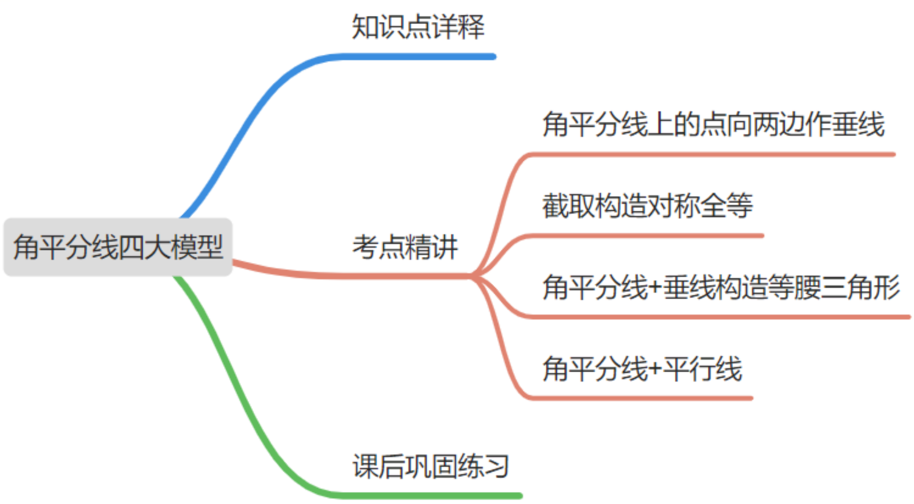
第十二章 重要几何模型 3

角平分线四大模型

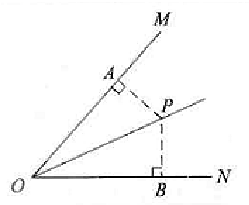


基本方法

模块化学习，塑造解题能力

【题型 1】 角平分线上的点向两边作垂线

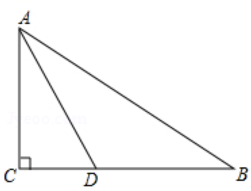
如图，P 是∠MON 的平分线上一点，过点 P 作 PA⊥OM 于点 A,PB⊥ON 于点 B,则 PB=PA.



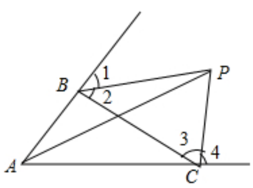
模型分析：利用角平分线的性质：角平分线上的点到角两边的距离相等，构造模型，为边相等、角相等、三角形全等创造更多的条件，进而可以快速找到解题的突破口。

【典题 1】 (1)如图①在△ABC，∠C＝90°，AD 平分∠CAB，BC＝6cm，BD＝4cm，那么点 D 到 AB 的距离是______cm

(2)如图②，已知∠1＝∠2，∠3＝∠4，求证：AP 平分∠BAC.



图①

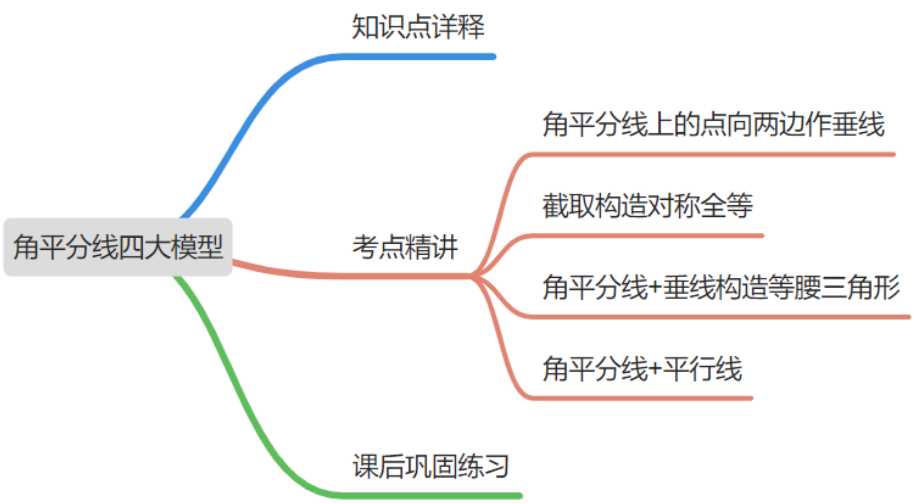


图②

【巩固练习】

第十二章 重要几何模型 3

角平分线四大模型

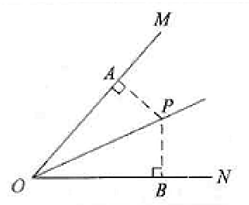


zhg 基本方法

模块化学习，塑造解题能力

【题型 1】 角平分线上的点向两边作垂线

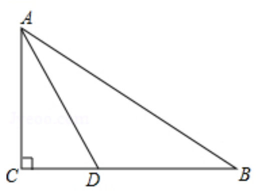
如图，P 是∠MON 的平分线上一点，过点 P 作 PA⊥OM 于点 A,PB⊥ON 于点 B,则 PB=PA.



