

1.5 平面上的距离

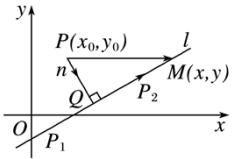
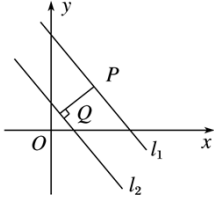
【考点梳理】

考点一：两点间的距离公式

(1) 点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 间的距离公式 $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

(2) 原点 $O(0,0)$ 与任一点 $P(x, y)$ 的距离 $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

考点二：两条平行直线间的距离

	点到直线的距离	两条平行直线间的距离
定义	点到直线的 <u>垂线段</u> 的长度	夹在两条平行直线间 <u>公垂线段</u> 的长
图示		
公式(或求法)	点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离 $d = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$	两条平行直线 $l_1: Ax + By + C_1 = 0$ 与 $l_2: Ax + By + C_2 = 0$ 之间的距离 $d = \frac{ C_1 - C_2 }{\sqrt{A^2 + B^2}}$

【题型归纳】

题型一：两点间的距离公式应用

1. (2023 秋·全国·高二) 以 $A(5,5), B(1,4), C(4,1)$ 为顶点的 $\triangle ABC$ 的形状是 ()

- A. 直角三角形
- B. 等边三角形
- C. 等腰非等边三角形
- D. 等腰直角三角形

【答案】C

【分析】根据平面直角坐标系下任意两点间的距离公式，分别求出 $|AB|, |BC|, |AC|$ 即可判断.

【详解】根据两点间的距离公式，

$$|AB| = \sqrt{(5-1)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{17},$$

$$|AC| = \sqrt{(5-4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{17},$$

$$|BC| = \sqrt{(1-4)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2}, \text{ 所以 } |AB| = |AC| \neq |BC|, \text{ 且 } |AB|^2 + |AC|^2 \neq |BC|^2,$$

故 $\triangle ABC$ 是等腰非等边三角形.

答案: C.

2. (2023·全国·高二专题练习) 已知点 P 在直线 $y = x + 3$ 上, $A(1, 0), B(3, 0)$, 则 $|PA| + |PB|$ 的最小值为 ()

A. $\sqrt{10}$

B. 5

C. $\sqrt{42}$

D. $2\sqrt{13}$

【答案】D

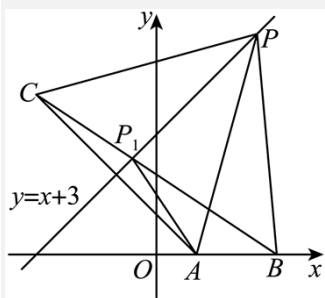
【分析】过点 A 做关于直线 $y = x + 3$ 的对称点 $C(x, y)$, 求出点 C 坐标, 则直线 $y = x + 3$ 是线段 AC 的垂直平分线, 则

$|PA| + |PB| = |PC| + |PB| \geq |BC|$, $|BC|$ 的值即为所求.

【详解】解: 由题知, 过点 A 做关于直线 $y = x + 3$ 的对称点 $C(x, y)$,

取直线 $y = x + 3$ 上一点 P , 连接 PA, PB, PC ,

连接 BC 交 $y = x + 3$ 于点 P_1 , 连接 AP_1, P_1C, AC , 如图所示:



$$\text{则有 } \begin{cases} \frac{x+1}{2} + 3 = \frac{y}{2} \\ \frac{y-0}{x-1} \times 1 = -1 \end{cases}, \text{解得 } \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}, \text{即 } C(-3, 4),$$

因为 A, C 关于直线 $y = x + 3$ 对称,

所以直线 $y = x + 3$ 是线段 AC 的垂直平分线,

所以 $|PA| = |PC|$, 则 $|PA| + |PB| = |PC| + |PB| \geq |BC|$,

当且仅当点 P 运动到 P_1 处时 $|P_1C| + |P_1B| = |BC|$,

$$\text{所以 } (|PA| + |PB|)_{\min} = |BC| = \sqrt{(3+3)^2 + (0-4)^2} = 2\sqrt{13}.$$

故选: D.

