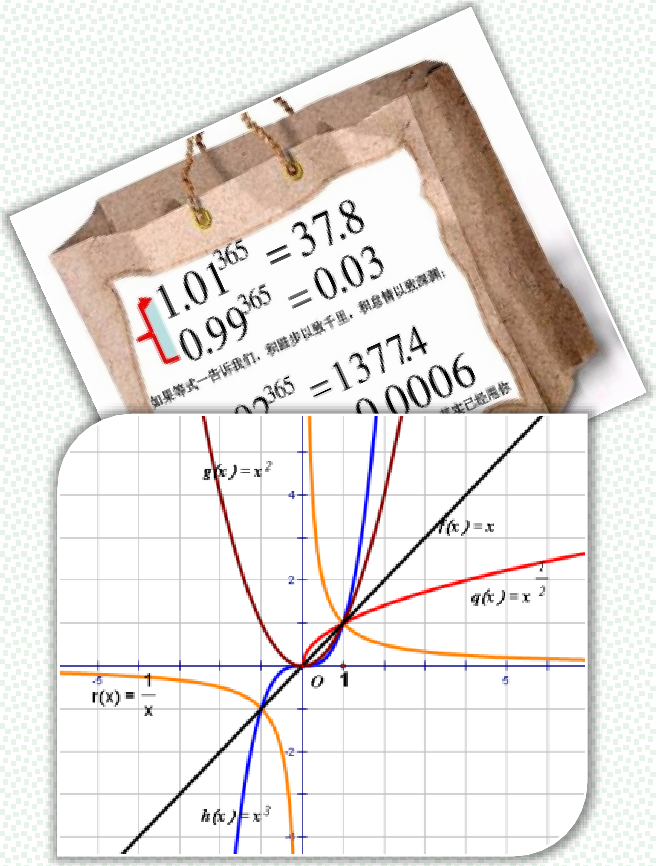
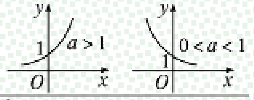
本章总结提升

目 录 索 引

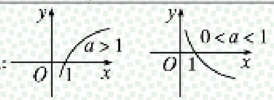

$1.01^{365}=37.8$
$0.99^{365}=0.03$
$=1377.4$
0.0006
$g(x)=x^2$
$f(x)=x$
$q(x)=x^{\frac{1}{2}}$
$r(x)=\frac{1}{x}$
$h(x)=x^3$

知识网络·整合构建

- 指数函数与对数函数
  - 指数函数
    - 指数及其运算
      - 正整数指数幂: $a^n(a>0,a\neq 1,n\in\mathbf{N}^*)$
      - 分数指数幂
        - $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*,且n>1)$
        - $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*,且n>1)$
      - 运算法则(其中$a>0$)
        - $a^m a^n=a^{m+n}$
        - $(a^m)^n=a^{mn}$
        - $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}(m>n,a\neq 0)$
        - $(ab)^n=a^n b^n$
    - 图象与性质
      - 定义:形如$y=a^x(a>0,且a\neq 1,x\in\mathbf{R})$的函数叫做指数函数
      - 图象:



      - 定义域:$\mathbf{R}$
      - 值域:$(0,+\infty)$
      - 单调性:当$a>1$时为增函数,当$0<a<1$时为减函数
      - 奇偶性:非奇非偶函数
      - 定点:$(0,1)$
  - 互为反函数
  - 对数函数
    - 对数及其运算
      - 定义:若$a^b=N(a>0,a\neq 1)$,则称b为以a为底N的对数,记作$b=\log_a N(a>0,且a\neq 1)$
      - 运算性质$(a>0,a\neq 1,M>0,N>0)$
        - 负数和零没有对数, $\log_a 1=0,\log_a a=1$
        - $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$
        - $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$
        - $\log_a M^n=n\log_a M(n\in\mathbf{R})$
    - 图象与性质
      - 定义:形如$y=\log_a x(a>0,且a\neq 1,x>0)$的函数叫做对数函数
      - 图象:



