

三明市 2024 年普通高中高三毕业班质量检测

数学试题

(本试卷总分 150 分, 考试时间 120 分钟.)

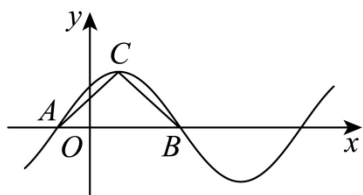
注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时, 选出每题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后, 将答题卡交回.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 直线 $l: y = x + 2$ 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 相交于 A, B 两点, 则 $|AB| =$ ()
A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 2 D. 4
2. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $a = 3, b = \sqrt{37}, c = 7$, 则 $A + C$ 的值为 ()
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$
3. 随机变量 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 函数 $f(x) = x^2 - 4x + \xi$ 没有零点的概率是 $\frac{1}{2}$, 则 μ 的值为 ()
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
4. 若 $a = \left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}, b = \left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}, c = \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3}$, 则 ()
A. $c > a > b$ B. $c > b > a$ C. $a > b > c$ D. $b > c > a$
5. 各种不同的进制在生活中随处可见, 计算机使用的是二进制, 数学运算一般使用的是十进制, 任何进制数均可转换为十进制数, 如八进制数 $(3750)_8$ 转换为十进制数的算法为 $3 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 0 \times 8^0 = 2024$. 若将八进制数 $\overline{17237}_8$ 转换为十进制数, 则转换后的数的末位数字是 ()
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
6. 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$ 的部分图象如图所示, 其中 A, B 两点为图象与 x 轴的交点, C 为图象的最高点, 且 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 若 $\overrightarrow{OB} = -3\overrightarrow{OA}$, 则向量 $\overrightarrow{AO}$ 在向量 $\overrightarrow{AC}$

上的投影向量的坐标为 ()



- A. $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ B. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
C. $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ D. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

7. 已知抛物线 $x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 第一象限的两点 A, B 在抛物线上, 且满足 $|AF| - |BF| = 3, |AB| = 3\sqrt{2}$. 若线段 AB 中点的横坐标为 3, 则 p 的值为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

8. 已知函数 $f(x) = e^{x-1} - e^{1-x} + x^3 - 3x^2 + 3x$, 若实数 x, y 满足 $f(3x^2) + f(2y^2 - 4) = 2$, 则 $x + y$ 的最大值为 ()

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{30}}{3}$

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. i 是虚数单位，下列说法正确的是 ()

A. $i^{2024} = -1$

B. 若 $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则 $\omega^2 = \bar{\omega}$

C. 若 $|z| = 1, z \in \mathbb{C}$, 则 $|z - 2|$ 的最小值为 1

D. 若 $-4 + 3i$ 是关于 x 的方程 $x^2 + px + q = 0$ ($p, q \in \mathbb{R}$) 的根, 则 $q = 7$

10. 假设甲袋中有 3 个红球和 2 个白球, 乙袋中有 2 个白球和 2 个红球. 现从甲袋中任取 2 个球放入乙袋, 混匀后再从乙袋中任取 2 个球. 下列选项正确的是 ()

A. 从甲袋中任取 2 个球是 1 个红球 1 个白球的概率为 $\frac{3}{5}$

B. 从甲、乙两袋中取出的 2 个球均为红球的概率为 $\frac{1}{20}$

C. 从乙袋中取出的 2 个球是红球的概率为 $\frac{37}{150}$

D. 已知从乙袋中取出的是 2 个红球，则从甲袋中取出的也是 2 个红球的概率为 $\frac{18}{37}$

11. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F, G 分别为 AB, BC, C_1D_1 的中点，则下列说法正确的是（ ）

A. 若点 P 在正方体的表面上，且 $\vec{PE} \cdot \vec{PG} = 0$ ，则点 P 的轨迹长度为 24π

B. 若三棱锥 $F-C_1CE$ 的所有顶点都在球 O 的表面上，则球 O 的表面积为 14π

C. 过点 E, F, D_1 的平面截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得截面多边形的周长为 $\sqrt{2} + 2\sqrt{13}$

D. 若用一张正方形的纸把此正方体完全包住，不考虑纸的厚度，不将纸撕开，则所需纸的面积的最小值为 32

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

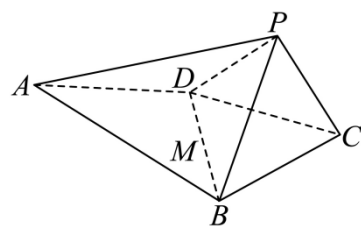
12. 已知从小到大排列的一组数据：1, 5, a , 10, 11, 13, 15, 21, 42, 57，若这组数据的极差是其第 30 百分位数的 7 倍，则 a 的值为_____.