3. (2022 秋·天津蓟州·高二统考期中) 点 $P(-2, -1)$ 到直线 $l: (1+3\lambda)x + (1+\lambda)y - 2 - 4\lambda = 0, (\lambda \in \mathbb{R})$ 的距离最大时, 其最大值以及此时的直线方程分别为 ()

A. $\sqrt{13}; x + y - 2 = 0$

B. $\sqrt{11}; 3x + y - 4 = 0$

C. $\sqrt{13}; 3x+2y-5=0$

D. $\sqrt{11}; 2x-3y+1=0$

【答案】C

【分析】先求出直线 l 过定点 $A(1,1)$, 由几何性质可知 $|PA|$ 即为点 $P(-2,-1)$ 到直线 l 的距离最大值, 进而求出 $|PA|=\sqrt{13}$, 得到此时直线 PA 的斜率, 从而求出方程.

【详解】 $l: (1+3\lambda)x + (1+\lambda)y - 2 - 4\lambda = 0, (\lambda \in \mathbb{R})$ 变形为 $x + y - 2 + (3x + y - 4)\lambda = 0$,

$$\text{故 } \begin{cases} x+y-2=0 \\ 3x+y-4=0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases},$$

故直线 l 过定点 $A(1,1)$,

故 $|PA|$ 为点 $P(-2,-1)$ 到直线 $l: (1+3\lambda)x + (1+\lambda)y - 2 - 4\lambda = 0, (\lambda \in \mathbb{R})$ 的距离最大值,

$$\text{即 } |PA| = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{13},$$

$$\text{且此时直线 } PA \text{ 的斜率为 } k_{PA} = \frac{-1-1}{-2-1} = \frac{2}{3},$$

$$\text{故此时直线方程为 } y-1 = -\frac{3}{2}(x-1), \text{ 整理得: } 3x+2y-5=0.$$

故选: C

题型二: 由两点距离求坐标问题

4. (2022 秋·安徽合肥·高二校) 已知菱形 $ABCD$ 的对角线 BD 与 x 轴平行, $D(-3,1)$, $A(-1,0)$, 则 C 点的坐标为 ()

A. $(-1,2)$

B. $(-2,1)$

C. $(-1,1)$

D. $(2,2)$

【答案】A

【分析】根据菱形对角线互相垂直可知 $AC \perp x$ 轴, 则可设 $C(-1,t)$, 由 $|AD|=|CD|$ 可构造方程求得结果.

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形, $BD \parallel x$ 轴, $\therefore AC \perp x$ 轴, $\therefore$ 可设 $C(-1,t)$,

$$\because |AD|=|CD|, \therefore \sqrt{(-3+1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(-3+1)^2 + (1-t)^2},$$

$$\text{解得: } t=0 \text{ (舍) 或 } t=2, \therefore C(-1,2).$$

故选: A.

5. (2022·高二课时练习) 在 x 轴上找一点 Q , 使点 Q 与 $A(5,12)$ 间的距离为 13, 则 Q 点的坐标为_____.

【答案】 $(0,0)$ 或 $(10,0)$ / $(10,0)$ 或 $(0,0)$

【分析】根据两点之间距离公式求解.

【详解】设 $Q(x_0, 0)$ ，则有 $\sqrt{(x_0 - 5)^2 + 12^2} = 13$ ，解得 $x_0 = 0$ 或 $x_0 = 10$ 。

即 $Q(0, 0)$ 或 $Q(10, 0)$ 。

故答案为：(0,0) 或 (10,0)。

6. (2020 秋·内蒙古包头·高二包头市第四中学校考阶段练习) 已知直线 l 在 y 轴上的截距是 -3 ，它被两坐标轴截得的线段的长为 5 ，则此直线的方程为_____

【答案】 $3x + 4y + 12 = 0$ 或 $3x - 4y - 12 = 0$

【分析】设直线交 x 轴于 $(a, 0)$ ，结合已知有 $\sqrt{a^2 + 9} = 5$ 求 a 值，再应用截距式写出直线方程。

【详解】设直线与 x 轴交于点 $(a, 0)$ ，与 y 轴交于点 $(0, -3)$ ，

由题设 $\sqrt{a^2 + 9} = 5$ ，解得 $a = \pm 4$ ，

故所求的直线方程为 $\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$ 或 $\frac{x}{-4} + \frac{y}{-3} = 1$ ，即 $3x + 4y + 12 = 0$ 或 $3x - 4y - 12 = 0$ 。

