

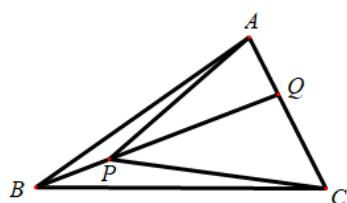
湖北省武汉第二中学 2022-2023 学年高考模拟第二次测试数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 Q 为线段 AC 上靠近点 A 的三等分点，点 P 为线段 BQ 上靠近点 B 的三等分点，则 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} =$ ()



- A. $\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ B. $\frac{5}{9}\overrightarrow{BA} + \frac{7}{9}\overrightarrow{BC}$ C. $\frac{1}{9}\overrightarrow{BA} + \frac{10}{9}\overrightarrow{BC}$ D. $\frac{2}{9}\overrightarrow{BA} + \frac{7}{9}\overrightarrow{BC}$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列， S_n 为其前 n 项和， $4 + a_5 = a_6 + a_{10}$ ，则 $S_{21} =$ ()

- A. 7 B. 14 C. 28 D. 84

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公差的等差数列， $\{b_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，设 $c_n = a_{b_n}$ ，

$T_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)，则当 $T_n < 2020$ 时， n 的最大值是 ()

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

4. 甲、乙两名学生的六次数学测验成绩(百分制)的茎叶图如图所示.

甲	乙
	6 9
6 2	7 8
6 2 0	8 7 8
0	9 2 6

①甲同学成绩的中位数大于乙同学成绩的中位数；

②甲同学的平均分比乙同学的平均分高；

③甲同学的平均分比乙同学的平均分低；

④甲同学成绩的方差小于乙同学成绩的方差.

以上说法正确的是 ()

- A. ③④ B. ①② C. ②④ D. ①③④

5. 已知复数 $z_1 = 1 + ai$ ($a \in R$), $z_2 = 1 + 2i$ (i 为虚数单位), 若 $\frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数, 则 $a =$ ()

- A. -2 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

6. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F , A, B 是抛物线上两个不同的点, 若 $|AF| + |BF| = 8$, 则线段 AB 的中点到 y 轴的距离为 ()

- A. 5 B. 3 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

7. 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 内单调递减, $a = f(\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3})$, $b = f\left(\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$, $c = f\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$, 则 a, b, c 满足 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < a < b$ C. $b < c < a$ D. $c < b < a$

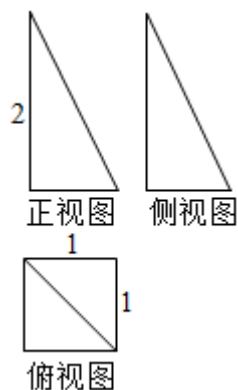
8. 已知 m, n 是两条不重合的直线, α, β 是两个不重合的平面, 则下列命题中错误的是 ()

- A. 若 $m \parallel \alpha$, $\alpha \parallel \beta$, 则 $m \parallel \beta$ 或 $m \subset \beta$
B. 若 $m \parallel n$, $m \parallel \alpha$, $n \not\subset \alpha$, 则 $n \parallel \alpha$
C. 若 $m \perp n$, $m \perp \alpha$, $n \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$
D. 若 $m \perp n$, $m \perp \alpha$, 则 $n \parallel \alpha$

9. 已知函数 $f(x) = e^x + b$ 的一条切线为 $y = a(x+1)$, 则 ab 的最小值为 ()

- A. $-\frac{1}{2e}$ B. $-\frac{1}{4e}$ C. $-\frac{1}{e}$ D. $-\frac{2}{e}$

10. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ()



- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

11. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 15 > 0\}$, $B = \{x | 0 < x < 7\}$, 则 $(\complement_R A) \cup B$ 等于()

- A. $[-5, 7)$ B. $[-3, 7)$ C. $(-3, 7)$ D. $(-5, 7)$

12. 已知非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $|\vec{a}| = 3$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 则 $|\vec{b}| =$ ()

- A. 6 B. $3\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 3

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 如图是一个算法伪代码，则输出的 i 的值为_____.

```

S ← 9
i ← 1
While S ≥ 0
    S ← S - i
    i ← i + 1
End While
Print i

```

14. $\left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^8$ 展开式的第 5 项的系数为_____.

15. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ x + 2y - 4 \leq 0, \\ 2x - y - 6 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = 3x + 4y$ 的最小值为_____.

16. 在 $(2+x)^5$ 的展开式中, x^2 的系数为_____.(用数字作答)

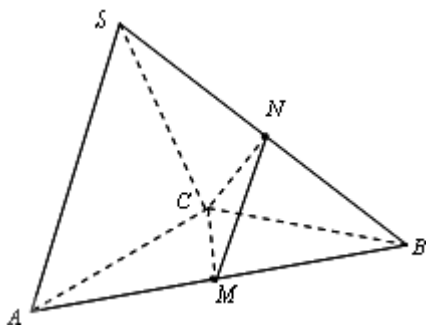
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c , 且 $a \cos B = \frac{1}{2}b + c$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 求 $\sin^2 B + \sin^2 C + \sin B \sin C$ 的值.

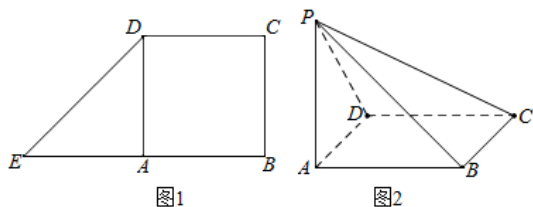
18. (12 分) 在三棱锥 $S-ABC$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的正三角形, 平面 $SAC \perp$ 平面 ABC , $SA = SC = 2$, M, N 分别为 AB, SB 的中点.



(1) 证明: $AC \perp SB$;

(2) 求三棱锥 $B-CMN$ 的体积.

19. (12分) 如图1, 已知四边形 $BCDE$ 为直角梯形, $\angle B = 90^\circ$, $BE \parallel CD$, 且 $BE = 2CD = 2BC = 2$, A 为 BE 的中点. 将 $\triangle VEDA$ 沿 AD 折到 $\triangle VPA$ 位置 (如图2), 连结 PC , PB 构成一个四棱锥 $P-ABCD$.



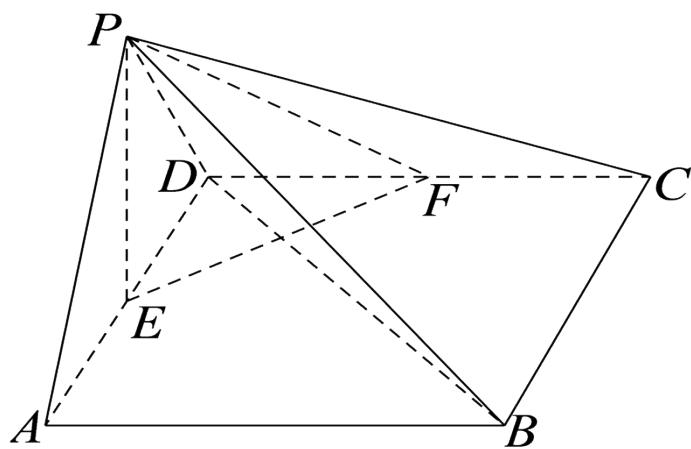
(I) 求证 $AD \perp PB$;

(II) 若 $PA \perp$ 平面 $ABCD$.

① 求二面角 $B-PC-D$ 的大小;

② 在棱 PC 上存在点 M , 满足 $\vec{PM} = \lambda \vec{PC}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), 使得直线 AM 与平面 PBC 所成的角为 45° , 求 λ 的值.

20. (12分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $\triangle PAD$ 为正三角形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, E, F 分别是 AD, CD 的中点.



(1) 证明: $BD \perp$ 平面 PEF

(2) 若 $\angle BAD = 60^\circ$, 求二面角 $B-PD-A$ 的余弦值.

21. (12 分) 设函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - ax$, $a \in R$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) $a \leq 1$ 时, 若 $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) + f(x_2) = 2$, 求证: $x_1 + x_2 < 0$.

22. (10 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1 = 1$, $a_4 \cdot a_5 = 11$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n ;

(2) 设 $b_n = a_n \cdot 3^n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. B

【解析】

$PA + PC = BA - BP + BC - BP = BA + BC - \frac{2}{3}BQ$, 将 $BQ = BA + AQ = BA + \frac{1}{3}AC$, $AC = BC - BA$ 代入化简即可.