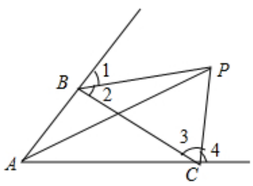
模型分析：利用角平分线的性质：角平分线上的点到角两边的距离相等，构造模型，为边相等、角相等、三角形全等创造更多的条件，进而可以快速找到解题的突破口。

【典题 1】 (1)如图①在△ABC，∠C＝90°，AD 平分∠CAB，BC＝6cm，BD＝4cm，那么点 D 到 AB 的距离是______cm

(2)如图②，已知∠1＝∠2，∠3＝∠4，求证：AP 平分∠BAC.



图①



图②

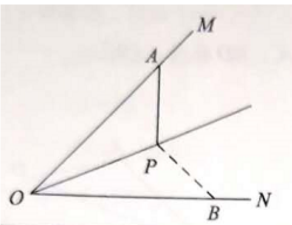
【巩固练习】

1.如图，$\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACD$ 的平分线 CP 与内角 $\angle ABC$ 平分线 BP 交于点 P，若 $\angle BPC=40°$，则 $\angle CAP$ ＝______.

2.已知，如图，$\angle C=\angle D=90°$，E 是 CD 的中点，BE 平分 $\angle ABC$．求证：AE 平分 $\angle DAB$．

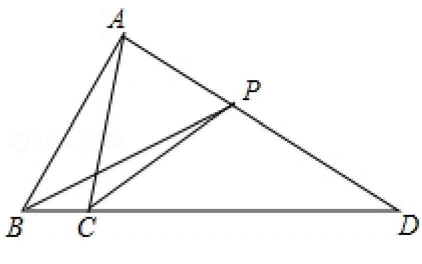
【题型 2】截取构造对称全等

如图，P 是∠MON 的平分线上一点，点 A 是射线 OM 上任意一点，在 ON 上截取 OB=OA，连接 PB，则△OPB≌△OPA.



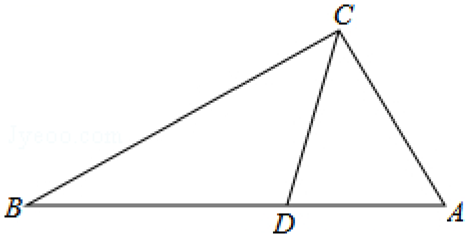
模型分析：利用角平分线图形的对称性，在角的两边构造对称全等三角形，可以得到对应边、对应角相等、利用对称性把一些线段或角进行转移，这是经常使用的一种解题技巧。

【典题 1】 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 $\angle BAC$ 的外角平分线，P 是 AD 上异于点 A 的任一点，试比较 $PB+PC$ 与 $AB+AC$ 的大小，并说明理由.

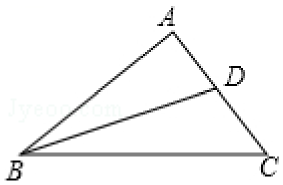


【巩固练习】

1.已知在△ABC中，CD是∠ACB的平分线，∠A＝2∠B，AD＝3，AC＝5，则BC＝_____.



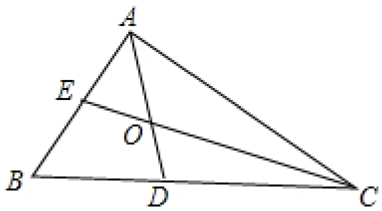
2.已知，如图AB＝AC，∠A＝108°，BD平分∠ABC交AC于D，求证：BC＝AB+CD.



3.如图，在四边形$ABCD$中，AC平分∠BAD，且BC＝CD，求证：∠B+∠D＝180°.

