

那么 $\triangle EMN$ 的面积占 $\triangle BEF$ 面积的 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, 所以阴影部分面积为

$$15 \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) = 12.5(\text{平方厘米}).$$

(法二) 如图, 连接 AM .



根据燕尾定理,

$$S_{\triangle ABM}:S_{\triangle BCM} = AE:EC = 1:1,$$

$$S_{\triangle ACM}:S_{\triangle BCM} = AD:DB = 1:1,$$

所以

$$S_{\triangle BCO} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \times 60 = 20(\text{平方厘米}),$$

而

$$S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 60 = 30(\text{平方厘米}),$$

所以

$$S_{\triangle FCN} = \frac{1}{4}S_{\triangle BDC} = 7.5(\text{平方厘米}),$$

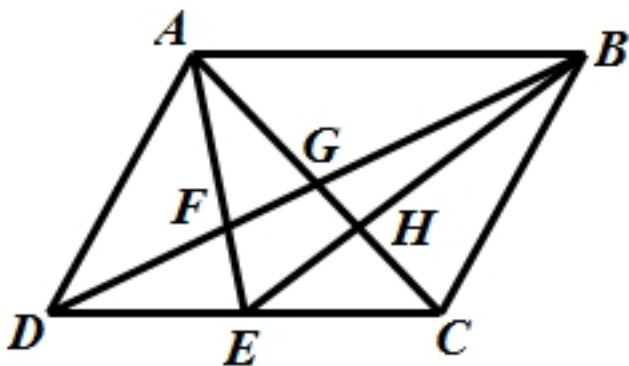
那么阴影部分面积为

$$20 - 7.5 = 12.5(\text{平方厘米}).$$

【总结】 求三角形的面积, 一般有三种方法:

- (1) 利用面积公式: 底 $\times$ 高 $\div 2$;
- (2) 利用整体减去部分;
- (3) 利用比例和模型.

23. 下图中, $ABCD$ 是平行四边形, E 为 CD 的中点, AE 和 BD 的交点为 F , AC 和 BE 的交点为 H , AC 和 BD 的交点为 G , 四边形 $EHGF$ 的面积是 15 平方厘米, 则 $ABCD$ 的面积是_____平方厘米.



【答案】 180

【分析】 解法一：蝴蝶模型与一半模型.

(1) E 是 CD 的中点, $DE:AB = 1:2$, 所以

$$S_{\triangle DEF}:S_{\triangle DAF}:S_{\triangle BEF}:S_{\triangle ABF} = 1:2:2:4.$$

(2) 设平行四边形面积为“1”. E 是 CD 的中点, 所以 $S_{\triangle ABG}$ 、 $S_{\triangle ADG}$ 、 $S_{\triangle BEC}$ 占平行四边形面积的 $\frac{1}{4}$, 梯形 S_{ABED} 占平行四边形面积的 $\frac{3}{4}$;

(3) 所以

$$S_{\triangle DAF} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{1+2+2+4} = \frac{1}{6},$$

$$S_{\triangle GAF} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12},$$

同理可知 $S_{\triangle GHB} = \frac{1}{12}$.

(4) 根据一半模型, $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}$,

$$S_{\text{四边形 } EHGF} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12};$$

(5) $ABCD$ 的面积是

$$15 \div \frac{1}{12} = 180(\text{cm}^2).$$

解法二：相似模型、等积变形与一半模型.

(1) E 是 CD 的中点, $DE:AB = 1:2$, 所以 $DF:FB = 1:2$, 而 $DG = GB$,

$$DF:FG = \frac{1}{1+2} : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+2} \right) = 2:1;$$

(2) 设平行四边形面积为“1”. E 是 CD 的中点, 所以 $S_{\triangle ABG}$ 、 $S_{\triangle ADG}$ 占平行四边形面积的 $\frac{1}{4}$, 所以

$$S_{\triangle GAF} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2+1} = \frac{1}{12},$$

同理可知 $S_{\triangle GHB} = \frac{1}{12}$.