13. 已知关于 x 的不等式 $(x - ke^x)[x^2 - (k+3)x + 9] \leq 0$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 均成立，则实数 k 的取值范围为_____.

14. 记 $N_m^* = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ ($m \in \mathbb{N}^*$), A_k 表示 k 个元素的有限集， $S(E)$ 表示非空数集 E 中所有元素的和，若集合 $M_{m,k} = \{S(A_k) | A_k \subseteq N_m^*\}$ ，则 $M_{4,3} =$ _____，若 $S(M_{m,2}) \geq 817$ ，则 m 的最小值为_____.

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 如图，多面体 $PABCD$ 中， $\triangle PBD$ 和 $\triangle CBD$ 均为等边三角形，平面 $ABD \perp$ 平面 PBD , $BD = 2, PC = \sqrt{3}$.



(1) 求证： $BD \perp PC$;

(2) 求平面 ABD 与平面 PBC 夹角的余弦值.

16. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x + \cos(\omega x + \frac{\pi}{6})$ (其中 $\omega > 0$) 其中图象的两条相邻对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $(0, m)$ 上有最大值无最小值，求实数 m 的取值范围;

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度; 再将图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍 (纵坐标不变), 得到 $g(x)$ 的图象, 设 $h(x) = g(x) + \frac{1}{2}x$, 求 $h(x)$ 在 $(-2\pi, \pi)$ 的极大值点.

17. 某校开设劳动教育课程, 为了有效推动课程实施, 学校开展劳动课程知识问答竞赛, 现有家政、园艺、民族工艺三类问题海量题库, 其中家政类占 $\frac{1}{4}$, 园艺类占 $\frac{1}{4}$, 民族工艺类占 $\frac{1}{2}$. 根据以往答题经验, 选手甲答对家政类、园艺类、民族工艺类题目的概率分别为 $\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}$, 选手乙答对这三类题目的概率均为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求随机任选 1 题, 甲答对的概率;

(2) 现进行甲、乙双人对抗赛, 规则如下: 两位选手进行三轮答题比赛, 每轮只出 1 道题目, 比赛时两位选手同时回答这道题, 若一人答对且另一人答错, 则答对者得 1 分, 答错者得 -1 分, 若两人都答对或都答错, 则两人都得 0 分, 累计得分为正者将获得奖品, 且两位选手答对与否互不影响, 每次答题的结果也互不影响, 求甲获得奖品的概率.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 \cdot a_2 \leq a_{n-1} \cdot a_n = (\sqrt{2})^{n^2+n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若不等式 $(-1)^n t S_n - 14 \leq S_n^2$ 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立, 求实数 t 的取值范围;

(3) 记 $b_n = \frac{1}{\log_2 a_n^2}$, 求证: $\frac{b_1 - b_2}{\sqrt{b_1}} + \frac{b_2 - b_3}{\sqrt{b_2}} + \dots + \frac{b_n - b_{n+1}}{\sqrt{b_n}} < \sqrt{2} (n \in \mathbb{N}^*)$.

19. 已知平面直角坐标系 xOy 中, 有真命题: 函数 $y = mx + \frac{n}{x} (m \geq 0, n > 0)$ 的图象是双曲线, 其渐近线分别为直线 $y = mx$ 和 y 轴. 例如双曲线 $y = \frac{4}{x}$ 的渐近线分别为 x 轴和 y 轴, 可将其图象绕原点 O 顺时针旋转

$\frac{\pi}{4}$ 得到双曲线 $x^2 - y^2 = 8$ 的图象.

