2024 学年杭州地区高三第一学期数学开学考模拟试题

【答案】

1. A　　2. D　　3. C　　4. B　　5. C　　6. C　　7. C

8. C

9. AC　　10. AB　　11. ABD

12. 0

13. 2

14. 5

15. 解：(1) 不妨设$\angle ACB=\angle ACD=\theta(\theta\in(0,\frac{\pi}{2}))$，

则在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理可知，$\cos\theta=\frac{AC^2+CD^2-AD^2}{2AC\cdot CD}=\frac{1}{4}$，

在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理可知，$AB^2=AC^2+BC^2-2AC.BC.\cos\theta$,

所以$AB^2=9+16-2\times4\times3\times\frac{1}{4}=19$，即 $AB=\sqrt{19}$.

(2) 因为 $\cos B=\frac{3}{5}$，所以$\sin B=\frac{4}{5}$，所以$\sin\angle BAC=\sin(B+\theta)=\frac{4}{5}\cos\theta+\frac{3}{5}\sin\theta$，

在$\triangle ABC$ 中，由正弦定理可知，$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$，

所以 $\frac{4}{\frac{4}{5}}=\frac{BC}{\frac{4}{5}\cos\theta+\frac{3}{5}\sin\theta}$，所以$BC=4\cos\theta+3\sin\theta$，

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}.AC.BC.\sin\theta=2(4\sin\theta\cos\theta+3\sin^2\theta)$，

已知在 $\triangle ACD$ 中，$CD=2AC.\cos\theta=8\cos\theta$，所以$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}.AC.CD.\sin\theta=16\sin\theta\cos\theta$，

所以四边形 $ABCD$ 的面积$S=2(4\sin\theta\cos\theta+3\sin^2\theta)+16\sin\theta\cos\theta=12\sin2\theta-3\cos2\theta+3$，

所以 $S=\sqrt{12^2}\sin(2\theta+\varphi)+3\leqslant\sqrt{153}+3=3\sqrt{17}+3$.

16. (1) 解：设$F_2(c,0)(c>0)$，则$c=\sqrt{a^2}$

令$x=c$ 代入 C 的方程有：$|y_A|=\frac{3}{a}$

$\therefore S_{\triangle F_1AB}=\frac{1}{2}\times 2c\times 2|y_A|=\frac{6\sqrt{a^2+3}}{a}=12$

$\because a = 1$，故 $\frac{p}{2} = a = 1$，即 $p = 2$

$\therefore$抛物线 E 的方称为：$y^2 = 4x$

(Ⅱ) 证明：由(Ⅰ) 知：$P(-1,t)(t \neq 0)$，则 $M(\frac{t^2}{4},t)$

直线 PO 的方称为$y = -tx$，代入抛物线 E 的方程有：$N(\frac{4}{t^2},-\frac{4}{t})$

当$t^2 \neq 4$ 时，$k_{MN} = \dfrac{t+\frac{4}{t}}{\frac{t^2}{4}-\frac{4}{t^2}} = \dfrac{4t}{t^2-4}$

$\therefore$直线 MN 的方程为：$y - t = \frac{4t}{t^2-4}(x - \frac{t^2}{4})$，即 $y = \frac{4t}{t^2-4}(x-1)$

$\therefore$此时直线 MN 过定点$(1,0)$

当 $t^2 = 4$ 时，直线 MN 的方称为：$x = 1$，此时仍过点$(1,0)$

即证直线 MN 过定点

17. 解：(1) 证明：由题意可知，$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$，所以$\cos\angle BAD + \cos\angle BCD = 0$，

所以$\frac{1^2+2^2-BD^2}{2\times1\times2}+\frac{1^2+1^2-BD^2}{2\times1\times1}=0$，

解得 $BD = \sqrt{3}$，

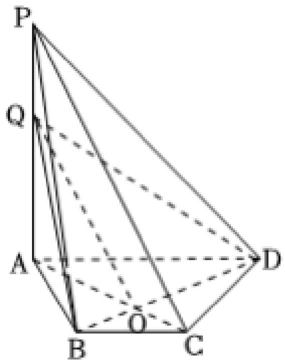
则 $AB^2 + BD^2 = AD^2$，所以 $AB \perp BD$，

又因为$PA \perp$ 平面 $ABCD$，$BD \subset$ 平面$ABCD$，

所以$PA \perp BD$，$PA \cap AB = A$，且 PA，$AB \subset$ 平面 PAB，

所以$BD \perp$ 平面 PAB；

(2) 证明：连结 AC，交 BD 于点 O，连结 QO，


P
Q
A
D
O
B
C