(3) 根据一半模型, $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}$,

$$S_{\text{四边形 } EHGF} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12};$$

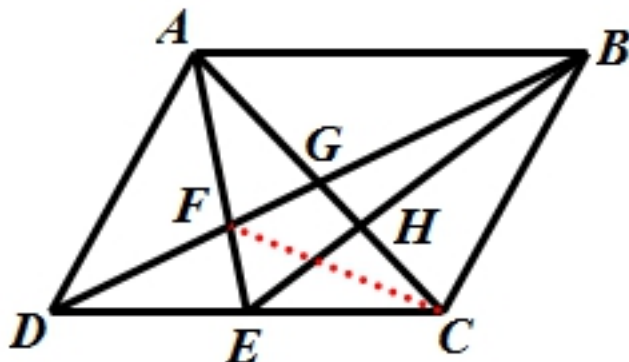
(4) $ABCD$ 的面积是

$$15 \div \frac{1}{12} = 180(\text{cm}^2).$$

解法三: 燕尾模型与一半模型.

(1) 设平行四边形面积为“1”. $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}$.

(2) E 是 CD 的中点, G 为 AC 的中点, 连接 FC ,



设 $S_{\triangle DEF}$ 为 1 份, $S_{\triangle ECF}$ 也为 1 份, 根据燕尾 $S_{\triangle ADF}$ 为 2 份, 再根据燕尾 $S_{\triangle ACF}$ 也为 2 份, 根据按比例分配, $S_{\triangle AGF}$ 、 $S_{\triangle GCF}$ 都为 1 份, 所以

$$S_{\triangle GAF} = \frac{1}{2} \div (2+1+1+1+1) = \frac{1}{12},$$

同理可知 $S_{\triangle GHB} = \frac{1}{12}$.

(3) 根据一半模型, $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}$,

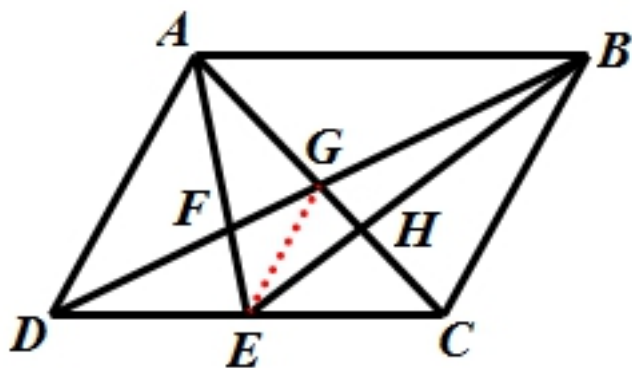
$$S_{\text{四边形 } EHGF} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12};$$

(4) $ABCD$ 的面积是

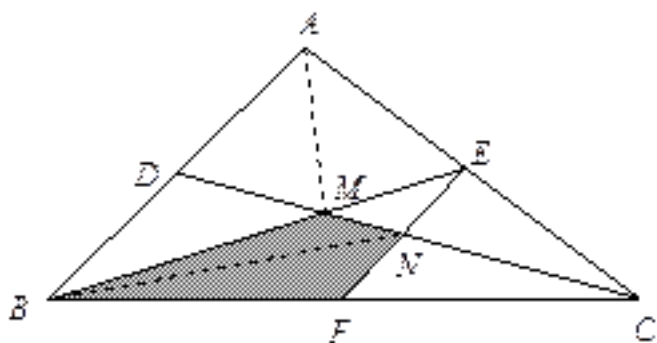
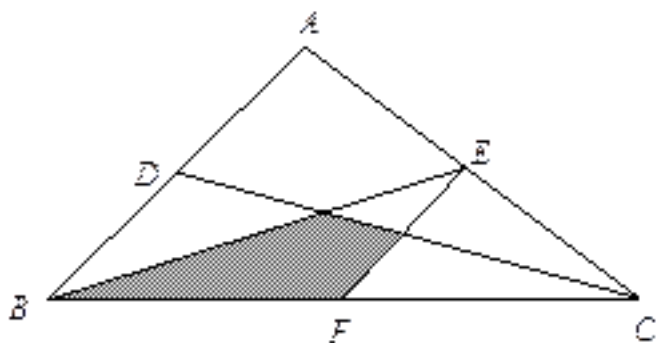
$$15 \div \frac{1}{12} = 180(\text{cm}^2).$$

解法四: 风筝模型与一半模型.

连接 EG 同样可解.



24. 三角形 ABC 的面积为 15 平方厘米, D 为 AB 中点, E 为 AC 中点, F 为 BC 中点, 求阴影部分的面积.