      - 定义域:$(0,+\infty)$
      - 值域:$\mathbf{R}$
      - 单调性:当$a>1$时为增函数,当$0<a<1$时为减函数
      - 奇偶性:非奇非偶函数
      - 定点:$(1,0)$
  - 函数的应用(二)
    - 函数的零点与方程的解
      - 零点的概念：满足$f(x)=0$的实数x称为$f(x)$的零点
      - 零点存在定理
        - ①函数的图象连续不断 } 条件
        - ②端点处函数值异号 } 条件
        - ③至少有一个零点 } 结论
    - 用二分法求方程的近似解
      - 二分法的概念
      - 二分法的步骤
    - 函数模型的应用
      - 指数型函数模型:形如$y=m\cdot a^x+n(m\neq 0,a>0且a\neq 1)$
      - 对数型函数模型:形如$y=m\log_a x+n(m\neq 0,a>0且a\neq 1)$
      - 函数的拟合

专题突破·素养提升

专题一　与指数函数有关的图象问题

1.平移变换

(1)把函数$y=f(x)$的图象向右平移$m(m>0)$个单位长度,得函数$y=f(x-m)$的图象;把函数$y=f(x)$的图象向左平移$m(m>0)$个单位长度,得函数$y=f(x+m)$的图象.

(2)把函数$y=f(x)$的图象向上平移$n(n>0)$个单位长度,得函数$y=f(x)+n$的图象;把函数$y=f(x)$的图象向下平移$n(n>0)$个单位长度,得函数$y=f(x)-n$的图象.

2.对称变换

(1)函数$y=f(x)$的图象与函数$y=f(-x)$的图象关于y轴对称;

(2)函数$y=f(x)$的图象与函数$y=-f(x)$的图象关于x轴对称;

(3)函数$y=f(x)$的图象与函数$y=-f(-x)$的图象关于原点对称.

【例1】 画出下列函数的图象,并说明它们是由函数$y=2^x$的图象经过怎样的变换得到的.

(1)$y=2^{x-1}$;

(2)$y=2^x+1$;

(3)$y=-2^x$;

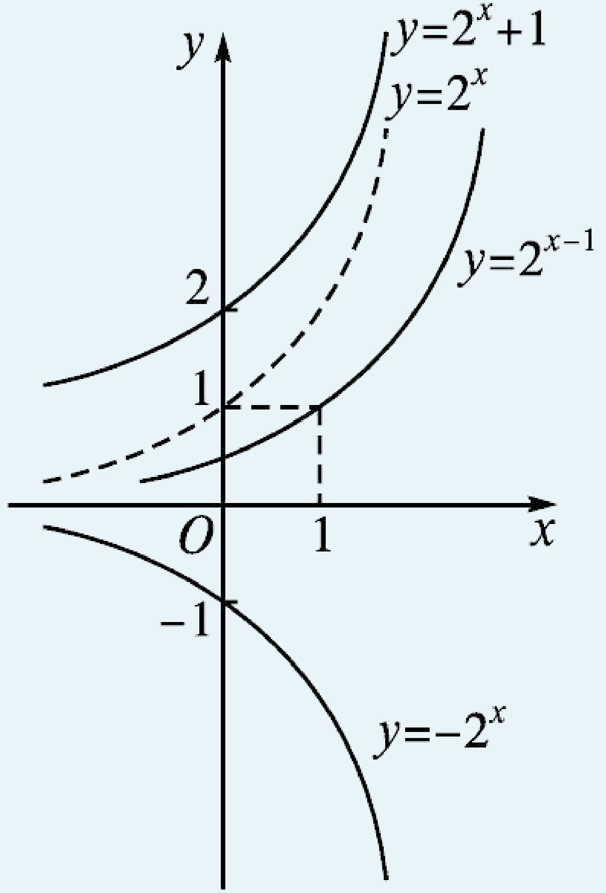
(4)$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$.