(1) 求双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 的离心率;

(2) 已知曲线 $E: x^2 - y^2 = 2$, 过 E 上一点 P 作切线分别交两条渐近线于 A, B 两点, 试探究 $\triangle AOB$ 面积是否为定值, 若是, 则求出该定值; 若不是, 则说明理由;

(3) 已知函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2x}$ 的图象为 Γ , 直线 $l: x + \sqrt{3}y - 3 = 0$, 过 $F(1, \sqrt{3})$ 的直线与 Γ 在第一象限

交于 M, N 两点, 过 M, N 作 l 的垂线, 垂足分别为 C, D , 直线 MD, NC 交于点 H , 求 $\triangle MNH$ 面积的最小值.

三明市 2024 年普通高中高三毕业班质量检测

数学试题

(本试卷总分 150 分, 考试时间 120 分钟.)

注意事项:

- 1.答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
- 2.回答选择题时, 选出每题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
- 3.考试结束后, 将答题卡交回.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 直线 $l: y = x + 2$ 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 相交于 A, B 两点, 则 $|AB| =$ ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 2 D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】根据圆的相关知识即可求得 $|AB|$ 弦长.

【详解】由已知圆 $x^2 + y^2 = 4$, 圆心为 $(0, 0)$, 半径 $r = 2$

所以圆心到直线 $l: y = x + 2$ 距离 $d = \frac{2}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$

所以 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{2}$

故选: B

2. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $a = 3, b = \sqrt{37}, c = 7$, 则 $A + C$ 的值为 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用余弦定理求出角 B 即可得解.

【详解】在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{3^2 + 7^2 - (\sqrt{37})^2}{2 \times 3 \times 7} = \frac{1}{2}$ ，

而 $0 < B < \pi$ ，则 $B = \frac{\pi}{3}$ ，所以 $A + C = \frac{2\pi}{3}$ 。

故选：C

3. 随机变量 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，函数 $f(x) = x^2 - 4x + \xi$ 没有零点的概率是 $\frac{1}{2}$ ，则 μ 的值为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】根据函数 $f(x) = x^2 - 4x + \xi$ 没有零点，求得 $\xi > 4$ ，结合题意可得出 $P(\xi > 4) = \frac{1}{2}$ ，继而由正态分布的对称性，可得答案。

【详解】由函数 $f(x) = x^2 - 4x + \xi$ 没有零点，得 $\Delta = 16 - 4\xi < 0$ ， $\therefore \xi > 4$ ，

函数 $f(x) = x^2 - 4x + \xi$ 没有零点的概率是 $\frac{1}{2}$ ，即 $P(\xi > 4) = \frac{1}{2}$ ，

结合 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，可知 $\mu = 4$ ，

故选：D

4. 若 $a = \left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ ， $b = \left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ ， $c = \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3}$ ，则 ()

A. $c > a > b$

B. $c > b > a$

C. $a > b > c$

D. $b > c > a$

【答案】A

【解析】

【分析】根据幂函数的单调性可判断 a, b 的大小，利用对数函数的单调性判断 a 的范围，即可得答案。

【详解】由题意得 $a = \left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ ， $b = \left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ ，

由于 $y = x^{\frac{2}{3}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，故 $1 = 1^{\frac{2}{3}} > a = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} > b = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ ；

而 $y = \log_{\frac{2}{3}} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，故 $c = \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3} > \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} = 1$ ，

故 $c > a > b$ ，

故选：A

5. 各种不同的进制在生活中随处可见，计算机使用的是二进制，数学运算一般使用的是十进制，任何进制数均可转换为十进制数，如八进制数 $(3750)_8$ 转换为十进制数的算法为 $3 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 0 \times 8^0 = 2024$ 。若将八进制数 $\overset{6\uparrow 7}{\overline{171237}}_8$ 转换为十进制数，则转换后的数的末位数字是 ()

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

【答案】A

【解析】

【分析】换算后由等比数列求和得 $8^6 - 1$ ，改写成 $(10 - 2)^6 - 1$ ，利用二项式定理展开即可求解。

$$\begin{aligned} \text{【详解】} \left(\overset{6\uparrow 7}{\overline{171237}}_8 \right) &= 7 \times 8^5 + 7 \times 8^4 + 7 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 7 \times 8^0 \\ &= 7 \times (8^5 + 8^4 + 8^3 + 8^2 + 8^1 + 8^0) \\ &= 7 \times \frac{1-8^6}{1-8} = 8^6 - 1 = (10 - 2)^6 - 1 \\ &= C_6^0 \cdot 10^6 + C_6^1 \cdot 10^5 \cdot (-2)^1 + \text{L} + C_6^5 \cdot 10^1 \cdot (-2)^5 + C_6^6 \cdot 10^0 \cdot (-2)^6 - 1 \\ &= 10 \times [C_6^0 \cdot 10^5 + C_6^1 \cdot 10^4 \cdot (-2)^1 + \text{L} + C_6^5 \cdot 10^0 \cdot (-2)^5] + C_6^6 \cdot 10^0 \cdot (-2)^6 - 1 \end{aligned}$$