【详解】

$$PA + PC = BA - BP + BC - BP = BA + BC - \frac{2}{3}BQ$$

$$= BA + BC - \frac{2}{3}(BA + AQ)$$

$$= \frac{1}{3}BA + BC - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}AC$$

$$= \frac{1}{3}BA + BC - \frac{2}{9}(BC - BA) = \frac{5}{9}BA + \frac{7}{9}BC.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查平面向量基本定理的应用, 涉及到向量的线性运算、数乘运算, 考查学生的运算能力, 是一道中档题.

2. D

【解析】

利用等差数列的通项公式，可求解得到 $a_{11} = 4$ ，利用求和公式和等差中项的性质，即得解

【详解】

$$Q \ 4 + a_5 = a_6 + a_{10},$$

$$\therefore 4 + a_{11} - 6d = a_{11} - 5d + a_{11} - d$$

解得 $a_{11} = 4$.

$$\therefore S_{21} = \frac{21(a_1 + a_{21})}{2} = 21a_{11} = 84.$$

故选：D

【点睛】

本题考查了等差数列的通项公式、求和公式和等差中项，考查了学生综合分析，转化划归，数学运算的能力，属于中档题.

3. B

【解析】

根据题意计算 $a_n = 2n - 1$ ， $b_n = 2^{n-1}$ ， $T_n = 2^{n+1} - n - 2$ ，解不等式得到答案.

【详解】

$\because \{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公差的等差数列， $\therefore a_n = 2n - 1$.

$\because \{b_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列， $\therefore b_n = 2^{n-1}$.

$$\therefore T_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n = a_{b_1} + a_{b_2} + \cdots + a_{b_n} = a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2^{n-1}}$$

$$= (2 \times 1 - 1) + (2 \times 2 - 1) + (2 \times 4 - 1) + \cdots + (2 \times 2^{n-1} - 1) = 2(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1}) - n = 2 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} - n = 2^{n+1} - n - 2.$$

$\because T_n < 2020$ ， $\therefore 2^{n+1} - n - 2 < 2020$ ，解得 $n \leq 9$. 则当 $T_n < 2020$ 时， n 的最大值是 9.

故选：B.

【点睛】

本题考查了等差数列，等比数列，f 分组求和，意在考查学生对于数列公式方法的灵活运用.

4. A

【解析】

由茎叶图中数据可求得中位数和平均数，即可判断①②③，再根据数据集中程度判断④.

【详解】

由茎叶图可得甲同学成绩的中位数为 $\frac{80+82}{2}=81$, 乙同学成绩的中位数为 $\frac{87+88}{2}=87.5$, 故①错误;

$\bar{x}_{\text{甲}} = \frac{1}{6} \times (72+76+80+82+86+90) = 81$, $\bar{x}_{\text{乙}} = \frac{1}{6} \times (69+78+87+88+92+96) = 85$, 则 $\bar{x}_{\text{甲}} < \bar{x}_{\text{乙}}$, 故②错误, ③正确;

显然甲同学的成绩更集中, 即波动性更小, 所以方差更小, 故④正确,

故选:A

【点睛】

本题考查由茎叶图分析数据特征, 考查由茎叶图求中位数、平均数.

5. C

【解析】

把 $z_1 = 1 + ai$ ($a \in R$), $z_2 = 1 + 2i$ 代入 $\frac{z_1}{z_2}$, 利用复数代数形式的除法运算化简, 由实部为 0 且虚部不为 0 求解即可.

【详解】

$\because z_1 = 1 + ai$ ($a \in R$), $z_2 = 1 + 2i$,

$$\therefore \frac{z_1}{z_2} = \frac{1+ai}{1+2i} = \frac{(1+ai)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1+2a}{5} + \frac{a-2}{5}i,$$

$\because \frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数,

$$\therefore \begin{cases} 1+2a=0 \\ a-2 \neq 0 \end{cases}, \text{解得 } a = -\frac{1}{2}.$$

故选 C.

【点睛】

本题考查复数代数形式的除法运算, 考查复数的基本概念, 是基础题.