解 如图.

(1)$y=2^{x-1}$的图象是由$y=2^x$的图象沿x轴向右平移1个单位长度得到的;

(2)$y=2^x+1$的图象是由$y=2^x$的图象沿y轴向上平移1个单位长度得到的;

(3)$y=-2^x$的图象是由$y=2^x$的图象关于x轴对称得到的.



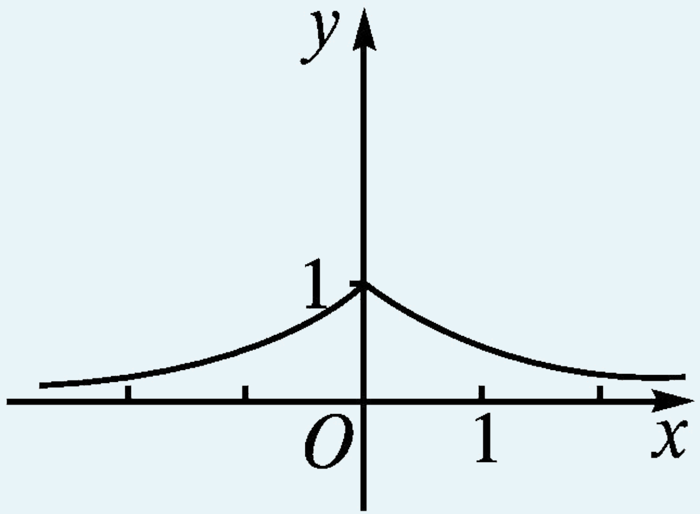
(4)(方法 1)因为$|x|=\begin{cases}x,x\geq 0,\\-x,x<0,\end{cases}$故当 $x\geqslant 0$ 时,函数为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$;

当 $x<0$ 时,函数为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=2^x$.

原函数的图象由 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x(x\geqslant 0)$和 $y=2^x(x<0)$的图象构成.

而 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x(x>0)$和 $y=2^x(x<0)$的图象关于 y 轴对称,点$(0,1)$在 y 轴上,

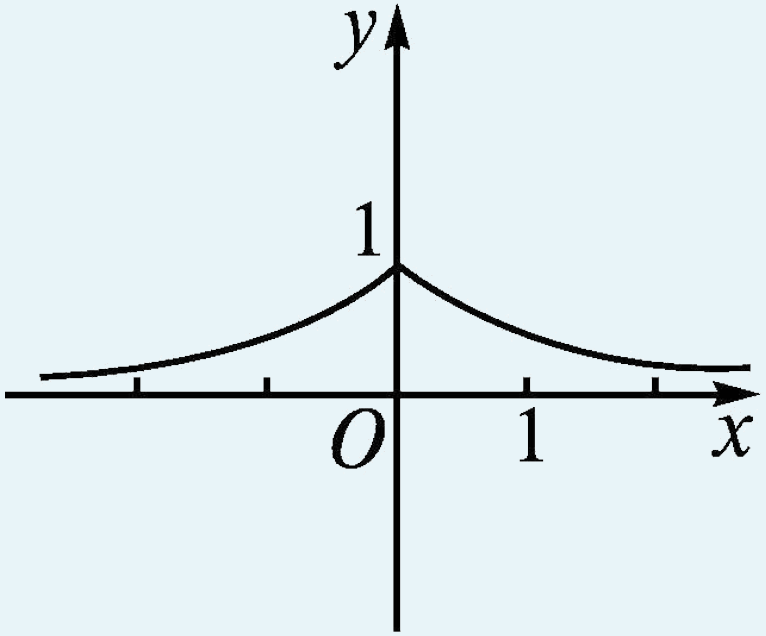
所以原函数的图象关于 y 轴对称,如图所示.