因为 $10 \times [C_6^0 \cdot 10^5 + C_6^1 \cdot 10^4 \cdot (-2)^1 + \text{L} + C_6^5 \cdot 10^0 \cdot (-2)^5]$ 是 10 的倍数，

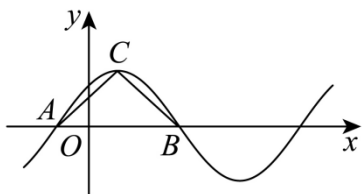
所以换算后这个数的末位数字即为 $C_6^6 \cdot 10^0 \cdot (-2)^6 - 1$ 的末位数字，

由 $C_6^6 \cdot 10^0 \cdot (-2)^6 - 1 = 64 - 1 = 63$ ，末位数字为 3，

故选：A.

6. 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的部分图象如图所示，其中 A, B 两点为图象与 x 轴的交点，

C 为图象的最高点，且 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，若 $\vec{OB} = -3\vec{OA}$ ，则向量 $\vec{AO}$ 在向量 $\vec{AC}$ 上的投影向量的坐标为 ()



A. $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$

B. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

C. $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

D. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

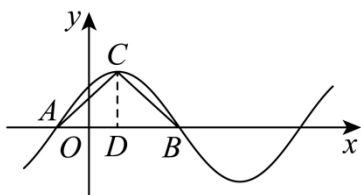
【答案】B

【解析】

【分析】首先求出 $|\vec{AB}| = \frac{\pi}{\omega}$ ，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ，由 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，表示出 A, B, C, D 的坐标，由 $f(x)$ 最大值为 1，即可求出 ω ，根据投影向量计算公式计算即可。

【详解】 $\frac{1}{2}T = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega}$ ，则 $|\vec{AB}| = \frac{\pi}{\omega}$ ，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ，

因为 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，所以 $|AD| = |BD| = |CD|$ ， $\angle CAD = \frac{\pi}{4}$ ，



因为 $\vec{OB} = -3\vec{OA}$ ，所以 $A = (-\frac{\pi}{4\omega}, 0)$ ， $B(\frac{3\pi}{4\omega}, 0)$ ， $D(\frac{\pi}{4\omega}, 0)$ ， $C(\frac{\pi}{4\omega}, \frac{\pi}{2\omega})$ ，

因为 $f(x)$ 最大值为 1，所以 $\frac{\pi}{2\omega} = 1$ ，解得 $\omega = \frac{\pi}{2}$ ，

所以 $A = (-\frac{1}{2}, 0)$ ， $D(\frac{1}{2}, 0)$ ， $C(\frac{1}{2}, 1)$ ，则 $\vec{AO} = (\frac{1}{2}, 0)$ ， $\vec{AC} = (1, 1)$ ，

则 $\vec{AO}$ 在 $\vec{AC}$ 上的投影向量的坐标为： $|\vec{AO}| \cos \angle CAD \cdot \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} (1, 1) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ，

故选：B.

7. 已知抛物线 $x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点为 F ，第一象限的两点 A, B 在抛物线上，且满足 $|AF| - |BF| = 3$ ， $|AB| = 3\sqrt{2}$. 若线段 AB 中点的横坐标为 3，则 p 的值为 ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】B

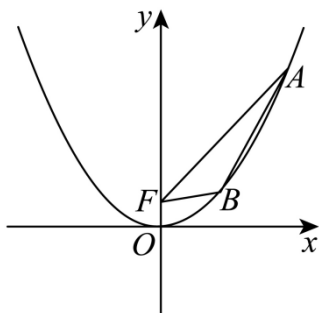
【解析】

【分析】设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，由 $|AF| - |BF| = 3$ 可得 $y_1 - y_2 = 3$ ，结合弦长以及已知求出 $k_{AB} = 1$ ，利

用 $k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ，即可求得答案.

