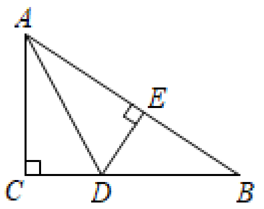
# 专题05 勾股定理及其逆定理（36题9种题型）

## 一、利用勾股定理解直角三角形（共5小题）

1．（2023秋·江苏扬州·八年级校考期末）如图，$Rt\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AD$平分$\angle CAB$，$DE\perp AB$于$E$，若$AC=6$，$BC=8$，$CD=3$．



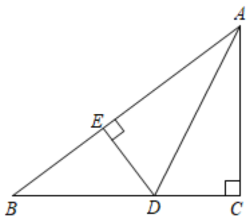

（1）求$DE$的长；

（2）求$\triangle ADB$的面积．

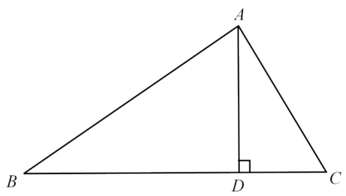
2．（2023秋·江苏连云港·八年级统考期中）如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AD$平分$\angle BAC$交$BC$于点$D$，过点$D$作$DE\perp AB$于点$E$．

（1）求证：$\triangle AED\cong\triangle ACD$；

（2）当$AC=6$，$BC=8$，求$CD$的长．



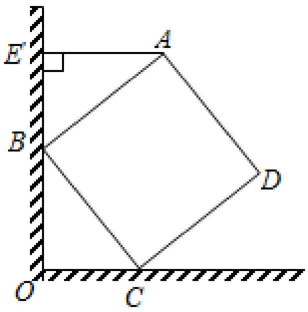

3．（2023秋·江苏南京·八年级校联考期末）如图，在$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$，交$BC$于点$D$，$AB=17$，$AC=10$．




(1)若$CD=6$，则$AD=$，$BD=$；

(2)若$BC=20$，求$CD$的长．

4．（2023秋·江苏淮安·八年级校考期末）如图，一块边长为5的正方形木板$ABCD$斜靠在墙边，$OC\perp OB$，点$A$，$B$，$C$，$D$，$O$在同一平面内，过点$A$作$AE\perp OB$于点$E$．




(1)求证：$\triangle ABE\cong\triangle BCO$；

(2)若 $OC=3$，求 $EO$ 的长．

5．（2023 春·江苏·八年级期中）在$\triangle ABC$中，$AB=25$，$AC=10\sqrt{5}$，$AP$ 垂直直线 $BC$ 于点 $P$．

(1)当 $BC=25$ 时，求 $AP$ 的长；

(2)当 $AP=20$ 时，

①求 $BC$ 的长；

②将$\triangle ACP$沿直线 $AC$ 翻折后得到$\triangle ACQ$，连接 $BQ$，请直接写出$\triangle BCQ$的周长为___________．

**二、勾股定理与网格问题（共 3 小题）**

6．（2022 秋·江苏无锡·八年级无锡市天一实验学校校考期中）在$\triangle ABC$中，$AB$、$BC$、$AC$ 三边的长分别为$\sqrt{5}$，$\sqrt{10}$，$\sqrt{13}$，求这个三角形的面积．小明同学在解答这道题时，先画一个正方形网格（每个小正方形的边长为 1)，再在网格中画出格点$\triangle ABC$（即$\triangle ABC$三个顶点都在小正方形的顶点处)，如图 1 所示．这样不需求$\triangle ABC$的高，而借用网格就能计算出它的面积．

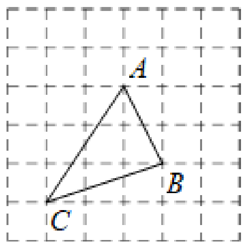


图 1

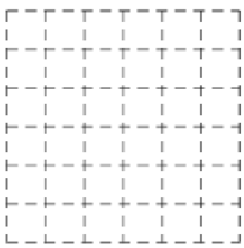
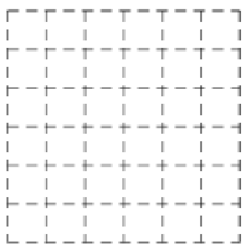
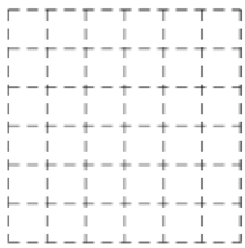


图 2



备用图

(1)$\triangle ABC$的面积为______．

(2)若$\triangle DEF$的三边 $DE$、$EF$、$DF$ 长分别为$\sqrt{8}$，$\sqrt{13}$，$\sqrt{17}$，请在图 2 的正方形网格中画出相应的$\triangle DEF$，并求出$\triangle DEF$的面积为______．

(3)在$\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{10}$，$AC=3$、$BC=1$，以 $AB$ 为边向$\triangle ABC$外作$\triangle ABD$（$D$ 与 $C$ 在 $AB$ 异侧)，使$\triangle ABD$为等腰直角三角形，则线段 $CD$ 的长为______．

7．（2020 秋·江苏泰州·八年级泰兴市洋思中学校考期中）如图，正方形网格中的每个小正方形边长都是 1，每个小格的顶点叫做格点，以格点为顶点分别按下列要求画三角形（用阴影表示)．

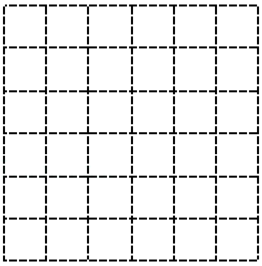


图 $a$

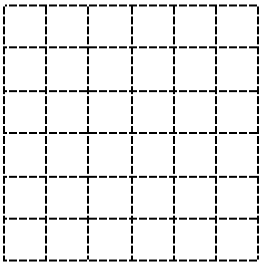


图 $b$

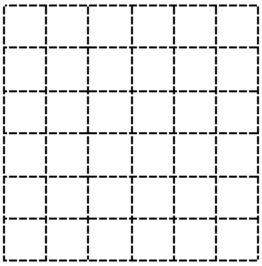


图 $c$

（1）在图（$a$）中，画一个不含直角的三角形，使它的三边长都是有理数；

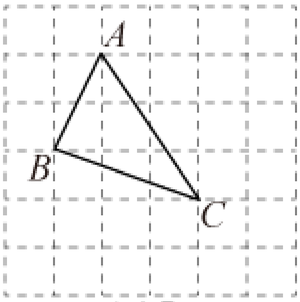
（2）在图（$b$）中，画一个直角三角形，使它的斜边长为$\sqrt{17}$；

（3）在图（$c$）中，画一个直角三角形，使它的斜边长为 5，直角边长都是无理数．

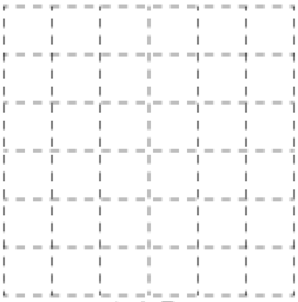
8．（2021 秋·江苏南京·八年级统考期中）问题背景：

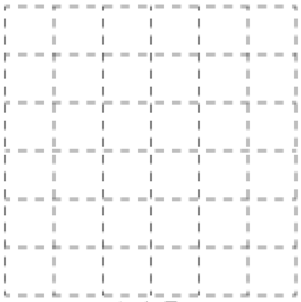
在$\triangle ABC$中，$AB$、$BC$、$AC$三边的长分别为$\sqrt{5}$、$\sqrt{10}$、$\sqrt{13}$，求这个三角形的面积．小明同学在解答这道题时，先建立一个正方形网格（每个小正方形的边长为 1），再在网格中画出格点$\triangle ABC$（即$\triangle ABC$三个顶点都在小正方形的顶点处）．如图①所示．这样不需求$\triangle ABC$的高，而借用网格就能计算出它的面积．

(1)请你将$\triangle ABC$的面积直接填写在横线上；



图①


图②


图③

思维拓展：

(2)我们把上述求$\triangle ABC$面积的方法叫做构图法．若$\triangle ABC$三边的长分别为$\sqrt{2}$、$\sqrt{13}$、$\sqrt{17}$，请利用图②的正方形网格（每个小正方形的边长为 1）画出相应的$\triangle ABC$．并求出它的面积．

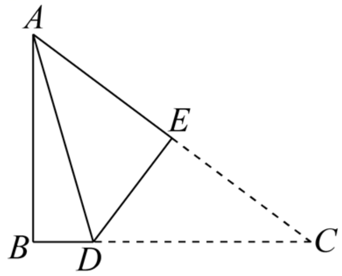
探索创新：

(3)若$\triangle ABC$三边的长分别为$\sqrt{5}\,a$、$2\sqrt{2}\,a$、$\sqrt{17}\,a$（$a>0$），请利用图③的正方形网格（每个小正方形的边长为 $a$）画出相应的$\triangle ABC$，并求出它的面积．

(4)若$\triangle ABC$三边的长分别为$\sqrt{m^2+16n^2}$、$\sqrt{9m^2+4n^2}$、$2\sqrt{m^2+n^2}$（$m>0$，$n>0$，且 $m\neq n$），试运用构图法求出这个三角形的面积．

**三、利用勾股定理解决直角三角形相关问题（共 5 小题）**

9．（2022 秋·江苏徐州·八年级统考期末）如图，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=6$，$BC=8$，将$\triangle DCE$沿$DE$翻折，使点$C$落在点 A 处．