(方法 2)因为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ 为偶函数,所以其图象关于 y 轴对称,

当 $x>0$ 时,$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$,根据偶函数的定义,即可得到 $x<0$ 时的图象,

又点(0,1)在 y 轴上,所以原函数的图象如图所示.



变式训练1　画出函数$y=2^{|x-1|}$的图象,并根据图象指出这个函数的对称性、单调区间、值域.

解　$y=2^{|x-1|}=\begin{cases}2^{x-1}, x \geq 1,\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}, x < 1.\end{cases}$

其图象是由两部分组成的:

一是把函数$y=2^x$的图象向右平移1个单位长度,取$x\geq1$的部分;

二是把函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象向右平移 1 个单位长度,取 $x<1$ 的部分,

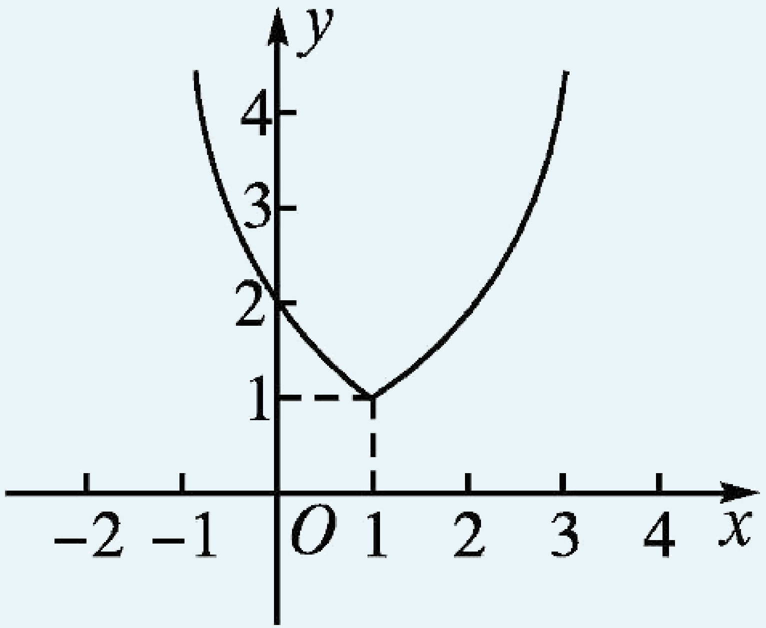
如图中实线部分所示.

由图象可知函数的三个性质:

①对称性:图象的对称轴为直线$x=1$.

②单调性:在$(-\infty,1]$上单调递减,在$[1,+\infty)$上单调递增.

③函数的值域:$[1,+\infty)$.



专题二　指数函数性质的综合应用

在指数函数性质的综合应用中,主要出现以指数函数为载体的复合函数,然后利用定义判断复合函数的奇偶性、单调性,从而解决问题.

【例2】 [2023山东青岛莱西期末]已知指数函数$f(x)=a^x(a>0$,且$a\neq 1)$的图象过点 $M\ -\frac{1}{2},\frac{1}{3}$,$g(x)=f\ -\frac{1}{2}x$ $h(x)=f(x)+2g(x)$.

(1)若$f(x)>g(-x)+6$,求x的取值范围;

(2)判断$h(x)$在$[0,+\infty)$上的单调性;

(3)设$p=h(2.5^{0.2}),q=h(3.1^{0.3}),r=h(0.7^{-0.1})$,试比较$p,q,r$的大小,并将它们按从小到大的顺序排起来.

解 $\because f(x)=a^x$的图象过点$M\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$,

$\therefore a^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$,解得 $a=9$,$\therefore f(x)=9^x$,$g(x)=\frac{1}{3^x}$.

(1)$f(x)>g(-x)+6$可化为$9^x-3^x-6>0$,

令$3^x=t$,则$t^2-t-6=(t+2)(t-3)>0$,$t>0$,

$\therefore t>3$,即$3^x>3$,解得$x>1$,故x的取值范围为$(1,+\infty)$.