【详解】设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，由 $|AF| - |BF| = 3$ 得 $(y_1 + \frac{p}{2}) - (y_2 + \frac{p}{2}) = 3$ ，

即得 $y_1 - y_2 = 3$ ；



$$\text{又 } |AB| = \sqrt{1 + \frac{1}{k_{AB}^2}} \times |y_1 - y_2| = 3\sqrt{2}, \text{ 解得 } k_{AB}^2 = 1,$$

由于 A, B 在第一象限内, 故 $k_{AB} = 1$,

$$\text{则 } k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{x_2^2}{2p} - \frac{x_1^2}{2p}}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 + x_1}{2p} = 1,$$

而线段 AB 中点的横坐标为 3, 则 $x_1 + x_2 = 6$,

$$\text{故 } \frac{6}{2p} = 1, \therefore p = 3,$$

故选: B

8. 已知函数 $f(x) = e^{x-1} - e^{1-x} + x^3 - 3x^2 + 3x$, 若实数 x, y 满足 $f(3x^2) + f(2y^2 - 4) = 2$, 则 $x + y$ 的最大值为 ()

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{30}}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】先证明 $f(3x^2) + f(2y^2 - 4) = 2$, 进而可得 $3x^2 + 2y^2 - 4 = 2$, 设 $x + y = t$, 则直线 $x + y = t$ 与椭圆 $3x^2 + 2y^2 = 6$ 有交点, 联立方程, 则 $\Delta \geq 0$, 即可得解.

【详解】 $f(x+1) = e^x - e^{-x} + (x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3(x+1) = e^x - e^{-x} + x^3 + 1$,
 $f(-x+1) = e^{-x} - e^x + (-x+1)^3 - 3(-x+1)^2 + 3(-x+1) = e^{-x} - e^x - x^3 + 1$,
 则 $f(x+1) + f(-x+1) = 2$,
 又因为 $f(3x^2) + f(2y^2 - 4) = 2$,

所以 $3x^2 + 2y^2 - 4 = 2$ ，即 $3x^2 + 2y^2 = 6$ ，

设 $x + y = t$ ，

则直线 $x + y = t$ 与椭圆 $3x^2 + 2y^2 = 6$ 有交点，

联立 $\begin{cases} x + y = t \\ 3x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases}$ ，得 $5x^2 - 4tx + 2t^2 - 6 = 0$ ，

则 $\Delta = 16t^2 - 20(2t^2 - 6) \geq 0$ ，解得 $-\sqrt{5} \leq t \leq \sqrt{5}$ ，

所以 $x + y$ 的最大值为 $\sqrt{5}$ 。

故选：C。

【点睛】关键点点睛：证明 $f(3x^2) + f(2y^2 - 4) = 2$ ，可得 $3x^2 + 2y^2 - 4 = 2$ ，是解决本题的关键。

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. i 是虚数单位，下列说法正确的是（ ）

A. $i^{2024} = -1$

B. 若 $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ，则 $\omega^2 = \bar{\omega}$

C. 若 $|z| = 1, z \in \mathbb{C}$ ，则 $|z - 2|$ 的最小值为 1

D. 若 $-4 + 3i$ 是关于 x 的方程 $x^2 + px + q = 0 (p, q \in \mathbb{R})$ 的根，则 $q = 7$

【答案】BC

【解析】

【分析】根据复数的乘方即可判断 A；根据复数的乘法运算及共轭复数的定义即可判断 B；设 $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ ，再根据 $|z| = 1$ ，求出 x, y 的关系，再结合复数的模的公式即可判断 C；根据方程的复数根互为共轭复数即可判断 D。

【详解】对于 A， $i^{2024} = (i^2)^{1012} = (-1)^{1012} = 1$ ，故 A 错误；

对于 B，若 $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ，

则 $\omega^2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \bar{\omega}$ ，故 B 正确；

对于 C, 设 $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$,

由 $|z| = 1$, 得 $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$, 即 $y^2 = 1 - x^2 \geq 0$, 所以 $-1 \leq x \leq 1$,

则 $|z - 2| = \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + 1 - x^2} = \sqrt{-4x + 5} \in [1, 3]$,

所以 $|z - 2|$ 的最小值为 1, 故 C 正确;

对于 D, 若 $-4 + 3i$ 是关于 x 的方程 $x^2 + px + q = 0 (p, q \in \mathbb{R})$ 的根,

则 $-4 - 3i$ 也是关于 x 的方程 $x^2 + px + q = 0 (p, q \in \mathbb{R})$ 的根,

所以 $(-4 + 3i)(-4 - 3i) = q = 25$, 故 D 错误.