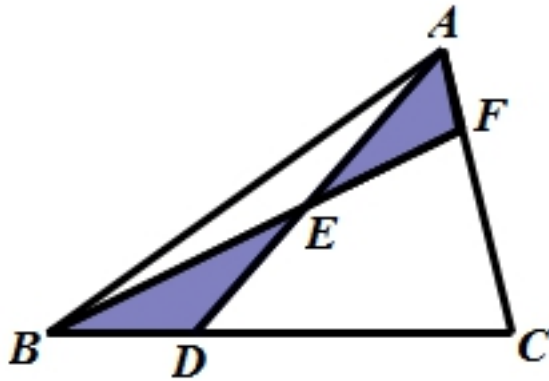


【答案】 3.125

【分析】 令 BE 与 CD 的交点为 M , CD 与 EF 的交点为 N , 连接 AM , BN .
 在 $\triangle ABC$ 中, 根据燕尾定理, $S_{\triangle ABM}:S_{\triangle BCM} = AE:CE = 1:1$, $S_{\triangle ACM}:S_{\triangle BCM} = AD:BD = 1:1$,
 所以 $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ACM} = S_{\triangle BCN} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$
 由于 $S_{\triangle AEM} = \frac{1}{2}S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABM}$ S, 所以 $BM:ME = 2:1$

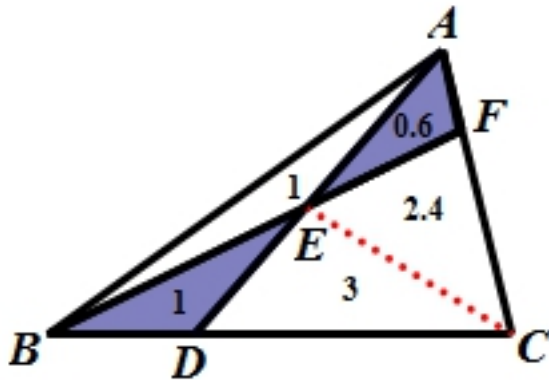
在 $\triangle EBC$ 中, 根据燕尾定理, $S_{\triangle BEN}:S_{\triangle CEN} = BF:CF = 1:1$ $S_{\triangle CEN}:S_{\triangle CBN} = ME:MB = 1:2$
 设 $S_{\triangle CEN} = 1$ (份), 则 $S_{\triangle BEN} = 1$ (份), $S_{\triangle BCN} = 2$ (份), $S_{\triangle BCE} = 4$ (份),
 所以 $S_{\triangle BCN} = \frac{1}{2}S_{\triangle BCE} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$, $S_{\triangle BNE} = \frac{1}{4}S_{\triangle BCE} = \frac{1}{8}S_{\triangle ABC}$, 因为 $BM:ME = 2:1$, F 为 BC 中点,
 所以 $S_{\triangle BMN} = \frac{2}{3}S_{\triangle BNE} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{8}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{12}S_{\triangle ABC}$, $S_{\triangle BFN} = \frac{1}{2}S_{\triangle BNC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}S_{\triangle ABC}$,
 所以 $S_{\text{阴影}} = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{8}\right)S_{\triangle ABC} = \frac{5}{24}S_{\triangle ABC} = \frac{5}{24} \times 15 = 3.125$ (平方厘米)

25. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AE = ED$, $BD:DC = 1:3$, 阴影部分的面积占三角形 ABC 面积的几分之几?

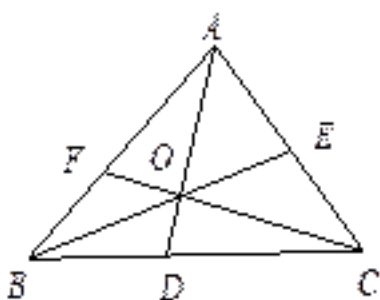


【答案】 $\frac{1}{5}$

【分析】 详解: 连结 CE , 如图所示标份数. 已知阴影的面积占三角形 ABC 面积的 $\frac{1}{5}$.



26. 如下图, 三角形 ABC 中, $BD:DC = 4:5$, $CE:EA = 2:3$, 求 $AF:FB$.