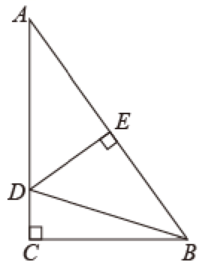
(1)设 $BD=x$，在 $Rt\triangle ABD$ 中，根据勾股定理，可得关于 $x$ 的方程______；

(2)分别求 $DC$、$DE$ 的长．

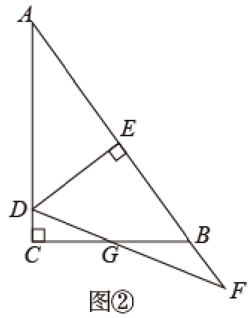
10．（2022秋·江苏苏州·八年级苏州高新区第二中学校考期中）如图 Rt△$ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=8$，$BC=6$，沿 $AB$ 的垂线 $DE$ 折叠△$ABC$，

（1）如图①，若点 $A$ 落在点 $B$ 处，求 $AD$ 的长；

（2）如图②，若点 $A$ 落在 $AB$ 的延长线的点 $F$ 处，$AD$ 折叠后与 $CB$ 交点 $G$，且 $CG=BG$，求 $AD$ 的长．

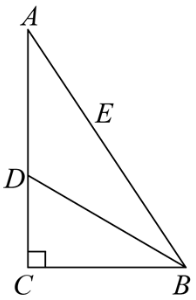


图①

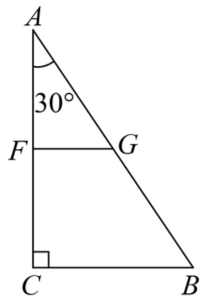


图②

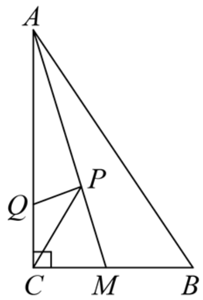
11．（2022秋·江苏徐州·八年级统考期中）如图，在 Rt△$ABC$ 中，$\angle ACB=90°$．



①



②



③

(1)如图①，现将 $\triangle ABC$ 沿 $BD$ 翻折，使点 $C$ 落在斜边 $AB$ 上点 $E$ 处，若 $AC=8\text{cm}$，$BC=6\text{cm}$，求 $CD$ 的长；

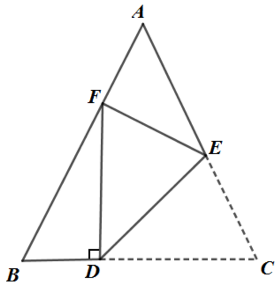
(2)如图②，现将 $\triangle ABC$ 沿直线 $FG$ 翻折，使点 A 落在点 $C$ 处，若 $\angle A=30°$，求证：$AB=2BC$；

(3)如图③，作 $AM$ 平分 $\angle BAC$，动点 $P$ 在 $AM$ 上运动，动点 $Q$ 在 $AC$ 上运动，若 $\angle A=30°$，$AC=6\text{cm}$，则 $CP+PQ$ 的最小值为________cm．

12．（2021秋·江苏徐州·八年级统考期中）如图，折叠等腰三角形纸片 $ABC$，使点 $C$ 落在边 $AB$ 上的点 $F$ 处，折痕为 $DE$．已知 $AB=AC$，$FD\perp BC$．

（1）求证：$\angle AFE=90°$；

（2）如果 $AF=3$，$BF=6$，求 $AE$ 的长．




13．（2020秋·江苏无锡·八年级统考期中）小王剪了两张直角三角形纸片，进行了如下的操作：

操作一：如图1，将Rt△$ABC$沿某条直线折叠，使斜边的两个端点$A$与$B$重合，折痕为$DE$.

（1）如果$AC$＝6cm，$AB$＝10cm，可求得△$ACD$的周长为____cm；

（2）如果∠$CAD$：∠$BAD$＝1：4，可求得∠$B$的度数为____；

操作二：如图2，小王拿出另一张Rt△$ABC$纸片，将直角边$AC$沿直线$AD$折叠，使它落在斜边$AB$上，且与$AE$重合，若$AC$＝9cm，$AB$＝15cm，请求出$CD$的长.

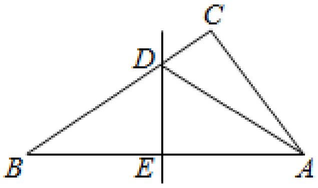



图1

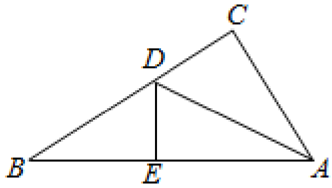



图2

**四、探索勾股定理的证明方法（共3小题）**

14．（2023秋·江苏扬州·八年级统考期末）勾股定理是人类最伟大的十个科学发现之一，西方国家称之为毕达哥拉斯定理．在我国古书《周髀算经》中就有"若勾三，股四，则弦五"的记载，我国汉代数学家赵爽为了证明勾股定理，创制了一幅"弦图"（如图1），后人称之为"赵爽弦图"，流传至今．

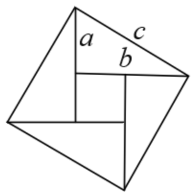



图1

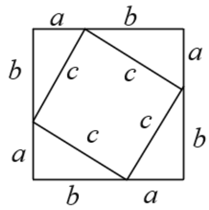



图2

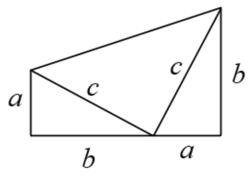



图3

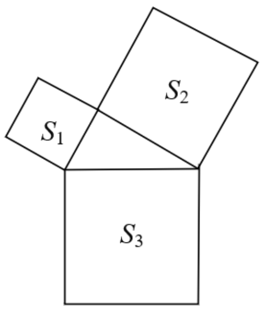



图4

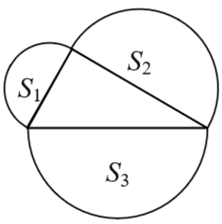



图5

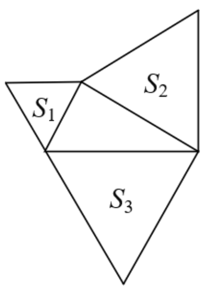



图6

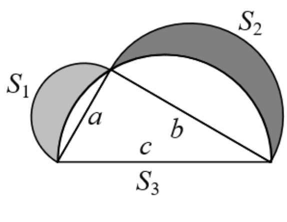



图7

(1)①勾股定理的证明，人们已经找到了400多种方法，请从下列几种常见的证明方法中任选一种来证明该

定理（以下图形均满足证明勾股定理所需的条件）；

②如图 1，大正方形的面积是 17，小正方形的面积是 5，如果将如图 1 中的四个全等的直角三角形按如图 2 的形式摆放，求图 2 中最大的正方形的面积．

(2)如图 4、5、6，以直角三角形的三边为边或直径，分别向外部作正方形、半圆、等边三角形，这三个图形中面积关系满足 $S_1+S_2=S_3$ 的有______个；

(3)如图 7 所示，分别以直角三角形三边为直径作半圆，设图中两个月形图案（图中阴影部分）的面积分别为 $S_1$、$S_2$，直角三角形面积为 $S_3$，请判断 $S_1$、$S_2$、$S_3$ 的关系______．

15．（2022 秋·江苏·八年级期中）勾股定理神秘而美妙，它的证法多样，其巧妙各有不同，其中的“面积法”给了小聪以灵感，他惊喜的发现：当两个全等的直角三角形如图 1 或图 2 摆放时，都可以用“面积法”来证明，下面是小聪利用图 1 证明勾股定理的过程：

将两个全等的直角三角形按图 1 所示摆放，其中∠$DAB$＝90°，求证：$a^2+b^2=c^2$．

证明：连接 $DB$，过点 $D$ 作 $DF\perp BC$ 交 $BC$ 的延长线于点 $F$，则 $DF=EC=b-a$．

$\because S_{\text{四边形}ADCB}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab$

又$\because S_{\text{四边形}ADCB}=S_{\triangle ADB}+S_{\triangle DBC}=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}a(b-a)$

$\therefore \frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}a(b-a)$

$\therefore a^2+b^2=c^2$

请参照上述证法，利用图 2 完成下面的证明：

将两个全等的直角三角形按图 2 所示摆放，其中∠$DAB$＝90°．求证：$a^2+b^2=c^2$．

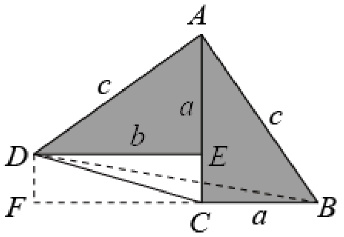


图1

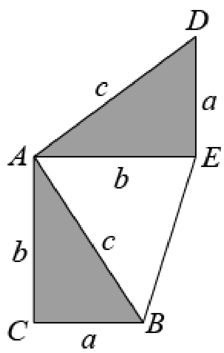
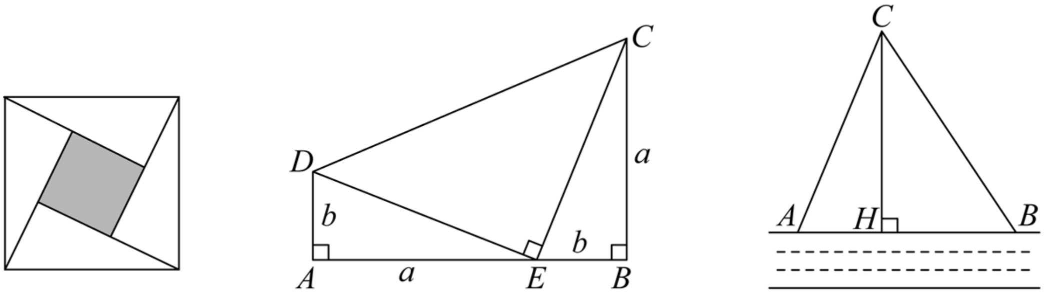


图2

16．（2022 秋·江苏扬州·八年级统考期中）著名的赵爽弦图（如图①，其中四个直角三角形较大的直角边长都为 $a$，较小的直角边长都为 $b$，斜边长都为 $c$），大正方形的面积可以表示为 $c^2$），也可以表示为 $4\times\frac{1}{2}ab+(a-b)^2$，由此推导出重要的勾股定理：如果直角三角形两条直角边长为 $a$，$b$，斜边长为 $c$，则 $a^2+b^2=c^2$．



图①　　　　　　　图②　　　　　　　图③

(1)图②为美国第二十任总统伽菲尔德的“总统证法”，请你利用图②推导勾股定理.