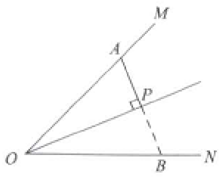
4.如图，在△ABC中，∠B＝60°，△ABC的角平分线AD、CE相交于点O，

(1)求∠AOC的度数；(2)求证：AE+CD＝AC；(3)求证：OE＝OD.



【题型 3】角平分线+垂线构造等腰三角形

如图， P 是∠MON 的平分线上一点，AP⊥OP 于 P 点，延长 AP 交 ON 于点 B,则△AOB 是等腰三角形。

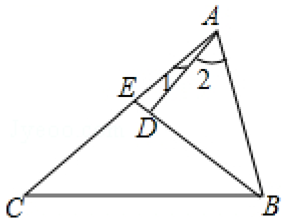


模型分析: 构造次模型可以利用等腰三角形的"三线合一"，也可以得到两个全等的直角三角形，进而得到对应边、对应角相等。这个模型敲门地把角平分线和三线合一联系在一起。

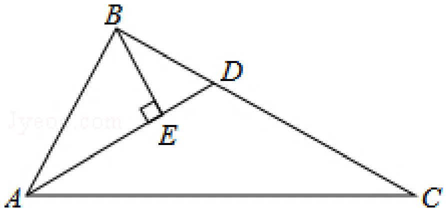
【典题 1】如图所示，已知等腰直角三角形 ABC 中，$\angle A=90°$，$AB=AC$，BD 平分 $\angle ABC$，$CE\perp BD$，垂足为点 E，求证：$BD=2CE$.

【巩固练习】

1.如图．在$\triangle ABC$ 中，BE 是角平分线，$AD\perp BE$，垂足为 D，求证：$\angle 2=\angle 1+\angle C$.



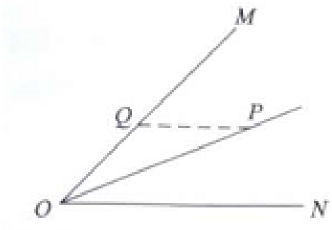
2 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=3\angle C$，AD 平分$\angle BAC$，$BE\perp AD$ 于 E，求证: $BE=\frac{1}{2}(AC-AB)$. (提示：延长 BE 交 AC 于点 F).



3.已知：如图，$\angle BAD=\angle CAD$，$AB>AC$，$CD\perp AD$于点D，H是BC中点．求证：$DH=\frac{1}{2}(AB-AC)$．

【题型 4】 角平分线+平行线

如图，P 是∠MON 的平分线上一点，过点 P 作 PA//ON,交 OM 于点 Q.则△POQ 是等腰三角形.



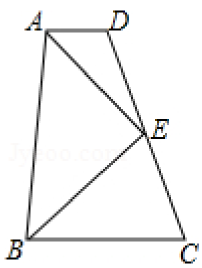
模型分析：有角平分线时，常过角平分线上一点作角的一边的平行线，构造等腰三角形，为证明结论提供更多的条件，体现了角平分线与等腰三角形之间的密切关系。

【典题 1】如图，梯形$ABCD$中，$AD/\!/BC$，E是CD的中点，AE平分$\angle BAD$，$AE\perp BE$．

(1)求证：BE平分$\angle ABC$；

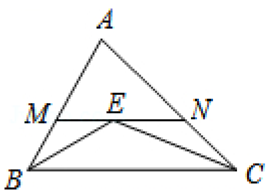
(2)求证：$AD+BC=AB$；

(3)若$S_{\triangle ABE}=4$，求梯形$ABCD$的面积．



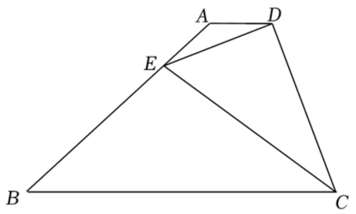
【巩固练习】

1.如图，在△ABC 中，∠ABC 和∠ACB 的平分线交于点 E，过点 E 作 MN∥BC 交 AB 于 M，交 AC 于 N，若 BM+CN＝9，则线段 MN 的长为_____.



2.四边形 $ABCD$ 中，AD∥BC，CE 平分∠BCD 交 AB 于点 E，ED⊥CD 于点 D，已知∠B＝40°，∠BCD＝70°.

(1)求∠CED 的度数；　　(2)求证：AD＝AE.



3.如图 1，点 A 是直线 MN 上一点，点 B 是直线 PQ 上一点，MN∥PQ，∠NAB 和∠ABQ 的平分线交于点 C.