【答案】 15:8

【分析】 根据燕尾定理，

$$\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle ACO}} = \frac{BD}{DC} = \frac{4}{5} = \frac{12}{15},$$

$$\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle CBO}} = \frac{AE}{EC} = \frac{3}{2} = \frac{12}{8},$$

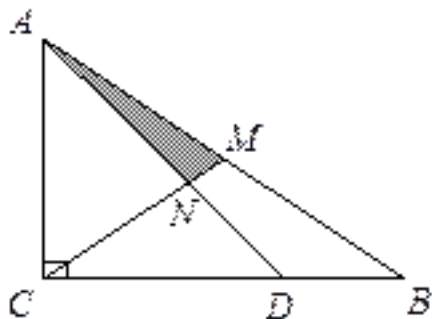
所以

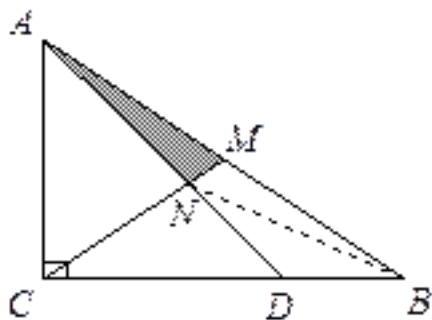
$$\frac{S_{\triangle ACO}}{S_{\triangle BCO}} = \frac{15}{8},$$

所以

$$AF:FB = 15:8.$$

27. 三角形 ABC 中， C 是直角，已知 $AC = 2$ ， $CD = 2$ ， $CB = 3$ ， $AM = BM$ ，那么三角形 AMN （阴影部分）的面积为多少？





【答案】 0.3

【分析】 连接 BN .

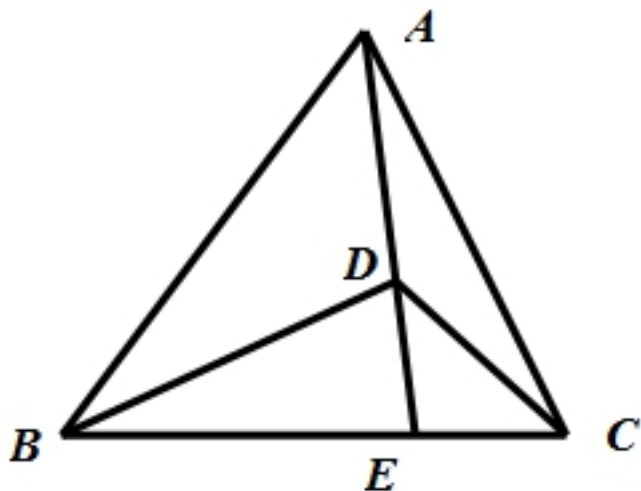
$\triangle ABC$ 的面积为 $3 \times 2 \div 2 = 3$

根据燕尾定理, $\triangle ACN : \triangle ABN = CD : BD = 2 : 1$;

同理 $\triangle CBN : \triangle CAN = BM : AM = 1 : 1$

设 $\triangle AMN$ 面积为 1 份, 则 $\triangle MNB$ 的面积也是 1 份, 所以 $\triangle ANB$ 的面积是 $1 + 1 = 2$ 份, 而 $\triangle ACN$ 的面积就是 $2 \times 2 = 4$ 份, $\triangle CBN$ 也是 4 份, 这样 $\triangle ABC$ 的面积为 $4 + 4 + 1 + 1 = 10$ 份, 所以 $\triangle AMN$ 的面积为 $3 \div 10 \times 1 = 0.3$.

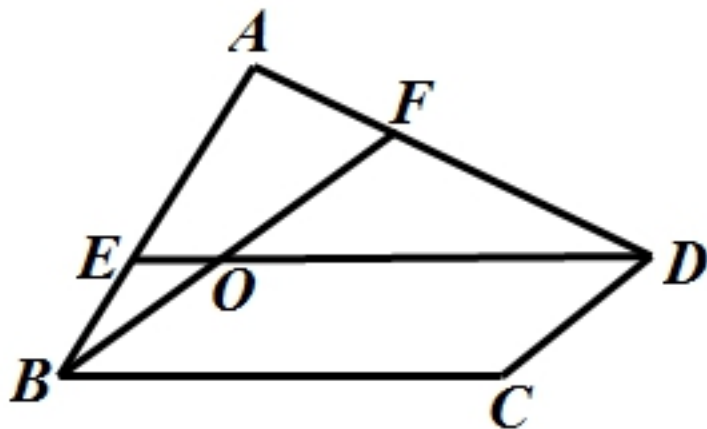
28. 如图, 三角形 ABD 的面积是 35, 三角形 ACD 的面积是 25, 三角形 BCD 的面积是 24, 求三角形 CDE 的面积.