(2)由题可知 $h(x)=9^x+\frac{2}{3^x}$,$\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,

则 $h(x_1)-h(x_2)= 9^{x_1}+\frac{2}{3^{x_1}} - 9^{x_2}+\frac{2}{3^{x_2}} =(9^{x_1}-9^{x_2})+\frac{2}{3^{x_1}}-\frac{2}{3^{x_2}}$

$=(3^{x_1}-3^{x_2})(3^{x_1}+3^{x_2})-\frac{2(3^{x_1}-3^{x_2})}{3^{x_1+x_2}}$

$=(3^{x_1}-3^{x_2})(3^{x_1}+3^{x_2})-\frac{2}{3^{x_1+x_2}}$

$=\frac{1}{3^{x_1+x_2}}(3^{x_1}-3^{x_2})[3^{x_1+x_2}\cdot(3^{x_1}+3^{x_2})-2]$.

$\because x_1<x_2$,$\therefore 3^{x_1}<3^{x_2}$,从而$3^{x_1}-3^{x_2}<0$.

$\because x_1,x_2\in[0,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,

$\therefore x_1+x_2>0$,从而$3^{x_1+x_2}>3^0=1$,$3^{x_1}+3^{x_2}>3^0+3^0=2$,

$\therefore 3^{x_1+x_2}\cdot(3^{x_1}+3^{x_2})>2$,$3^{x_1+x_2}\cdot(3^{x_1}+3^{x_2})-2>0$,

$\therefore h(x_1)-h(x_2)<0$,即 $h(x_1)<h(x_2)$,$\therefore h(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增.

(3)$\because 3.1^{0.3}>3.1^{0.2}>2.5^{0.2}$,$0<0.7^{-0.1}<0.7^{-0.2}=\left(\frac{10}{7}\right)^{0.2}<2.5^{0.2}$,

$\therefore 3.1^{0.3}>2.5^{0.2}>0.7^{-0.1}>0$.

$\because h(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,$q=h(3.1^{0.3})$,$p=h(2.5^{0.2})$,$r=h(0.7^{-0.1})$,

$\therefore r<p<q$.

变式训练2　已知函数$f(x)=a^{x-1}(a>0$,且$a\neq 1)$.

(1)若函数$f(x)$的图象过点(3,4),求实数a的值;

(2)求关于x的不等式$f(x)>a^3$的解集.

解　(1)∵函数$f(x)$的图象过点(3,4),

∴$a^2=4$,∵$a>0$,且$a\neq 1$,∴$a=2$.

(2)由$f(x)>a^3$可得$a^{x-1}>a^3$,当$0<a<1$时,$x-1<3$,解得$x<4$,即不等式的解集为$(-\infty,4)$,当$a>1$时,$x-1>3$,解得$x>4$,即不等式的解集为$(4,+\infty)$.