(2)如图③，在一条东西走向河流的一侧有一村庄 $C$，河边原有两个取水点 $A$，$B$，其中 $AB=AC$，由于某种原因，由 $C$ 到 $A$ 的路现在已经不通，该村为方便村民取水决定在河边新建一个取水点 $H$（$A$、$H$、$B$ 在同一条直线上），并新修一条路 $CH$，且 $CH\perp AB$．测得 $CH=1.2$ 千米，$HB=0.9$ 千米，求新路 $CH$ 比原路 $CA$ 少多少千米？

(3)在第（2）问中若 $AB\neq AC$ 时，$CH\perp AB$，$AC=4$，$BC=5$，$AB=6$，设 $AH=x$，求 $x$ 的值.

**五、利用勾股定理证明线段的平方关系（共 5 小题）**

17．（2021 秋·江苏苏州·八年级统考期末）三国时代东吴数学家赵爽（字君卿，约公元 3 世纪）在《勾股圆方图注》一书中用割补的方法构造了“弦图”（如图 1，并给出了勾股定理的证明．已知，图 2 中涂色部分是直角边长为 $a,b$，斜边长为 $c$ 的 4 个直角三角形，请根据图 2 利用割补的方法验证勾股定理.

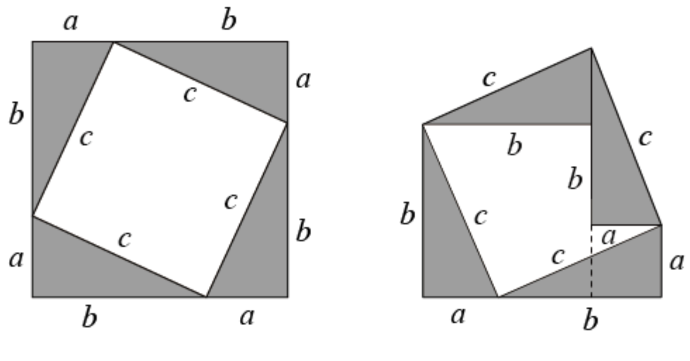
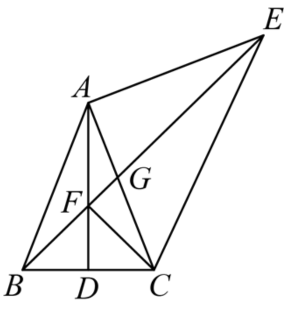


图1　　　　　　　图2

18．（2022 秋·江苏苏州·八年级校考期中）在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$D$ 是 $BC$ 的中点，以 $AC$ 为腰向外作等腰直角 $\triangle ACE$，$\angle EAC=90^\circ$，连接 $BE$，交 $AD$ 于点 $F$，交 $AC$ 于点 $G$.




(1)若 $\angle BAC=50^\circ$，求 $\angle AEB$ 的度数；

(2)求证：$\angle AEB=\angle ACF$；

(3)求证：$EF^2+BF^2=2AC^2$.

19．（2023春·江苏·八年级期中）数学兴趣小组活动时，提出了如下问题：如图1，在$\triangle ABC$中若$AB=5$，$AC=3$，求$BC$边上的中线$AD$的取值范围.

解决方法：延长$AD$到$E$．使得$DE=AD$．再连接$BE$（或将$ACD$绕点$D$逆时针旋转$180°$得到$\triangle EBD$）．把$AB$，$AC$，$2AD$集中在$\triangle ABE$中，利用三角形的三边关系可得$2<AE<8$，则$1<AD<4$.

感悟：解题时，条件中若出现“中点”“中线”字样，可以考虑构造以中点为对称中心的中心对称图形，把分散的已知条件和所求证的结论集中到同一个三角形中.

迁移应用：请参考上述解题方法，证明下列命题：

如图2，在$\triangle ABC$中，$D$是$BC$边上的中点，$DE\perp DF$，$DE$交$AB$于点$E$，$DF$交$AC$于点$F$，连接$EF$.

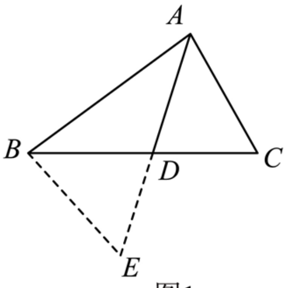


图1

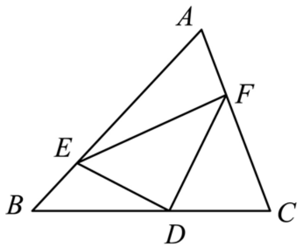


图2

(1)求证：$BE+CF>EF$；

(2)若$\angle A=90°$，探索线段$BE$，$CF$，$EF$之间的等量关系，并加以证明.

20．（2022秋·江苏淮安·八年级统考期中）在$\triangle ABC$中，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$．若$\angle C$为直角，则$a^2+b^2=c^2$；若$\angle C$为锐角或钝角，则$a^2+b^2$与$c^2$之间有怎样的大小关系呢？我们一起进行探究吧.

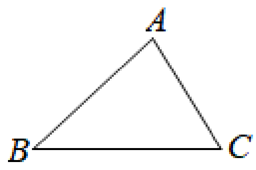


图1

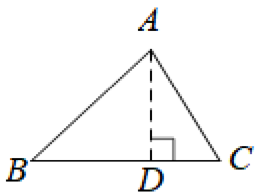


图2

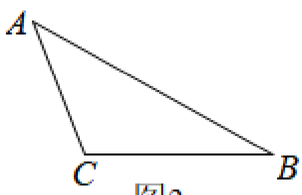


图3

(1)阅读并填空：如图1，若$\angle C$为锐角，则$a^2+b^2>c^2$；

证明：如图2，过点A作$AD\perp BC$于点$D$，则$BD=BC-CD=a-CD$.

在Rt$\triangle ABD$中，$AD^2=AB^2-BD^2$，

在Rt$\triangle ACD$中，$AD^2=$ __________，

$\therefore$__________.

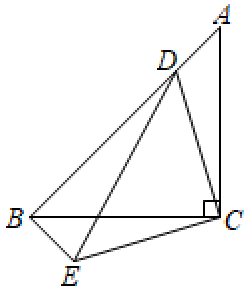
即$c^2-(a-CD)^2=b^2-CD^2$，

$\therefore a^2+b^2-c^2=2a\cdot CD$.

$\because a>0$，$CD>0$，$\therefore a^2+b^2-c^2>0$，$\therefore a^2+b^2>c^2$.

(2)解答问题：如图3，若$\angle C$为钝角，试推导$a^2+b^2$与$c^2$的大小关系.

21．（2022秋·江苏苏州·八年级苏州高新区第二中学校考期中）如图，在等腰$\Delta ABC$中，$\angle ACB=90°$，点$D$为边$AB$上一点，连接$CD$，将$CD$绕点$C$逆时针旋转$90°$得到线段$CE$，连接$DE$，$BE$．

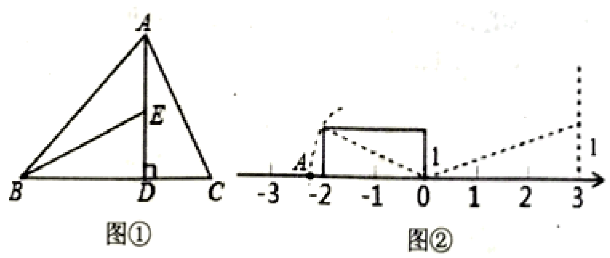



(1)求证：$AD=BE$；

(2)当$CE=\sqrt{2}$时，求$AD^2+BD^2$的值.

**六、勾股定理云无理数（共4小题）**

22．（2020秋·江苏宿迁·八年级校考期末）阅读下列材料，并回答问题.事实上，在任何一个直角三角形中，两条直角边的平方之和一定等于斜边的平方，这个结论就是著名的勾股定理.请利用这个结论，完成下面活动:

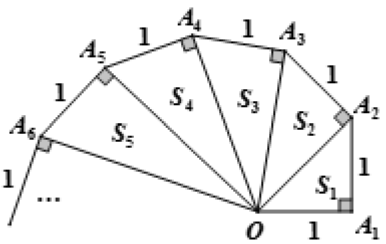



(1) 一个直角三角形的两条直角边分别为5、12，那么这个直角三角形斜边长为____；

(2) 如图①，$AD\perp BC$于$D, AD=BD, AC=BE, AC=10, DC=6$，求$BD$的长度；

(3) 如图②，点A在数轴上表示的数是____请用类似的方法在图2数轴上画出表示数$-\sqrt{10}$的$B$点(保留痕迹).