【答案】 10

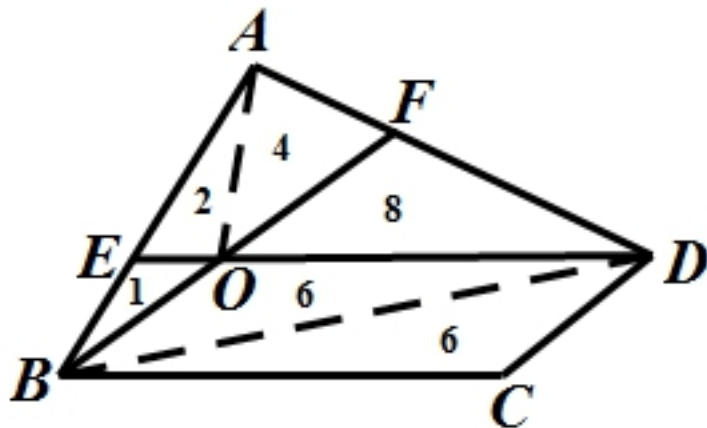
【分析】 根据燕尾模型, $S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ACD} = BE : CE = S_{\triangle BDE} : S_{\triangle CDE} = 35 : 25 = 7 : 5$, 并且有 $S_{\triangle BDE} + S_{\triangle CDE} = S_{\triangle BCD} = 24$, 故而 $S_{\triangle CDE} = 24 \times \frac{5}{7+5} = 10$.

29. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = 3BE$ ， $AD = 3AF$ ，四边形 $AEOF$ 的面积是 12，那么平行四边形 $BODC$ 的面积为_____.



【答案】 24

【分析】 连接 AO, BD ,



根据燕尾模型

$$S_{\triangle ABO} : S_{\triangle BDO} = AF : FD = 1 : 2,$$

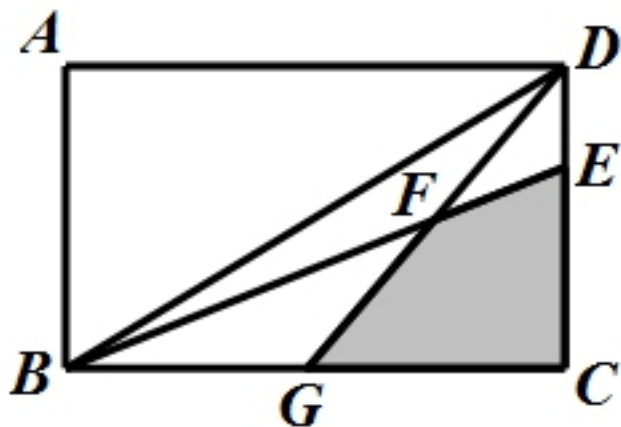
$$S_{\triangle AOD} : S_{\triangle BOD} = AE : BE = 2 : 1,$$

$$S_{\triangle ABO} : S_{\triangle BDO} : S_{\triangle AOD} = 1 : 2 : 4,$$

设 $S_{\triangle BEO} = 1$ 份，则其他图形面积，如图所标，所以

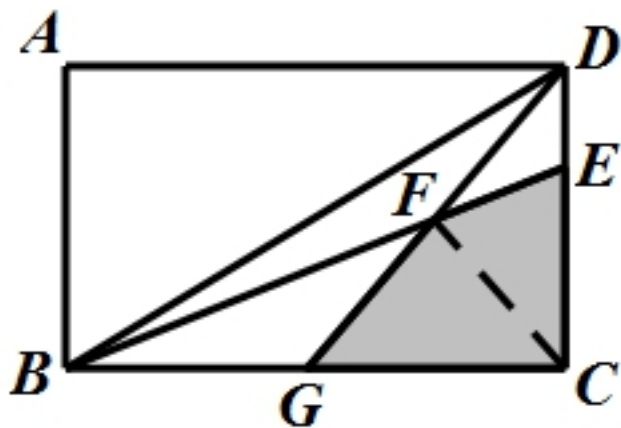
$$S_{BODC} = 2S_{AEOF} = 2 \times 12 = 24.$$