故选: BC.

10. 假设甲袋中有 3 个红球和 2 个白球, 乙袋中有 2 个白球和 2 个红球. 现从甲袋中任取 2 个球放入乙袋, 混匀后再从乙袋中任取 2 个球. 下列选项正确的是 ()

A. 从甲袋中任取 2 个球是 1 个红球 1 个白球的概率为 $\frac{3}{5}$

B. 从甲、乙两袋中取出的 2 个球均为红球的概率为 $\frac{1}{20}$

C. 从乙袋中取出的 2 个球是红球的概率为 $\frac{37}{150}$

D. 已知从乙袋中取出的是 2 个红球, 则从甲袋中取出的也是 2 个红球的概率为 $\frac{18}{37}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据给定条件, 结合古典概率公式、条件概率公式及全概率公式逐项计算判断得解.

【详解】从甲袋中取出 2 个球有 i 个红球的事件为 $A_i, i = 0, 1, 2$, 从乙袋中取出 2 个球红球的事件为 B ,

$$P(A_0) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}, \quad P(A_1) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}, \quad P(A_2) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10},$$

$$P(B|A_0) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}, \quad P(B|A_1) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}, \quad P(B|A_2) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{2}{5},$$

对于 A, 从甲袋中任取 2 个球是 1 个红球 1 个白球的概率为 $P(A_1) = \frac{3}{5}$, A 正确;

对于 B, 从甲、乙两袋中取出的 2 个球均为红球的概率为 $P(A_2)P(B|A_2) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{25}$, B 错误;

对于 C, 从乙袋中取出的 2 个球是红球的概率

$$P(B) = \sum_{i=0}^2 P(A_i)P(B|A_i) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{15} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{37}{150}, \text{ C 正确};$$

对于 D, 从乙袋中取出的是 2 个红球, 则从甲袋中取出的也是 2 个红球的概率

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{10} \times \frac{2}{5}}{\frac{37}{150}} = \frac{18}{37}, \text{ D 正确}.$$

故选: ACD

11. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, G 分别为 AB, BC, C_1D_1 的中点, 则下列说法正确的是 ()

A. 若点 P 在正方体的表面上, 且 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PG} = 0$, 则点 P 的轨迹长度为 24π

B. 若三棱锥 $F-C_1CE$ 的所有顶点都在球 O 的表面上, 则球 O 的表面积为 14π

C. 过点 E, F, D_1 的平面截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得截面多边形的周长为 $\sqrt{2} + 2\sqrt{13}$

D. 若用一张正方形的纸把此正方体完全包住, 不考虑纸的厚度, 不将纸撕开, 则所需纸的面积的最小值为 32

【答案】BCD

【解析】

【分析】由 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PG} = 0$ 得到点 P 一定在球面上, 又因为点 P 在正方体的表面上, 可以得到 P 的轨迹为 6 个半径为 1 的圆, 进而得到轨迹长度;

求有一条侧棱垂直于底面的三棱锥 $F-C_1CE$ 的外接球表面积, 即求半径, 根据 $\triangle CEF$ 外接圆半径结合勾股定理即可求得;

利用平行找到过 E, F, D_1 三点的截面, 进而求的截面周长;

利用正方形的对角线长度求得正方形面积.

【详解】A 选项, 因为 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PG} = 0$, 所以 P 在以 EG 为直径的球面上, 又因为 E, G 分别是 AB 和 C_1D_1 的中点, 结合棱切球与各个面的交点为各条棱的中点, 得到该球是正方体的棱切球, 又由 P 在正方体的表面上, 所以 P 的轨迹为 6 个半径为 1 的圆, 所以 P 的轨迹长度为 $6 \times 2\pi = 12\pi$, 故 A 错误;

B 选项, 即求三棱锥 $F-C_1CE$ 即 C_1-CEF 的外接球,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/645014031124011221>