故答案为： $3x + 4y + 12 = 0$ 或 $3x - 4y - 12 = 0$

题型三：两点间的距离公式求函数最值问题

7. (2023·全国·高二专题练习) 著名数学家华罗庚曾说过：“数形结合百般好，割裂分家万事休。”事实上，有很多代数问题可以转化为几何问题加以解决，如： $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ 可以转化为点 (x, y) 到点 (a, b) 的距离，则

$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 8}$ 的最小值为 ()。

A. 3

B. $2\sqrt{2} + 1$

C. $2\sqrt{3}$

D. $\sqrt{13}$

【答案】D

【分析】把目标式进行转化，看作动点到两个定点距离和的最值，利用对称性可得答案。

【详解】 $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 8} = \sqrt{(x-0)^2 + (0-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (0-2)^2}$ ，

可以看作点 $P(x, 0)$ 到点 $A(0, 1)$, $B(2, 2)$ 的距离之和，

作点 A 关于 x 轴的对称点 $A'(0, -1)$ ，显然当 B, P, A' 三点共线时，取到最小值，

最小值为 B, A' 间的距离 $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ 。

故选：D。

8. (2023·全国·高二专题练习) 代数式 $\sqrt{x^2 + (x-2)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (x-3)^2}$ 的最小值为 ()

A. $2\sqrt{3}$

B. $\sqrt{10}$

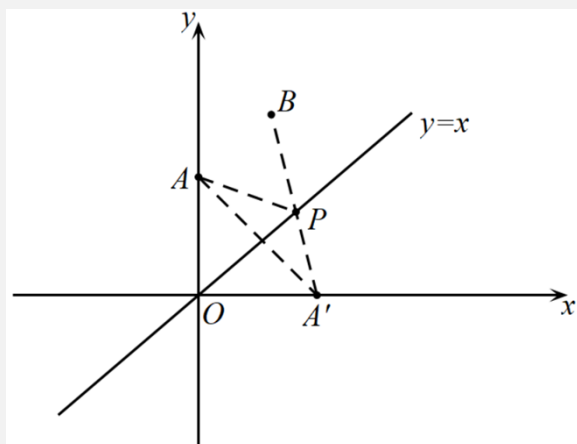
C. $2\sqrt{2}$

D. $\sqrt{6}$

【答案】B

【分析】由两点之间距离公式分析出 $\sqrt{x^2+(x-2)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(x-3)^2}$ 表示 $P(x,x)$ 到 $A(0,2)$ 、 $B(1,3)$ 的距离之和，求出 $A(0,2)$ 关于 $y=x$ 对称点为 $A'(2,0)$ ，连接 $A'B$ 交 $y=x$ 于点 P ，此时 $PA+PB$ 最小。

【详解】



由两点之间距离公式可以得到 $\sqrt{x^2+(x-2)^2}$ 表示点 $P(x,x)$ 到 $A(0,2)$ 的距离， $\sqrt{(x-1)^2+(x-3)^2}$ 表示点 $P(x,x)$ 到 $B(1,3)$ 的距离，

所以代数式 $\sqrt{x^2+(x-2)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(x-3)^2}$ 表示 $PA+PB$ ，由图像可知 $P(x,x)$ 在 $y=x$ 在运动，所以易得 $A(0,2)$ 关于 $y=x$ 对称点为 $A'(2,0)$ ，

连接 $A'B$ 交 $y=x$ 于点 P ，此时 $PA+PB$ 最小，最小值为 $\sqrt{(2-1)^2+(0-3)^2}=\sqrt{10}$ 。

故选：B.

9. (2022 秋·河南南阳·高二校联考阶段练习) 著名数学家华罗庚曾说过：“数形结合百般好，隔裂分家万事休”事实上，有很多代数问题可以转化为几何问题加以解决，如： $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 可以转化为平面上点 $M(x,y)$ 与点 $N(a,b)$ 之间的距离。结合上述观点，可得 $f(x)=\sqrt{x^2+8x+20}+\sqrt{x^2+4x+20}$ 的最小值为 ()

A. $\sqrt{29}$

B. $\sqrt{31}$

C. $2\sqrt{10}$

D. $2+\sqrt{13}$

【答案】C

【分析】利用两点间的距离公式求解即可。

【详解】 $f(x)=\sqrt{x^2+8x+20}+\sqrt{x^2+4x+20}=\sqrt{(x+4)^2+4}+\sqrt{(x+2)^2+16}$ ，

可以看做平面上点 $M(x,0)$ 与点 $A(-4,2)$ ， $B(-2,4)$ 的距离和，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/638103001121006077>