30. 如图，长方形 $ABCD$ 的面积是 2 平方厘米， $EC = 2DE$ ， F 是 DG 的中点。阴影部分的面积是多少平方厘米？



【答案】 $\frac{5}{12}$

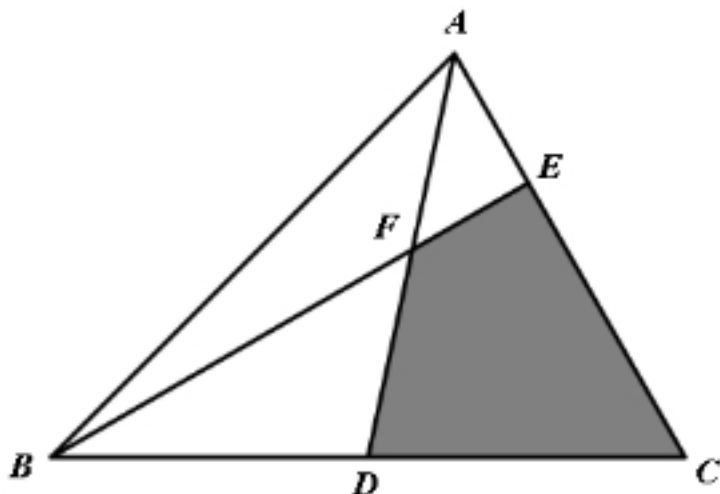
【分析】 连结 FC ,



设 $S_{\triangle FED} = 1$ 份, 则 $S_{\triangle FEC} = 2$ 份, 因为 $FD:FG = 1:1$, $S_{\triangle FGC} = 3$ 份.

设 $S_{\triangle DEF} = 1$ 份, 则根据燕尾模型其他面积如图所示 $S_{\text{阴影}} = \frac{5}{12} S_{\triangle BCD} = \frac{5}{12} \times \frac{1}{2} S_{\text{矩形} ABCD} = \frac{5}{12}$ 平方厘米.

31. 如图, 已知 $BD = DC$, $EC = 2AE$, 三角形 ABC 的面积是 30, 求阴影部分面积.



【答案】 12.5

【分析】 题中条件只有三角形面积给出具体数值，其他条件给出的实际上是比例的关系，由此判断这道题不应该通过面积公式求面积。又因为阴影部分是一个不规则四边形，所以我们需要对它进行改造，那么我们需要连一条辅助线，

方法一：连接 CF ，因为 $BD = DC$ ， $EC = 2AE$ ，三角形 ABC 的面积是 30，所以

$$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} = 10,$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = 15.$$

根据燕尾模型，

$$\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle CBF}} = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ACF}} = \frac{BD}{CD} = 1,$$

$$S_{\triangle ABF}:S_{\triangle BFC}:S_{\triangle AFC} = 1:2:1.$$

所以

$$S_{\triangle ABF} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC} = 7.5,$$

$$S_{\triangle BFD} = 15 - 7.5 = 7.5,$$

所以阴影部分面积是 $30 - 10 - 7.5 = 12.5$.

方法二：连接 DE ，由题目条件可得到

$$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} = 10,$$

$$S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2}S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}S_{\triangle ABC} = 10,$$

所以

$$\frac{AF}{FD} = \frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle BDE}} = \frac{1}{1},$$

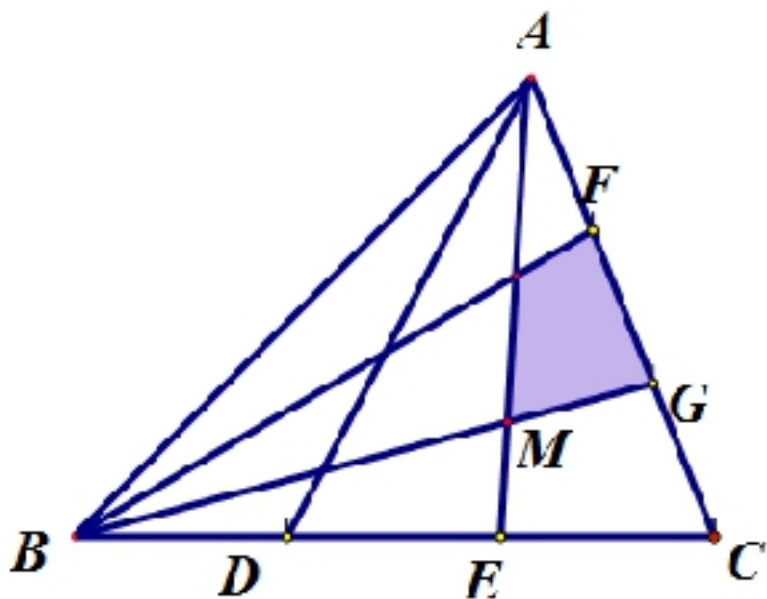
$$\begin{aligned} S_{\triangle DEF} &= \frac{1}{2} \times S_{\triangle DEA} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times S_{\triangle ADC} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times S_{\triangle ABC} \\ &= 2.5, \end{aligned}$$