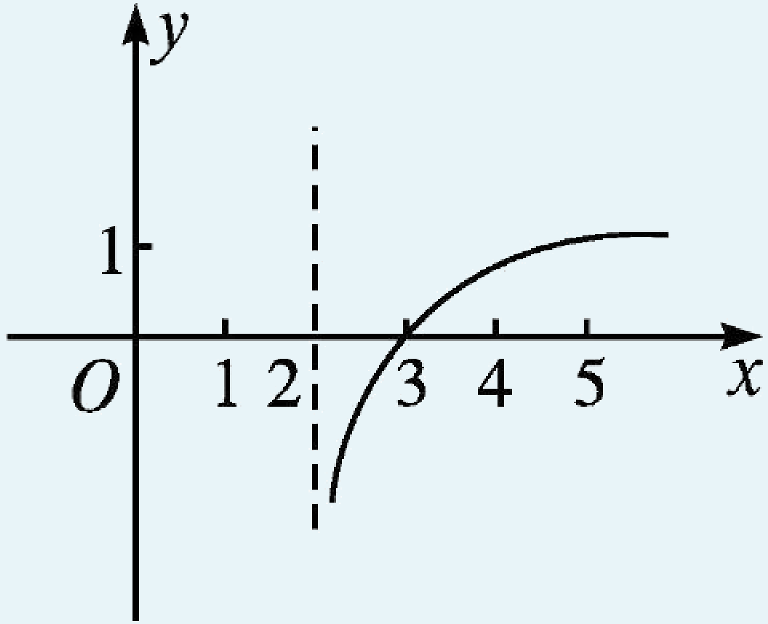
专题三　对数函数的图象及其应用

对数函数的图象及应用有两个方面:一是已知函数解析式求作函数图象,即“知式求图”;二是判断方程的根的个数时,通常不具体解方程,而是转化为判断指数函数、对数函数等图象的交点个数问题.本专题重在提升直观想象和逻辑推理素养.

【例3】 画出下列函数的图象,并根据图象写出函数的定义域、值域以及单调区间:

(1)$y=\log_3(x-2)$;

解 函数$y=\log_3(x-2)$的图象如图①所示,其定义域为$(2,+\infty)$,值域为**R**,在区间$(2,+\infty)$内单调递增.

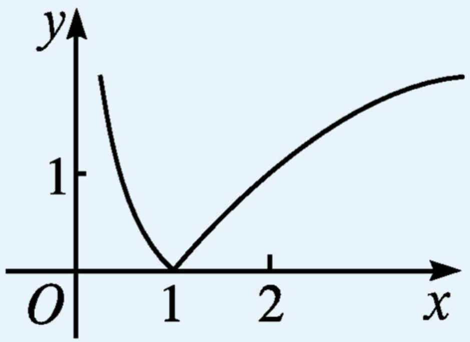


图①

(2)$y=|\log_{\frac{1}{2}}x|$.

解 $y=|\log_{\frac{1}{2}}x|=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}x, 0<x\leq 1,\\ \log_2 x, x>1,\end{cases}$ 其图象如图②所示,

其定义域为$(0,+\infty)$,值域为$[0,+\infty)$,在$(0,1]$上单调递减,在$(1,+\infty)$内单调递增.

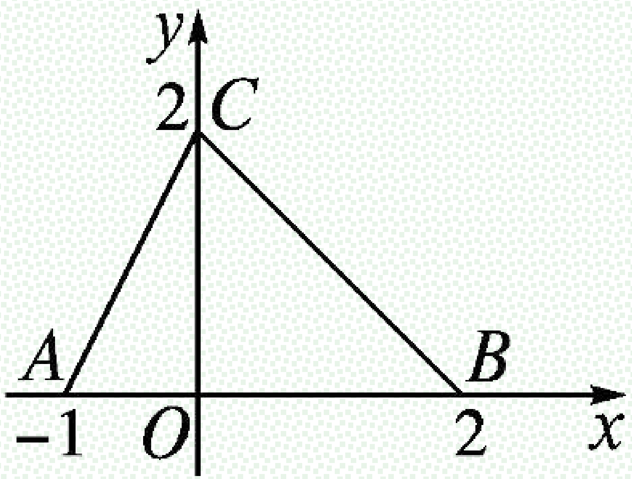


图②

规律方法　1.注意函数图象上的特殊点及函数自身的性质(定义域、单调性、对称性、最值等)的应用,同时灵活利用图象平移、对称、翻折等知识加以筛选.

2.借助函数的图象可以求图象的交点个数、函数的最值、解不等式等.

变式训练3 如图,函数$f(x)$的图象为折线ACB,则不等式$f(x)\geqslant\log_2(x+1)$的解集是(C)



A. $\{x|-1<x\leqslant 0\}$

B. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$

C. $\{x|-1<x\leqslant 1\}$

D. $\{x|-1<x\leqslant 2\}$