(1)求证：$BC\perp AC$；

(2)过点 C 作直线交 MN 于 D(不与 A 重合)，交 PQ 于 E，

①若点 D 在点 A 的右侧，如图 2，求证：$AD+BE=AB$；

②若点 D 在点 A 的左侧，则线段 AD，BE，AB 有何数量关系？直接写出结论，不说理由．

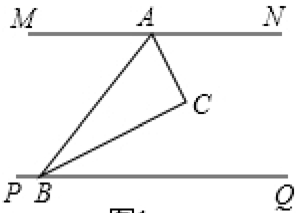


图1

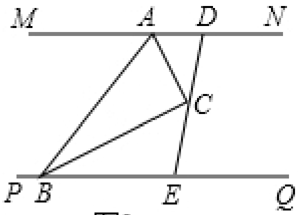
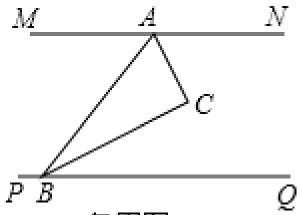


图2



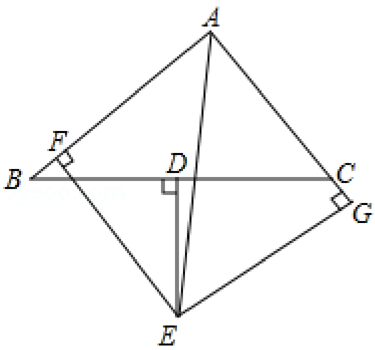
备用图

课后练习

分层强化练习，内化知识

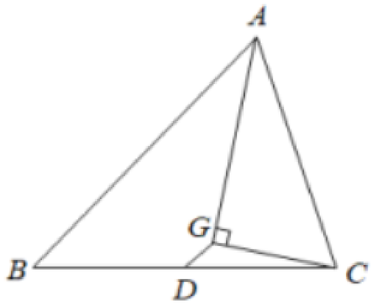
1 如图，在△ABC 中，D 为 BC 中点，$DE\perp BC$ 交∠BAC 的平分线 AE 于 E，$EF\perp AB$ 于 F，$EG\perp AC$ 交 AC 的延长线于 G，

(1)求证：$BF=CG$；(2)若 $AB=7$，$AC=3$，求 AF 的长．



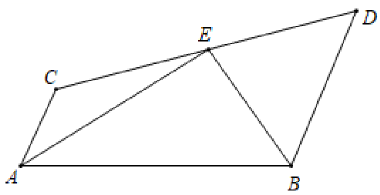
2.如图所示，在四边形 $ABCD$ 中，$BC>BA$，$AD=DC$，BD 平分∠ABC．求证：$\angle BAD+\angle C=180°$．

3.已知 $\triangle ABC$中，D为BC的中点，AG平分$\angle BAC,CG\perp AG$于G，连结DG，若$AB=6,AC=4$，求DG的长



4.如图，已知 $AC∥BD$，AE，BE 分别平分∠CAB 和∠DBA，点 E 在线段 CD 上．

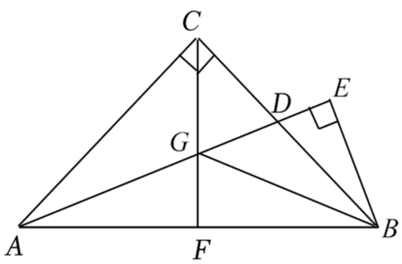
(1)求∠AEB 的度数；(2)求证：$CE=DE$．



5.如图，△ABC 中，$AC=BC$，∠$ACB=90°$，AD 平分∠BAC 交 BC 于点 D，过点 B 作 $BE⊥AD$，交 AD 延长线于点 E，F 为 AB 的中点，连接 CF，交 AD 于点 G，连接 BG．