而

$$S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times S_{\triangle ABC} = 10.$$

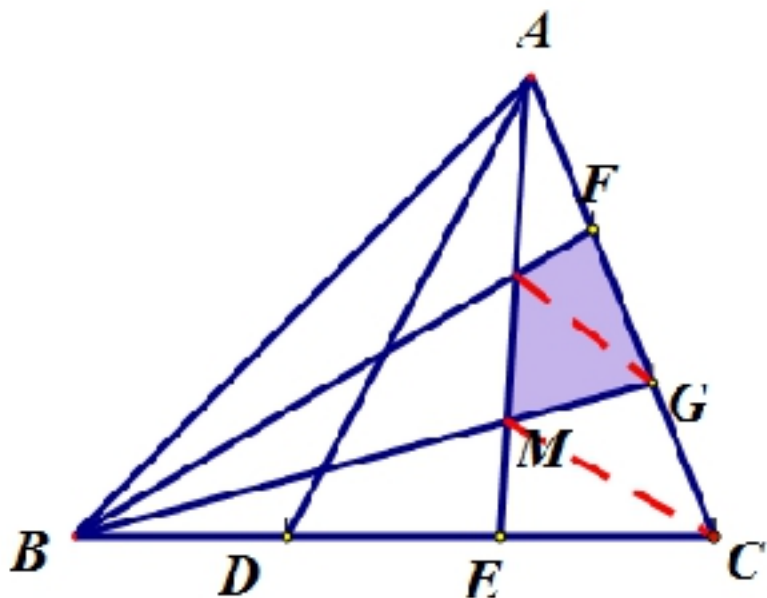
所以阴影部分的面积为 12.5.

32. 如下图所示，三角形 ABC 的面积为 1，点 D 、 E 是 BC 边的三等分点，点 F 、 G 是 AC 边的三等分点。请问阴影部分的面积是多少？



【答案】 $\frac{5}{42}$

【分析】 如下图所示，连接 CM ，设 $S_{\triangle CMG} = a, S_{\triangle CME} = b$ ，则 $S_{\triangle AMG} = 2a, S_{\triangle BME} = 2b$ ，



从而有 $\begin{cases} 3a + b = \frac{1}{3} \\ 3b + a = \frac{1}{3} \end{cases}$ ，易得 $a + b = \frac{1}{6}$ 。

说明 $S_{\text{四边形 } EMGC} = \frac{1}{6}$ ，所以 $S_{\triangle AMG} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ ， $S_{\triangle BAM} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ 。

所以 $BM:MG = S_{\triangle ABM}:S_{\triangle AMG} = \frac{1}{2}:\frac{1}{6} = 3:1$ 。

再连接 GN ，根据燕尾模型，可以得到

$$S_{\triangle ABN}:S_{\triangle ANG} = BM:MG = 3:1,$$

$$S_{\triangle ABN}:S_{\triangle BNG} = AF:FG = 1:1,$$

则求出

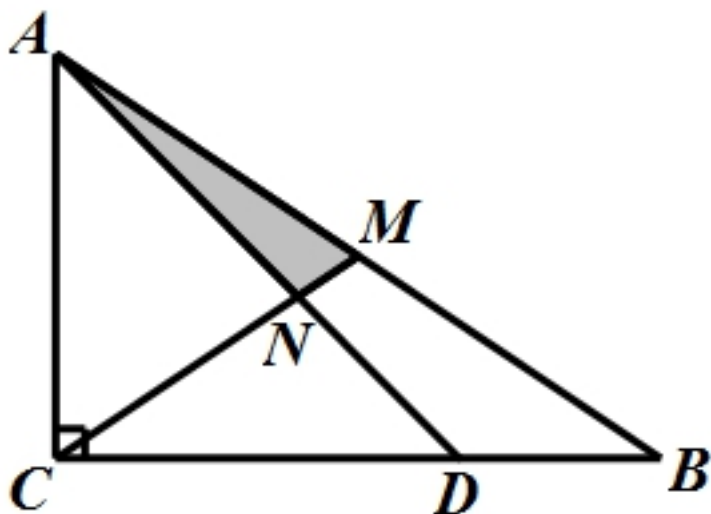
$$S_{\triangle BNG} = \frac{3}{7}S_{\triangle ABG} = \frac{3}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{7},$$

$$S_{\triangle ANG} = \frac{1}{7}S_{\triangle ABG} = \frac{1}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{21}.$$