6. D

【解析】

由抛物线方程可得焦点坐标及准线方程, 由抛物线的定义可知 $|AF| + |BF| = x_1 + 2 + x_2 + 2 = 8$, 继而可求出

$x_1 + x_2 = 4$, 从而可求出 AB 的中点的横坐标, 即为中点到 y 轴的距离.

【详解】

解: 由抛物线方程可知, $2p = 8$, 即 $p = 4$, $\therefore F(2, 0)$. 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

则 $|AF| = x_1 + 2, |BF| = x_2 + 2$, 即 $|AF| + |BF| = x_1 + 2 + x_2 + 2 = 8$, 所以 $x_1 + x_2 = 4$.

所以线段 AB 的中点到 y 轴的距离为 $\frac{x_1 + x_2}{2} = 2$.

故选:D.

【点睛】

本题考查了抛物线的定义,考查了抛物线的方程.本题的关键是由抛物线的定义求得 A, B 两点横坐标的和.

7. D

【解析】

首先由函数为偶函数,可得函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内单调递增,再由 $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} > \left| \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) \right| > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$, 即可判定大小

【详解】

因为偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 减, 所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上增,

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} > 1, \left| \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) \right| \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \therefore c < b < a.$$

故选: D

【点睛】

本题考查函数的奇偶性和单调性,不同类型的数比较大小,应找一个中间数,通过它实现大小关系的传递,属于中档题.

8. D

【解析】

根据线面平行和面面平行的性质,可判定 A; 由线面平行的判定定理,可判断 B; C 中可判断 α, β 所成的二面角为 90° ; D 中有可能 $n \subset \alpha$, 即得解.

【详解】

选项 A: 若 $m \parallel \alpha, \alpha \parallel \beta$, 根据线面平行和面面平行的性质,有 $m \parallel \beta$ 或 $m \subset \beta$, 故 A 正确;

选项 B: 若 $m \parallel n, m \parallel \alpha, n \not\subset \alpha$, 由线面平行的判定定理,有 $n \parallel \alpha$, 故 B 正确;

选项 C: 若 $m \perp n, m \perp \alpha, n \perp \beta$, 故 α, β 所成的二面角为 90° , 则 $\alpha \perp \beta$, 故 C 正确;

选项 D, 若 $m \perp n, m \perp \alpha$, 有可能 $n \subset \alpha$, 故 D 不正确.

故选: D

【点睛】

本题考查了空间中的平行垂直关系判断,考查了学生逻辑推理,空间想象能力,属于中档题.

9. A

【解析】

求导得到 $f'(x) = e^x$ ，根据切线方程得到 $b = a \ln a$ ，故 $ab = a^2 \ln a$ ，设 $g(x) = x^2 \ln x$ ，求导得到函数在 $\left(0, e^{\frac{1}{2}}\right)$ 上

单调递减, 在 $\left(e^{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$ 上单调递增, 故 $g(x)_{\min} = g\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$, 计算得到答案.

【详解】

$f(x)=e^x+b$, 则 $f'(x)=e^x$, 取 $e^{x_0}=a$, ($a>0$), 故 $x_0=\ln a$, $f(x_0)=a+b$.

故 $a+b=a(\ln a+1)$, 故 $b=a \ln a$, $ab=a^2 \ln a$.

设 $g(x) = x^2 \ln x$, $g'(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$, 取 $g'(x) = 0$, 解得 $x = e^{-\frac{1}{2}}$.

故函数在 $\left(0, e^{\frac{1}{2}}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(e^{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$ 上单调递增, 故 $g(x)_{\min} = g\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2e}$.

故选: A .

【点睛】

本题考查函数的切线问题，利用导数求最值，意在考查学生的计算能力和综合应用能力.

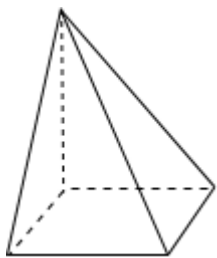
10. A

【解析】

利用已知条件画出几何体的直观图，然后求解几何体的体积.

【详解】

几何体的三视图的直观图如图所示,



则该几何体的体积为: $\frac{1}{3} \times 1 \times 1 \times 2 = \frac{2}{3}$.

故选: A .

【点睛】

本题考查三视图求解几何体的体积，判断几何体的形状是解题的关键.

11. **B**

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/638121004051006137>