23．（2020春·江苏盐城·八年级统考期中）细心观察图形，认真分析各式，然后解答问题.




$OA_2^2=1+\left(\sqrt{1}\right)^2=2$，$S_1=\dfrac{\sqrt{1}}{2}$；

$OA_3^2=1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2=3$，$S_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

$OA_4^2=1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=4$，$S_3=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdots$

（1）（直接写出答案）$OA_{10}$＝__，并用含有 $n$（$n$ 是正整数）的等式表示上述变规律：$OAn^2$＝__；$Sn$＝__.

（2）若一个三角形的面积是$\sqrt{5}$，计算说明它是第几个三角形？

24．（2023 春·江苏淮安·八年级统考期末）勾股定理是人类早期发现并证明的重要数学定理之一，是用代数思想解决几何问题的最重要的工具之一，它不但因证明方法层出不穷吸引着人们，更因为应用广泛而使人着迷．

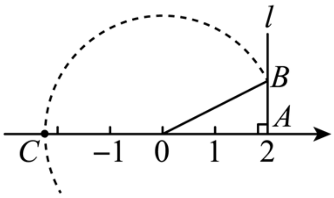



图1

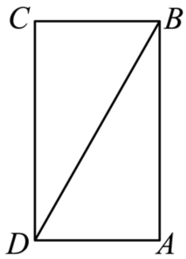


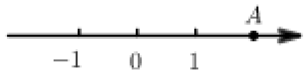

图2

(1)应用场景 1——在数轴上画出表示无理数的点．如图 1，在数轴上找出表示 2 的点 $A$，过点 $A$ 作直线 $l$ 垂直于 $OA$，在 $l$ 上取点 $B$，使 $AB=1$，以原点 $O$ 为圆心，$OB$ 为半径作弧，则弧与数轴负半轴的交点 $C$ 表示的数是__________；

(2)应用场景 2——解决实际问题．如图 2，有一个小朋友拿着一根竹竿要通过一个长方形的门，如果把竹竿竖放就比门高出 2 尺，斜放就恰好等于门的对角线（$BD$），已知门宽 6 尺，求竹竿长．

.

25．（2022 秋·江苏盐城·八年级校考期末）如图，点 A 是数轴上表示实数$a$的点．

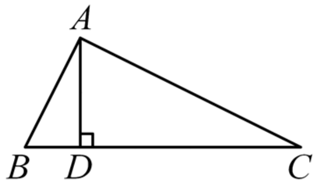



（1）用直尺和圆规在数轴上作出表示实数的$\sqrt{2}$的点$P$；（保留作图痕迹，不写作法）

（2）利用数轴比较$\sqrt{2}$和$a$的大小，并说明理由．

**七、判断三角形能否构成直角三角形（共 3 小题）**

26．（2023 秋·江苏·八年级统考期末）如图，$\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$，垂足为 $D$，$BD=1$，$AD=2$，$CD=4$．

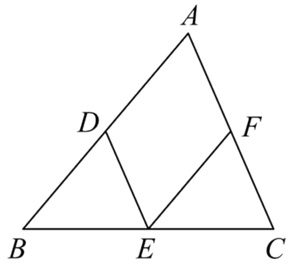



(1)求证：$\angle BAC=90°$；

(2)点 $P$ 为 $BC$ 上一点，连接 $AP$，若$\triangle ABP$ 为等腰三角形，求 $BP$ 的长．

27．（2023 春·江苏南京·八年级南京外国语学校仙林分校校考期中）如图，点 $D$、$E$、$F$ 分别是$\triangle ABC$

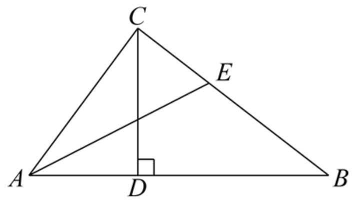
各边中点．




(1)求证：四边形 $ADEF$ 是平行四边形．

(2)若 $AB=10, AC=6, BC=8$，求四边形 $ADEF$ 的周长和面积．

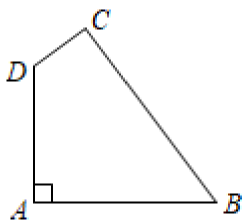
28．（2023 秋·江苏泰州·八年级统考期末）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$CD \perp AB$，垂足为 D，$AE$ 平分 $\angle CAB$ 交 $CB$ 于点 E，$AD=3, BD=\frac{16}{3}, CD=4$．




(1)求证：$\angle ACB=90°$；

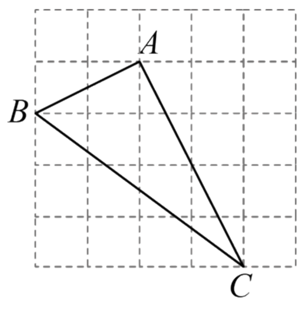
(2)求点 $E$ 到 $AB$ 边的距离．

29．（2023 秋·江苏南京·八年级统考期中）如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=20$，$AD=15$，$CD=7$，$BC=24$，$\angle A=90°$，求证：$\angle C$=90°．




**八、在网格中判断直角三角形（共 2 小题）**

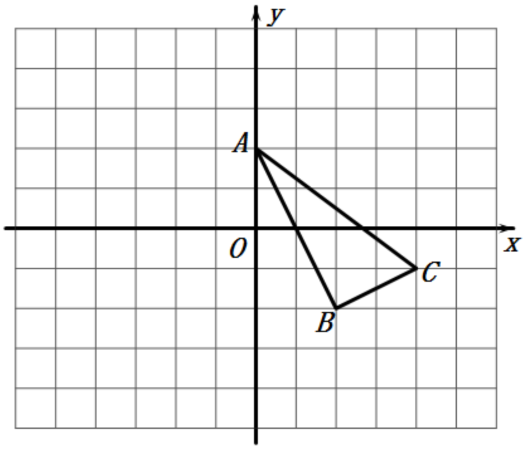
30．（2023 春·江苏南通·八年级统考期中）如图，$\triangle ABC$ 的三个顶点均在正方形网格的格点上，若小正方形的边长为 1，请你运用所学的知识解决下列问题：




(1) $\triangle ABC$ 的面积为__________；

(2)判断$\triangle ABC$的形状，并说明理由．

31．（2023春·江苏苏州·八年级期中）如图，在平面直角坐标系$xOy$中，$\triangle ABC$的三个顶点的坐标分别是$A(0,2)$，$B(2,-2)$，$C(4,-1)$．




（1）在图中作出$\triangle ABC$关于$y$轴对称的图形$\triangle A_1B_1C_1$；点$C_1$的坐标为______；

（2）判断$\triangle ABC$的形状并说明理由；

（3）在图中找一点$D$，使$AD=\sqrt{26}$，$CD=\sqrt{17}$．

**九、勾股定理逆定理拓展（共5小题）**

32．（2023秋·江苏扬州·八年级统考期末）如图，在$4\times4$的正方形网格中，每个小格的顶点叫做格点，以格点为顶点分别按下列要求画三角形．

**图1**

**图2**

**图3**

（1）在图①中，画一个直角三角形，使它的三边长都是有理数；

（2）在图②中，画一个直角三角形，使它的一边长是有理数，另外两边长是无理数；

（3）在图③中，画一个直角三角形，使它的三边长都是无理数．

33．（2019秋·江苏宿迁·八年级统考期中）△ABC的三边长分别是a、b、c，且$a=n^2-1$，$b=2n$，$c=n^2+1$．

（1）判断三角形的形状；

（2）若以边b为直径的半圆面积为2π，求△ABC的面积；

（3）若以边a、b为直径的半圆面积分别为p、q，求以边c为直径的半圆面积．（用p、q表示）

34．（2020秋·江苏常州·八年级统考期末）把三根长为3cm、4cm和5cm

的细木棒首尾相连，能搭成一个直角三角形.

(1)如果把这三根细木棒的长度分别扩大为原来的 a 倍（a>1），那么所得的三根细木棒能不能搭成一个直角三角形，为什么？

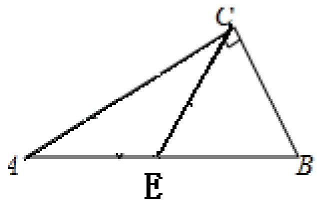
(2)如果把这三根细木棒的长度分别延长 x cm（x>0），那么所得的三根细木棒还能搭成一个三角形吗？为什么？如果能，请判断这个三角形的形状（锐角三角形、直角三角形还是钝角三角形），并说明理由.