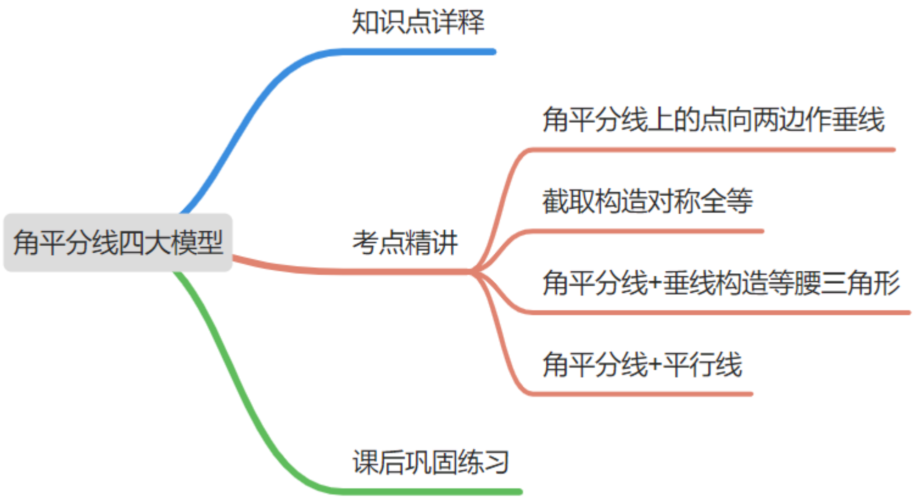
(1)线段 BE 与线段 AD 有何数量关系？并说明理由；

(2)判断△BEG 的形状，并说明理由．



第十二章 重要几何模型 3

角平分线四大模型

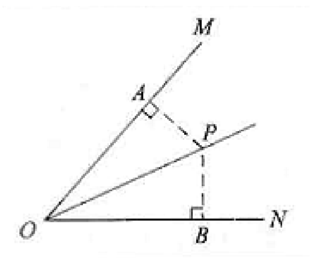


基本方法

模块化学习，塑造解题能力

【题型 1】 角平分线上的点向两边作垂线

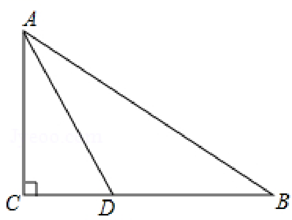
如图，P 是∠MON 的平分线上一点，过点 P 作 PA⊥OM 于点 A,PB⊥ON 于点 B,则 PB=PA.



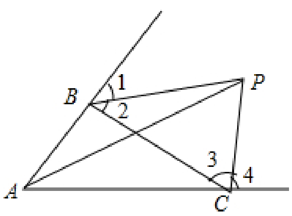
模型分析：利用角平分线的性质：角平分线上的点到角两边的距离相等，构造模型，为边相等、角相等、三角形全等创造更多的条件，进而可以快速找到解题的突破口。

【典题 1】 (1)如图①在△ABC，∠C＝90°，AD 平分∠CAB，BC＝6cm，BD＝4cm，那么点 D 到 AB 的距离是______cm

(2)如图②，已知∠1＝∠2，∠3＝∠4，求证：AP 平分∠BAC.



图①



图②

解析 (1)如图①，作 $DE\perp AB$ 于 E，

∵$BC=6cm$，$BD=4cm$，∴$CD=2cm$，

∵AD 平分$\angle CAB$，$\angle C=90°$，$DE\perp AB$，

∴$DE=CD=2cm$，即点 D 到 AB 的距离是 $2cm$，

故答案为：2；

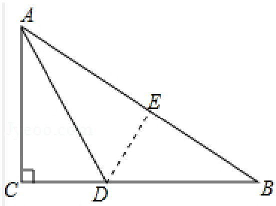
(2)证明：如图②，作 $PD\perp AB$ 于 D，$PE\perp BC$ 于 E，$PF\perp AC$ 于 F，

∵$\angle 1=\angle 2$，$PD\perp AB$，$PE\perp BC$，∴$PD=PE$，

同理，$PF=PE$，

∴$PD=PF$，又 $PD\perp AB$，$PF\perp AC$，

∴AP 平分$\angle BAC$.



图①

【巩固练习】

1.如图，△ABC 的外角$\angle ACD$ 的平分线 CP 与内角$\angle ABC$ 平分线 BP 交于点 P，若$\angle BPC=40°$，则$\angle CAP$ =______.