图中阴影部分面积为

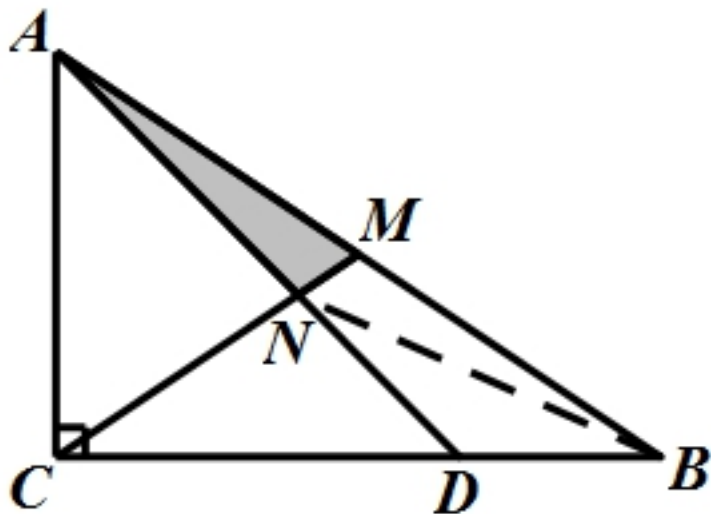
$$\begin{aligned} S_{\triangle MNG} + S_{\triangle NFG} &= \frac{1}{4}S_{\triangle BNG} + \frac{1}{2}S_{\triangle ANG} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{2}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{21} \\ &= \frac{5}{42}. \end{aligned}$$

33. 三角形 ABC 中， C 是直角，已知 $AC = CD$ ， $CD = 2BD$ ， $AM = BM$ ，三角形 AMN （阴影部分）的面积为 1，求三角形 ABC 的面积。



【答案】 10.

【分析】 连接 BN .



根据燕尾模型，

$$\triangle ACN : \triangle ABN = CD : BD = 2 : 1;$$

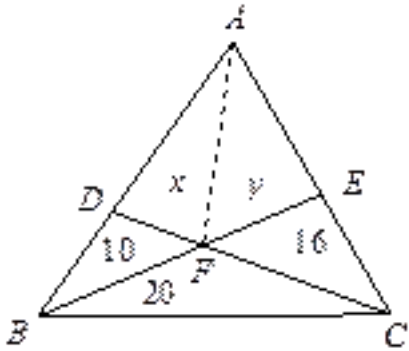
同理

$$\triangle CBN : \triangle CAN = BM : AM = 1 : 1,$$

$$S_{\triangle ACN} : S_{\triangle ABN} : S_{\triangle CBN} = 2 : 1 : 2.$$

设 $\triangle AMN$ 面积为 1 份，则 $\triangle MNB$ 的面积也是 1 份，所以 $\triangle ANB$ 的面积是 $1 + 1 = 2$ 份，而 $\triangle ACN$ 的面积就是 $2 \times 2 = 4$ 份， $\triangle CBN$ 也是 4 份，这样 $\triangle ABC$ 的面积为 $4 + 4 + 1 + 1 = 10$ 份，所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $1 \times 10 \div 1 = 10$.

34. 一块三角形草坪前，工人王师傅正在用剪草机剪草坪。一看到小灵通，王师傅热情地打招呼，说：“小灵通，听说你很会动脑筋，我也想问问你，这块草坪我把它分成东、西、南、北四部分（如图）。修剪西部、东部、南部各需 10 分钟、16 分钟、20 分钟，请你想一想修剪北部需要多少分钟？”



【答案】 44

【分析】 如上图所示，将北部分分成两个三角形，并标上字母.

即有

$$\begin{cases} (10+x):20 = y:16 \\ (16+y):x = 20:10 \end{cases}$$

即有

$$\begin{cases} 5y = 40 + 4x \\ 2x = 16 + y \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = 20 \\ y = 24 \end{cases}$$

所以修剪北部草坪需要

$$20 + 24 = 44(\text{分钟}).$$

35. 如图，已知 D 是 BC 上的中点， E 是 AC 上的中点， F 是 AB 上的点，且如下图，已知 $AF:FB = 3:4$ ， $BD:DC = 8:3$ ，求 $CE:EA$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/637142101143010042>