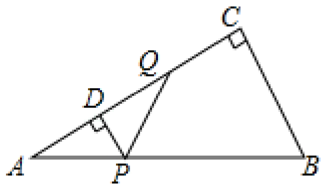
35.（2019 秋·江苏无锡·八年级校考期中）如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，取斜边 AB 的中点 E，易得△BCE 是等边三角形，从而得到"直角三角形中，30°角所对的直角边等于斜边的一半"利用这个结论解决问题：

如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$AB=4$，若动点 $P$ 从点 $A$ 出发，沿 $AB$ 以每秒 2 个单位长度的速度向终点 $B$ 运动．过点 $P$ 作 $PD\perp AC$ 于点 $D$（点 $P$ 不与点 A．$B$ 重合），作$\angle DPQ=60°$，边 $PQ$ 交射线 $DC$ 于点 $Q$．设点 $P$ 的运动时间为 $t$ 秒．

（1）用含 $t$ 的代数式表示线段 $DC$ 的长；

（2）当线段 $PQ$ 的垂直平分线经过$\triangle ABC$ 一边中点时，直接写出 $t$ 的值．



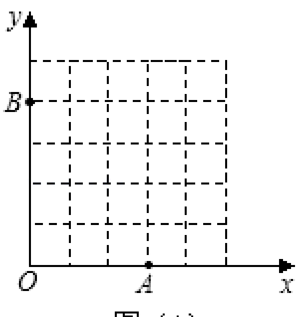




36.（2020 秋·江苏无锡·八年级统考期中）我们给出如下定义：若一个四边形中存在相邻两边的平方和等于一条对角线的平方，则称这个四边形为勾股四边形，这两条相邻的边称为这个四边形的勾股边．

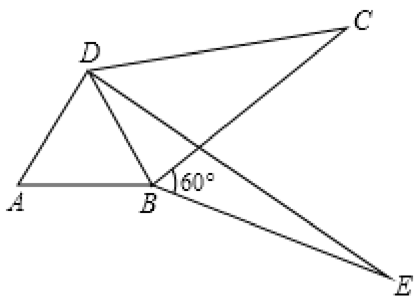
（1）写出你所知道的特殊四边形中是勾股四边形的两种图形的名称____，____．

（2）如图（1），请你在图中画出以格点为顶点，OA、OB 为勾股边，且对角线相同的所有勾股四边形 OAMB．

（3）如图（2），以$\triangle ABC$ 边 AB 作如图正三角形 ABD，∠CBE＝60°，且 BE＝BC，连接 DE、DC，∠DCB＝30°．求证：$DC^2+BC^2=AC^2$，即四边形 ABCD 是勾股四边形．




图（1）

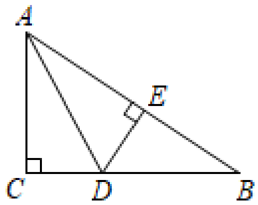



图（2）

# 专题05 勾股定理及其逆定理（36题9种题型）

## 一、利用勾股定理解直角三角形（共5小题）

1．（2023秋·江苏扬州·八年级校考期末）如图，$Rt\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AD$平分$\angle CAB$，$DE\perp AB$于$E$，若$AC=6$，$BC=8$，$CD=3$．




（1）求$DE$的长；

（2）求$\triangle ADB$的面积．

【答案】（1）$DE=3$；（2）$S_{\triangle ADB}=15$．

【分析】（1）根据角平分线性质得出$CD=DE$，代入求出即可；

（2）利用勾股定理求出$AB$的长，然后计算$\triangle ADB$的面积．

【详解】（1）∵$AD$平分$\angle CAB$，$DE\perp AB$，$\angle C=90°$，

∴$CD=DE$，

∵$CD=3$，

∴$DE=3$；

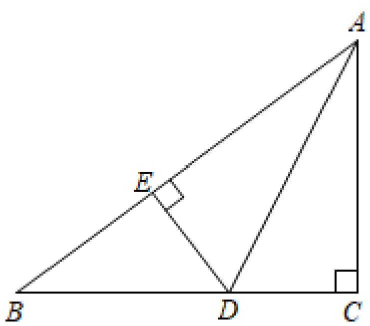
（2）在$Rt\triangle ABC$中，由勾股定理得：$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

∴$\triangle ADB$的面积为$S_{\triangle ADB}=\frac{1}{2}AB\cdot DE=\frac{1}{2}\times 10\times 3=15$．

2．（2023秋·江苏连云港·八年级统考期中）如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AD$平分$\angle BAC$交$BC$于点$D$，过点$D$作$DE\perp AB$于点$E$．

（1）求证：$\triangle AED\cong\triangle ACD$；

（2）当$AC=6$，$BC=8$，求$CD$的长．




【答案】（1）见解析；（2）3

【分析】（1）根据$AD$平分$\angle BAC$得$\angle BAD=\angle CAD$，根据$DE\perp AB$得$\angle AED=90°$，用$AAS$即可得证明

$\triangle AED\cong\triangle ACD$；

（2）设 $CD=x$，由（1）可知$\triangle AED\cong\triangle ACD$，则 $AC=AE=6$，$CD=DE=x$，$BD=BC-CD=8-x$，根据勾股定理得 $AB=10$，则 $BE=4$，根据勾股定理得 $4^2+x^2=(8-x)^2$，即可得．

【详解】（1）$\because AD$ 平分$\angle BAC$，

$\therefore\angle BAD=\angle CAD$，

$\because DE\perp AB$，

$\therefore\angle AED=90°$，

$\because$在$\triangle AED$ 与$\triangle ACD$ 中，

$$\begin{cases}\angle AED=\angle C\\ \angle BAD=\angle CAD\\ AD=AD\end{cases}$$

$\therefore\triangle AED\cong\triangle ACD$（$AAS$）

（2）设 $CD=x$，

由（1）可知$\triangle AED\cong\triangle ACD$，

$\therefore AC=AE=6$，$CD=DE=x$，$BD=BC-CD=8-x$，

$\because$在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，

$\therefore AB2=AC^2+BC2=6^2+82=100$，

即 $AB=10$ 或 $AB=-10$（舍），

$\therefore BE=AB-AE=10-6=4$，

$\because$在$\triangle BED$ 中，$\angle BED=90°$，根据勾股定理，

$BE2+ED^2=BD2$，

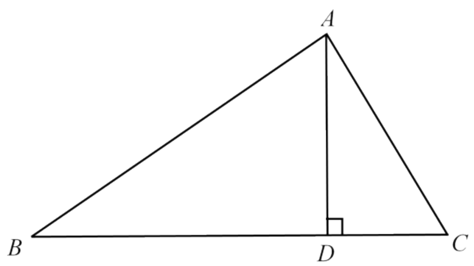
即 $4^2+x^2=(8-x)^2$，

解得 $x=3$，

即 $CD=3$．

【点睛】本题考查了全等三角形的判定，勾股定理，解题的关键是掌握这些知识点．

3．（2023 秋·江苏南京·八年级校联考期末）如图，在$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$，交$BC$于点$D$，$AB=17$，$AC=10$．




(1)若$CD=6$，则$AD=$，$BD=$；

(2)若$BC=20$，求$CD$的长．

【答案】(1)8；15

(2)$\frac{211}{40}$

【分析】（1）先在$\mathrm{Rt}\triangle ADC$中，由勾股定理求出$AD$，再在$\mathrm{Rt}\triangle ADB$中，由勾股定理求出$BD$即可；

（2）由勾股定理得出$AB^2-BD^2=AC^2-CD^2$，即$AB^2-\left(BC-CD\right)^2=AC^2-CD^2$，代入条件计算即可．

【详解】（1）解：$\because AD\perp BC$，

$\therefore \angle ADB=\angle ADC=90°$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ADC$中，由勾股定理，得

$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ADB$中，由勾股定理，得

$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{17^2-8^2}=15$；

（2）解：在$\mathrm{Rt}\triangle ADC$中，由勾股定理，得

$AD^2=AC^2-CD^2$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ADB$中，由勾股定理，得

$AD^2=AB^2-BD^2$，

$\therefore AB^2-BD^2=AC^2-CD^2$，即$AB^2-\left(BC-CD\right)^2=AC^2-CD^2$

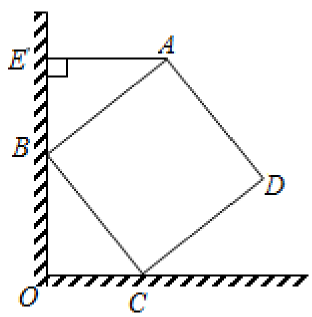
$\because AB=17$，$AC=10$，$BC=20$，

$\therefore 17^2-\left(20-CD\right)^2=10^2-CD^2$，

$\therefore CD=\frac{211}{40}$．

【点睛】本题考查勾股定理，熟练掌握勾股定理是解题的关键．

4．（2023秋·江苏淮安·八年级校考期末）如图，一块边长为5的正方形木板$ABCD$斜靠在墙边，$OC\perp OB$，点$A$，$B$，$C$，$D$，$O$在同一平面内，过点$A$作$AE\perp OB$于点$E$．




(1)求证：$\triangle ABE\cong\triangle BCO$；

(2)若$OC=3$，求$EO$的长．

【答案】(1)见解析

(2)7

【分析】（1）由“$AAS$”可证$\triangle ABE\cong\triangle BCO$；

（2）由勾股定理可得 $BO=4$，即可求解．

【详解】（1）解：证明：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AB=BC$，$\angle ABC=90°$，

∵$OC\perp OB$，$AE\perp OB$，

∴$\angle AEB=\angle BOC=90°$，

∴$\angle ABE+\angle BAE=90°=\angle ABE+\angle OBC$，

∴$\angle BAE=\angle OBC$，

在△$ABE$ 和△$BCO$ 中，

$$\begin{cases}\angle BAE=\angle OBC\\ \angle AEB=\angle BOC\\ AB=BC\end{cases},$$