答案 50°

解析 延长 BA，作 $PN\perp BD$，$PF\perp BA$，$PM\perp AC$，

设$\angle PCD=x°$，

∵CP 平分$\angle ACD$，∴$\angle ACP=\angle PCD=x°$，$PM=PN$，

∵BP 平分$\angle ABC$，∴$\angle ABP=\angle PBC$，$PF=PN$，

∴$PF=PM$，

∵$\angle BPC=40°$，∴$\angle ABP=\angle PBC=\angle PCD-\angle BPC=(x-40)°$，

∴$\angle BAC=\angle ACD-\angle ABC=2x°-(x°-40°)-(x°-40°)=80°$，

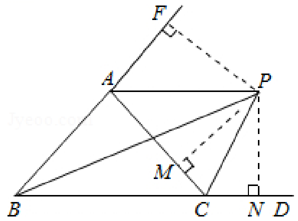
∴$\angle CAF=100°$，

在 Rt△PFA 和 Rt△PMA 中，

$\because \begin{cases} PA = PA \\ PM = PF \end{cases}$，$\therefore \text{Rt}\triangle PFA \cong \text{Rt}\triangle PMA(HL)$，

$\therefore \angle FAP = \angle PAC = 50°$.

故答案为：50°.



2.已知，如图，$\angle C = \angle D = 90°$，$E$ 是 CD 的中点，BE 平分$\angle ABC$．求证：AE 平分$\angle DAB$.

证明 过 E 点作 $EF \perp AB$ 于 F，如图，

$\because BE$ 平分$\angle ABC$，$EC \perp BC$，$EF \perp AB$，$\therefore EC = EF$，

$\because E$ 是 CD 的中点，$\therefore ED = EC$，

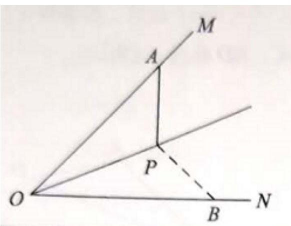
$\therefore EF = ED$，

而 $EF \perp AB$，$ED \perp AD$，

$\therefore AE$ 平分$\angle DAB$.

【题型 2】截取构造对称全等

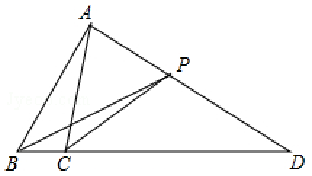
如图，P 是∠MON 的平分线上一点，点 A 是射线 OM 上任意一点，在 ON 上截取 OB=OA，连接 PB，则△OPB≌△OPA.



模型分析：利用角平分线图形的对称性，在角的两边构造对称全等三角形，可以得到对应边、对应角相等、利用对称性把一些线段或角进行转移，这是经常使用的一种解题技巧。

【典题 1】 如图，在$\triangle ABC$ 中，AD 是$\angle BAC$ 的外角平分线，P 是 AD 上异于点 A 的任一点，试比较 $PB+PC$

与 $AB+AC$ 的大小，并说明理由．



解析 $PB+PC>AB+AC$．

如图，在 BA 的延长线上取一点 E，使 $AE=AC$，连接 EP，

由 AD 是$\angle BAC$ 的外角平分线，可知$\angle CAP=\angle EAP$，

又 AP 是公共边，$AE=AC$，

在$\triangle ACP$ 与$\triangle AEP$ 中$\begin{cases}AE=AC\\ \angle EAP=\angle CAP\\ AP=AP\end{cases}$，

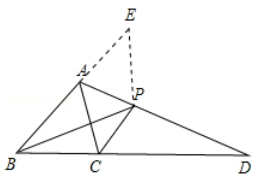
$\therefore\triangle ACP\cong\triangle AEP(SAS)$，

从而有 $PC=PE$，在$\triangle BPE$ 中，$PB+PE>BE$，

而 $BE=AB+AE=AB+AC$，

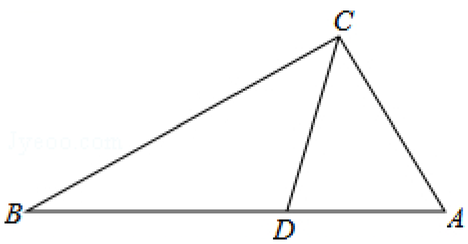
故 $PB+PE>AB+AC$，

所以 $PB+PC>AB+AC$．



【巩固练习】

1.已知在$\triangle ABC$ 中，CD 是$\angle ACB$ 的平分线，$\angle A=2\angle B$，$AD=3$，$AC=5$，则 $BC=$____．



答案 8

解析 如图在 BC 边上截取 $CE=AC$，

$\because CD=CD$，$\angle ACD=\angle ECD$，

$\therefore$在$\triangle ACD$ 和$\triangle ECD$ 中$\begin{cases}AC=CE\\ \angle ACD=\angle ECD\\ CD=CD\end{cases}$，

$\therefore\triangle ACD\cong\triangle ECD(SAS)$，