∴△$ABE$≌△$BCO$；

（2）∵△$ABE$≌△$BCO$，

∴$BE=OC=3$，

在 Rt△$BOC$ 中，$BO=\sqrt{BC^2-OC^2}=4$，

∴$OE=OB+BE=7$．

【点睛】本题考查了正方形的性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理，证明三角形全等是解题的关键．

5．（2023 春·江苏·八年级期中）在$\triangle ABC$中，$AB=25$，$AC=10\sqrt{5}$，$AP$ 垂直直线 $BC$ 于点 $P$．

(1)当 $BC=25$ 时，求 $AP$ 的长；

(2)当 $AP=20$ 时，

①求 $BC$ 的长；

②将△$ACP$ 沿直线 $AC$ 翻折后得到$\triangle ACQ$，连接 $BQ$，请直接写出△$BCQ$ 的周长为____________．

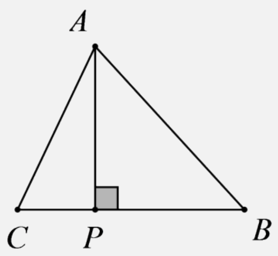
【答案】(1)20

(2)①25 或 5；②$5\sqrt{41}+35$ 或 $\sqrt{65}+15$

【分析】（1）根据双勾股列方程即可求出 $CP$，进而求得 $AP$ 的长；

（2）分情况讨论当$\triangle ABC$是锐角三角形时，当$\triangle ABC$是钝角三角形时，分别求出 $BC$ 的长和△$BCQ$ 的周长．

【详解】（1）如图：




$\because AP \perp BC$

$\therefore AP^2 = AB^2 - BP^2$， $AP^2 = AC^2 - CP^2$，

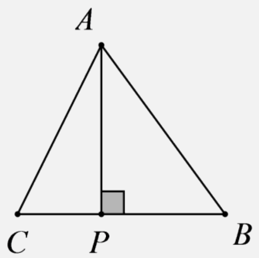
设 $CP = x$， 则 $BP = BC - PC = 25 - x$

$\therefore (10\sqrt{5})^2 - x^2 = 25^2 - (25 - x)^2$，

解得： $x = 10$

$\therefore AP = \sqrt{25^2 - (25 - 10)^2} = 20$

（2）①当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形时，



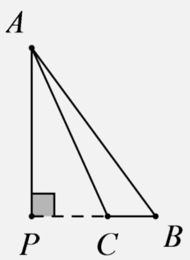

当 $AP = 20$ 时，

$BP = \sqrt{AB^2 - AP^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$；

$CP = \sqrt{AC^2 - AP^2} = \sqrt{(10\sqrt{5})^2 - 20^2} = 10$；

$\therefore BC = BP + PC = 25$

当 $\triangle ABC$ 是钝角三角形时，如图：



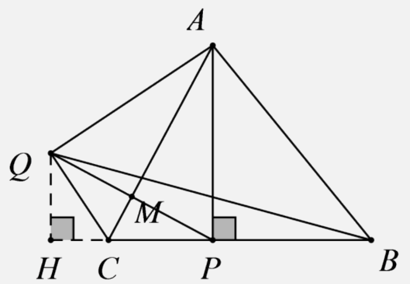

$\because AB = 25 > AC = 10\sqrt{5}$， $AP = 20$

$\therefore PC = \sqrt{AC^2 - AP^2} = 10$， $BP = \sqrt{AB^2 - AP^2} = 15$

$\therefore BC = BP - PC = 5$

综上所述： $BC = 25$ 或 5

②当$\triangle ABC$是锐角三角形时，由①知，$AB=BC=25$，$BP=15$，$PC=10$，如图，$AC$与$BP$交于$M$ $M$过$Q$点作$QH\perp BC$，




由折叠可知：$QC=PC=10$，$PQ\perp AC$，$PQ=2MP$

$\therefore S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}CP\cdot AP=\frac{1}{2}AC\cdot MP$，

$\therefore \frac{1}{2}\times10\times20=\frac{1}{2}\times10\sqrt{5}\cdot MP$，

$\therefore MP=4\sqrt{5}$，

$\therefore PQ=2MP=8\sqrt{5}$，

设$HC=x$，则$HP=PC+HC=10+x$，

$\because HQ^2=QC^2-HC^2=PQ^2-HP^2$

$\therefore 10^2-x^2=(8\sqrt{5})^2-(10+x)^2$，

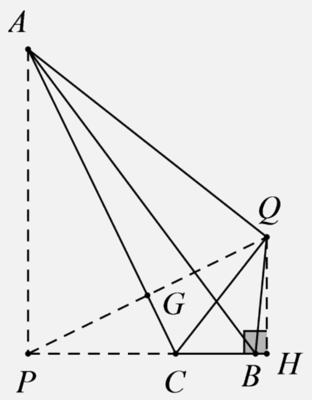
解得：$x=6$，

$HQ=\sqrt{10^2-6^2}=8$

$\therefore BQ=\sqrt{HB^2+HQ^2}=\sqrt{(25+6)^2+8^2}=5\sqrt{41}$

$\therefore \triangle BCQ$的周长为：$BQ+BC+CQ=BQ+BC+PC=5\sqrt{41}+35$

当$\triangle ABC$是钝角三角形时，如图，




同理可得：$CQ=PC=10$，$PQ=2MP=8\sqrt{5}$，$BC=5$，$CQ=PC=10$

设$HC=x$，则$HP=PC+HC=10+x$，

$\because HQ^2=QC^2-HC^2=PQ^2-HP^2$

$\therefore 10^2-x^2=(8\sqrt{5})^2-(10+x)^2$，

解得： $x=6$，

$\therefore HB=CH-CB=6-5=1$， $HQ=\sqrt{10^2-6^2}=8$

$\therefore BQ=\sqrt{HB^2+HQ^2}=\sqrt{1^2+8^2}=\sqrt{65}$

$\therefore \triangle BCQ$ 的周长为： $BQ+BC+CQ=BQ+BC+PC=\sqrt{65}+15$

综上所述： $\triangle BCQ$ 的周长为 $5\sqrt{41}+35$ 或 $\sqrt{65}+15$ .

【点睛】本题考查等积法求高，双勾股定理的求直角三角形边长，解题的关键是在做题时注意分类讨论.

**二、勾股定理与网格问题（共 3 小题）**

6.（2022 秋·江苏无锡·八年级无锡市天一实验学校校考期中）在 $\triangle ABC$ 中， $AB$ 、 $BC$ 、 $AC$ 三边的长分别为 $\sqrt{5}$， $\sqrt{10}$， $\sqrt{13}$，求这个三角形的面积．小明同学在解答这道题时，先画一个正方形网格（每个小正方形的边长为 1），再在网格中画出格点 $\triangle ABC$ （即 $\triangle ABC$ 三个顶点都在小正方形的顶点处），如图 1 所示．这样不需求 $\triangle ABC$ 的高，而借用网格就能计算出它的面积．

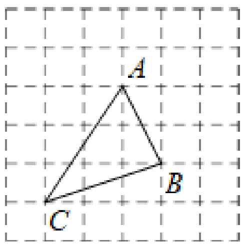


图 1

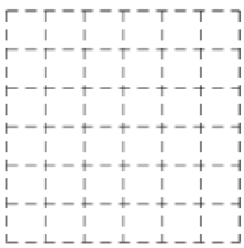
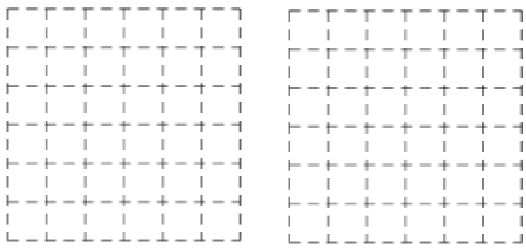


图 2


备用图

(1) $\triangle ABC$ 的面积为______．

(2)若 $\triangle DEF$ 的三边 $DE$ 、 $EF$ 、 $DF$ 长分别为 $\sqrt{8}$， $\sqrt{13}$， $\sqrt{17}$，请在图 2 的正方形网格中画出相应的 $\triangle DEF$，并求出 $\triangle DEF$ 的面积为______．

(3)在 $\triangle ABC$ 中， $AB=\sqrt{10}$， $AC=3$、 $BC=1$，以 $AB$ 为边向 $\triangle ABC$ 外作 $\triangle ABD$ （$D$ 与 $C$ 在 $AB$ 异侧），使 $\triangle ABD$ 为等腰直角三角形，则线段 $CD$ 的长为______．

【答案】(1) $\frac{7}{2}$；

(2)图见解析，5；

(3) $2\sqrt{2}$ .

【分析】（1）利用割补法求 $\triangle ABC$ 的面积即可；

（2）利用割补法求 $\triangle DEF$ 的面积即可；

（3）画出符合题意的图形，运用勾股定理即可解决问题．

【详解】（1）解：如图：将 $\triangle ABC$ 填补成梯形 $BCDE$，

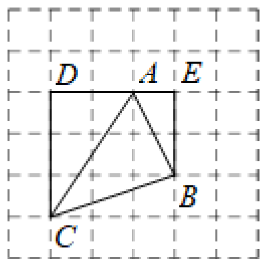


图 1

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times(2+3)\times3-\frac{1}{2}\times1\times2-\frac{1}{2}\times2\times3=\frac{7}{2}$.

故答案为：$\frac{7}{2}$

（2）解：$\triangle DEF$ 如图所示：

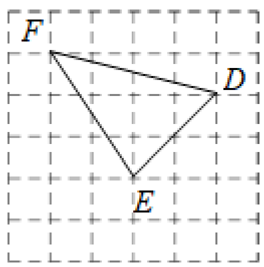


图 2

同（1）中的方法，将 $\triangle DEF$ 填补成梯形 $FGHD$，

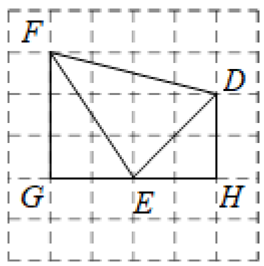


图 2

$\therefore S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}\times(2+3)\times4-\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times2\times3=5$.

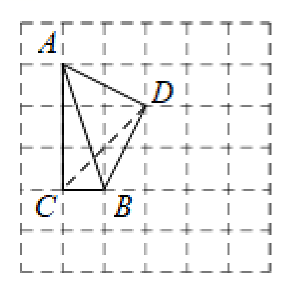
故答案为：5

（3）解：$\because AB=\sqrt{10}$，$AC=3$、$BC=1$，

$\therefore AB^2=AC^2+BC^2$，即 $\triangle ABC$ 是直角三角形，

$\because D$ 与 $C$ 在 $AB$ 异侧，

$\therefore$点 $D$ 如图：




此时 $AD=BD=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$AB^2=AD^2+BD^2=\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(\sqrt{10}\right)^2$，

$\therefore CD=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$．

故答案为：$2\sqrt{2}$

【点睛】本题考查网格问题，解题的关键是掌握割补法求三角形面积，以及勾股定理，结合图形进行求解．

7．（2020秋·江苏泰州·八年级泰兴市洋思中学校考期中）如图，正方形网格中的每个小正方形边长都是1，每个小格的顶点叫做格点，以格点为顶点分别按下列要求画三角形（用阴影表示）．

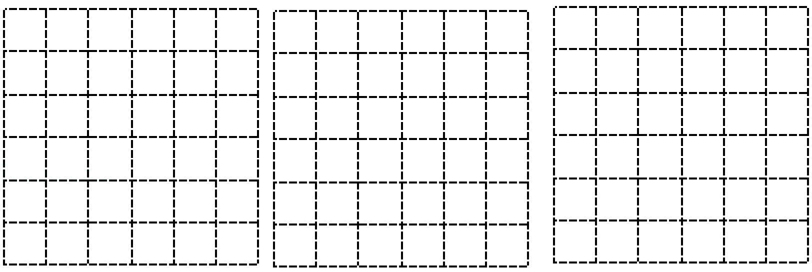


图 $a$　　　　图 $b$　　　　图 $c$

（1）在图（$a$）中，画一个不含直角的三角形，使它的三边长都是有理数；

（2）在图（$b$）中，画一个直角三角形，使它的斜边长为$\sqrt{17}$；

（3）在图（$c$）中，画一个直角三角形，使它的斜边长为5，直角边长都是无理数．

【答案】（1）见解析；（2）见解析；（3）见解析．

【分析】（1）画一个腰长为5，底边长为6的等腰三角形即可；

（2）画一个直角边长分别是4和1的直角三角形即可；

（3）画一个直角边长分别是$\sqrt{5}$和$\sqrt{20}$的直角三角形即可．

【详解】（1）如图（a）中△ABC即为所求作的图形；

（2）如图（b）中△ABC即为所求作的图形；

（3）如图（c）中△ABC即为所求作的图形．

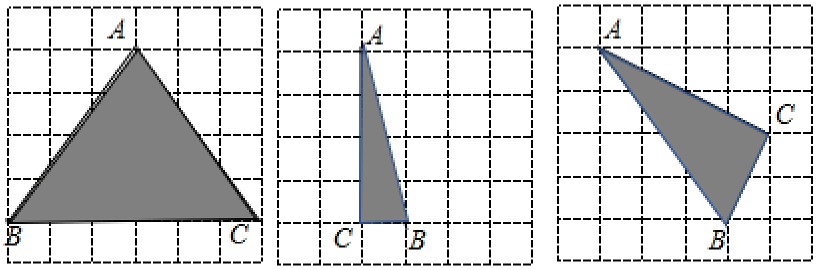


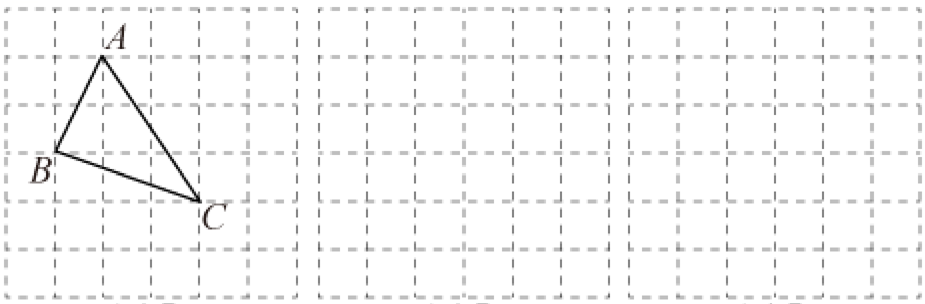

图 a　　图 b　　图 c

【点睛】本题需仔细分析题意，结合图形，利用勾股定理即可解决问题．

8．（2021 秋·江苏南京·八年级统考期中）问题背景：

在△$ABC$ 中，$AB$、$BC$、$AC$ 三边的长分别为$\sqrt{5}$、$\sqrt{10}$、$\sqrt{13}$，求这个三角形的面积．小明同学在解答这道题时，先建立一个正方形网格（每个小正方形的边长为 1），再在网格中画出格点△$ABC$（即△$ABC$ 三个顶点都在小正方形的顶点处）．如图①所示．这样不需求△$ABC$ 的高，而借用网格就能计算出它的面积．

(1)请你将△$ABC$ 的面积直接填写在横线上；




图①　　图②　　图③

思维拓展：

(2)我们把上述求△$ABC$ 面积的方法叫做构图法．若△$ABC$ 三边的长分别为$\sqrt{2}$、$\sqrt{13}$、$\sqrt{17}$，请利用图②的正方形网格（每个小正方形的边长为 1）画出相应的△$ABC$．并求出它的面积．

探索创新：

(3)若△$ABC$ 三边的长分别为$\sqrt{5}a$、$2\sqrt{2}a$、$\sqrt{17}a$（$a>0$），请利用图③的正方形网格（每个小正方形的边长为 $a$）画出相应的△$ABC$，并求出它的面积．

(4)若△$ABC$ 三边的长分别为$\sqrt{m^2+16n^2}$、$\sqrt{9m^2+4n^2}$、$2\sqrt{m^2+n^2}$（$m>0$，$n>0$，且 $m\neq n$），试运用构图法求出这个三角形的面积．

【答案】(1)$\frac{7}{2}$

(2)$S_{\Delta ABC}=\frac{5}{2}$，图见解析

(3)$S_{\Delta ABC}=3a^2$，图见解析

(4)$S_{\Delta ABC}=5mn$，图见解析

【分析】(1）利用分割法求三角形的面积即可；

（2）利用网格图，构造三角形，利用分割法求解即可；

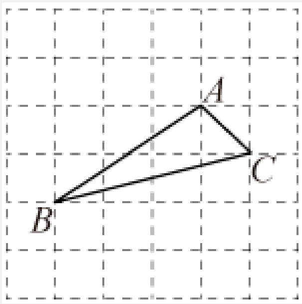
（3）利用网格图，构造三角形，利用分割法求解即可；

（4）构造长方形，利用分割法求解即可．

**【详解】**（1）解：$S_{\triangle}ABC=3\times3-\frac{1}{2}\times1\times2-\frac{1}{2}\times2\times3-\frac{1}{2}\times1\times3=\frac{7}{2}$．

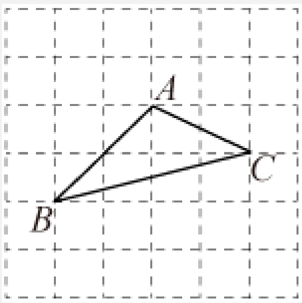
故答案为：$\frac{7}{2}$；

（2）解：如图，$\triangle ABC$ 如图所示．



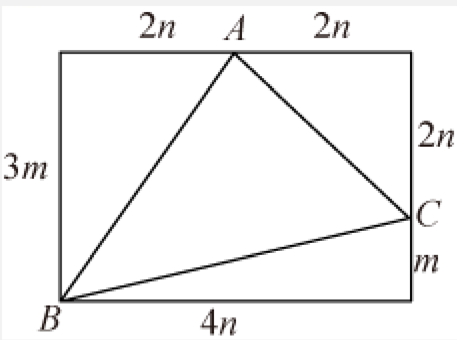

$S_{\triangle}ABC=2\times4-\frac{1}{2}\times2\times3-\frac{1}{2}\times4\times1-\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{5}{2}$．

（3）解：如图，$\triangle ABC$ 即为所求．




$S_{\triangle}ABC=2a\times4a-\frac{1}{2}\times2a\times2a-\frac{1}{2}\times2a\times a-\frac{1}{2}\times4a\times a=3a^2$．

（4）解：根据题意，构造长为 $2n$，宽为 $3m$ 的长方形，作出边长为为 $\sqrt{m^2+16n^2}$ 、 $\sqrt{9m^2+4n^2}$ 、$2\sqrt{m^2+n^2}$ 的三角形，如图，$\triangle ABC$ 即为所求．

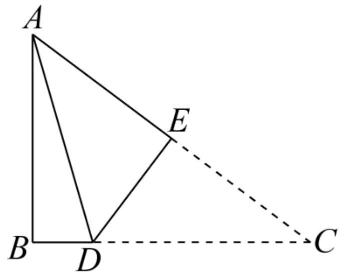



$S_{\triangle}ABC=3m\times4n-\frac{1}{2}\times3m\times2n-\frac{1}{2}\times2m\times2n-\frac{1}{2}\times4n\times m=5mn$．

【点睛】本题是四边形的综合题，考查了勾股定理及作图的知识，解答本题关键是仔细理解问题背景，熟练掌握勾股定理，关键是结合网格用矩形及容易求得面积的直角三角形表示出所求三角形的面积进行解答.

**三、利用勾股定理解决直角三角形相关问题（共 5 小题）**

9.（2022 秋·江苏徐州·八年级统考期末）如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，$AB=6$，$BC=8$，将$\triangle DCE$沿$DE$翻折，使点$C$落在点 A 处.




(1)设$BD=x$，在Rt$\triangle ABD$中，根据勾股定理，可得关于$x$的方程______；

(2)分别求$DC$、$DE$的长.

【答案】(1)$6^2+x^2=(8-x)^2$

(2)$DC=\frac{25}{4}$，$DE=\frac{15}{4}$

【分析】（1）由折叠的性质得出$AD=CD$，$AE=EC$，设$BD=x$，则$DC=AD=8-x$，由勾股定理可求出答案；

（2）由勾股定理可求出答案.

【详解】（1）解：$\because$将$\triangle DCE$沿$DE$翻折，使点$C$落在点 A 处.

$\therefore AD=CD$，$AE=EC$，

设$BD=x$，则$DC=AD=8-x$，

$\because AB^2+BD^2=AD^2$，

$\therefore 6^2+x^2=(8-x)^2$，

故答案为：$6^2+x^2=(8-x)^2$；

（2）解：由（1）得$6^2+x^2=(8-x)^2$，

解得$x=\frac{7}{4}$，

$\therefore BD=\frac{7}{4}$，

$\therefore DC=BC-BD=8-\frac{7}{4}=\frac{25}{4}$.

$\because AB=6$，$BC=8$，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

$\therefore CE=\frac{1}{2}AC=5$，

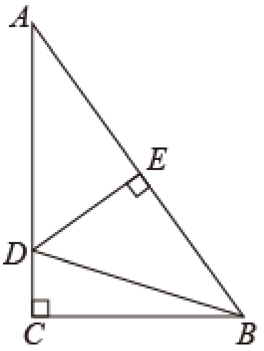
$\therefore DE=\sqrt{DC^2-CE^2}=\sqrt{(\frac{25}{4})^2-5^2}=\frac{15}{4}$.

【点睛】本题考查了折叠的性质，勾股定理，熟练掌握折叠的性质是解题的关键.

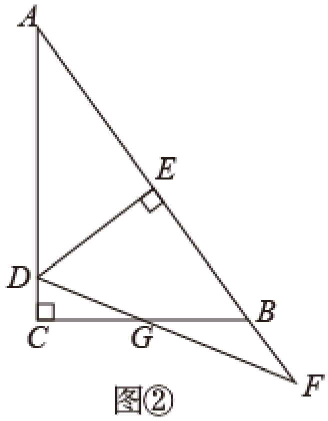
10.（2022秋·江苏苏州·八年级苏州高新区第二中学校考期中）如图Rt△$ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=8$，$BC=6$，沿$AB$的垂线$DE$折叠△$ABC$,

（1）如图①，若点$A$落在点$B$处，求$AD$的长；

（2）如图②，若点$A$落在$AB$的延长线的点$F$处，$AD$折叠后与$CB$交点$G$，且$CG=BG$，求$AD$的长.



图①



图②

【答案】（1）$\frac{25}{4}$；（2）$\frac{57}{8}$

【分详】（1）由勾股定理求出$AB$的长度，设$AD=x$，则$CD=8-x$，由折叠可知$DB=AD=x$，在Rt△$DCB$中，$CD^2+BC^2=DB^2$，列式计算求出$x$的值即可；

（2）过点$B$作$BH\perp BC$交$DF$于点$H$，由全等三角形的判定得△$DGC$≌△$HBG$，由全等三角形的性质得$DC=BH$，$\angle CBH=\angle DCB$，由平行线的判定得$AC//BH$及$\angle A=\angle HBF$，由折叠知$\angle A=\angle F$，得$\angle HBF=\angle F$，$HB=HF$．设$CD=y$，则$AD=DF=8-y$，$HF=y$，在Rt△$DCG$中，$CD^2+GC^2=DG^2$，列式计算即可求出$AD$的长

【详解】解：（1）∵Rt△$ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=8$，$BC=6$，

∴$AB=10$．

设$AD=x$，则$CD=8-x$，由折叠可知$DB=AD=x$．

在Rt△$DCB$中，$CD^2+BC^2=DB^2$，$(8-x)^2+6^2=x^2$，

解得$x=\frac{25}{4}$，$AD$的长为$\frac{25}{4}$；

（2）过点$B$作$BH\perp BC$交$DF$于点$H$.

在△$DGC$与△$HBG$中，

∵$\angle DCB=\angle HBG$，$\angle DGC=\angle BGH$，$CG=BG$，

∴△$DGC$≌△$HBG$.

∴$DC=BH$，$DG=GH$，$\angle CBH=\angle DCB$，

∴ $AC//BH$．

∴$\angle A=\angle HBF$．

由折叠可知$\angle A=\angle F$，

∴$\angle HBF=\angle F$．

∴$HB=HF$．

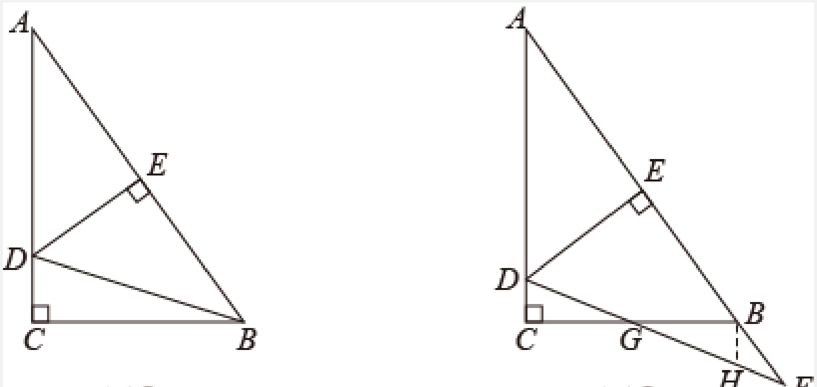
设 $CD=y$，则 $AD=DF=8-y$，$HF=y$，

∴$DG=\frac{1}{2}DH=\frac{1}{2}(8-y-y)\ =4-y$，

在 Rt△$DCG$ 中， $CD^2+GC^2=DG^2$，$y^2+3^2=(4-y)^2$，

解得 $y=\frac{7}{8}$，

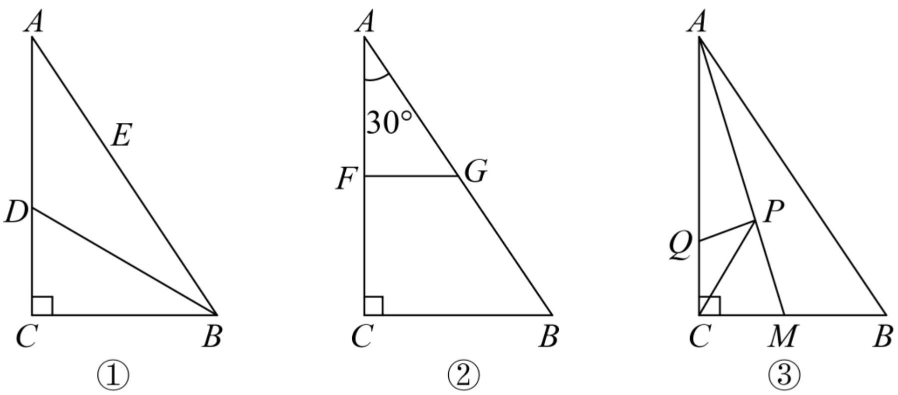
∴$AD=8-y=\frac{57}{8}$，即 $AD$ 的长为$\frac{57}{8}$．



图①　　图②

【点睛】本题考查了全等三角形的性质和判定，折叠的性质，勾股定理，利用勾股定理列出方程是本题的关键．

11．（2022 秋·江苏徐州·八年级统考期中）如图，在 Rt△$ABC$ 中，$\angle ACB=90°$．




(1)如图①，现将△$ABC$ 沿 $BD$ 翻折，使点 $C$ 落在斜边 $AB$ 上点 $E$ 处，若 $AC=8\text{cm}$， $BC=6\text{cm}$，求 $CD$ 的长；

(2)如图②，现将△$ABC$ 沿直线 $FG$ 翻折，使点 A 落在点 $C$ 处，若 $\angle A=30°$，求证： $AB=2BC$；

(3)如图③，作 $AM$ 平分$\angle BAC$，动点 $P$ 在 $AM$ 上运动，动点 $Q$ 在 $AC$ 上运动，若 $\angle A=30°$， $AC=6\text{cm}$，则