

2024 届陕西省长安区第一中学高三数学试题周四测试)试题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

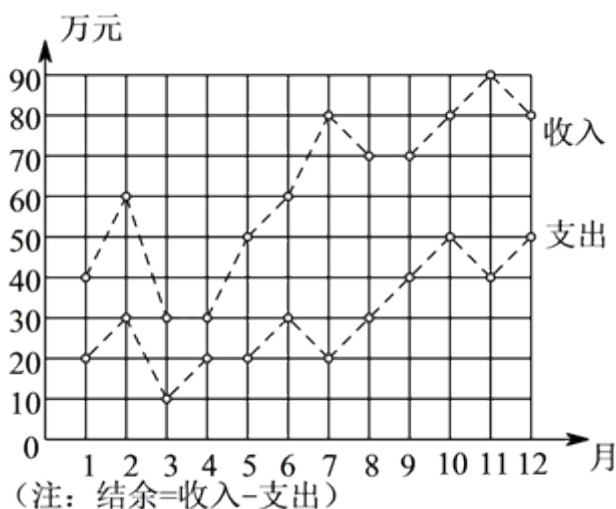
1. 若 $a = \log_4 15.9$, $b = 2^{1.01}$, $c = 0.4^{0.1}$, 则 ()

- A.** $c > a > b$
- B.** $a > b > c$
- C.** $b > a > c$
- D.** $a > c > b$

2. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 4$, $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上投影为 -2 , 则 $|\vec{a} - 3\vec{b}|$ 的最小值为()

- A. 12 B. 10 C. $\sqrt{10}$ D. 2

3. 某工厂一年中各月份的收入、支出情况的统计如图所示, 下列说法中错误的是 ().



- A. 收入最高值与收入最低值的比是3:1
- B. 结余最高的月份是7月份
- C. 1与2月份的收入的变化率与4至5月份的收入的变化率相同
- D. 前6个月的平均收入为40万元

4. 已知 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.2}$, $b = 0.2^{-\frac{1}{2}}$, $c = \log_{\frac{1}{3}} 2$, 则()

- A.** $a > b > c$ **B.** $b > a > c$ **C.** $b > c > a$ **D.** $a > c > b$

5. 已知正三角形 ABC 的边长为 2, D 为边 BC 的中点, E 、 F 分别为边 AB 、 AC 上的动点, 并满足

$|\vec{AE}| = 2|\vec{CF}|$, 则 $\vec{DE} \cdot \vec{DF}$ 的取值范围是 ()

- A. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{16}]$ B. $(-\infty, \frac{1}{16}]$ C. $[-\frac{1}{2}, 0]$ D. $(-\infty, 0]$

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \geq 0 \\ x^2 - 2x, & x < 0 \end{cases}$, 若关于 x 的不等式 $[f(x)]^2 + af(x) < 0$ 恰有 1 个整数解, 则实数 a 的最大值为 ()

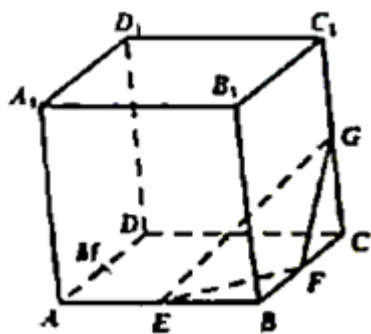
- A. 2 B. 3 C. 5 D. 8

7. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 球 O_1 同时与以 A 为公共顶点的三个面相切, 球 O_2 同时与以 C_1 为公共顶点的三个面相切, 且两球相切于点 F . 若以 F 为焦点, AB_1 为准线的抛物线经过 O_1, O_2 , 设球 O_1, O_2 的半径分别为 r_1, r_2 , 则

$$\frac{r_1}{r_2} = ()$$

- A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ C. $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $2-\sqrt{3}$

8. 如图, 在棱长为 4 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, G 分别为棱 AB, BC, CC_1 的中点, M 为棱 AD 的中点, 设 P, Q 为底面 $ABCD$ 内的两个动点, 满足 $D_1P \parallel$ 平面 EFG , $D_1Q = \sqrt{17}$, 则 $PM + PQ$ 的最小值为 ()

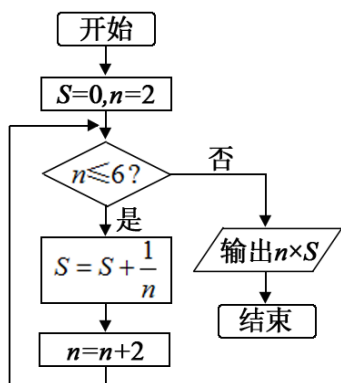


- A. $3\sqrt{2}-1$ B. $3\sqrt{2}-2$ C. $2\sqrt{5}-1$ D. $2\sqrt{5}-2$

9. 函数 $y = f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减, 且 $f(x+1)$ 是偶函数, 若 $f(2x-2) > f(2)$, 则 x 的取值范围是 ()

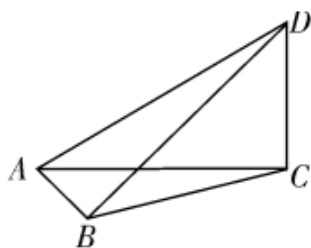
- A. $(2, +\infty)$ B. $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
C. $(1, 2)$ D. $(-\infty, 1)$

10. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 则输出的结果为 ()



- A. $\frac{11}{12}$ B. 6 C. $\frac{11}{2}$ D. $\frac{22}{3}$

11. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB=1$ ， $BC=3$ ， $\angle ABC=120^\circ$ ， $\angle ACD=90^\circ$ ， $\angle CDA=60^\circ$ ，则 BD 的长度为（ ）



- A. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ B. $2\sqrt{3}$
C. $3\sqrt{3}$ D. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

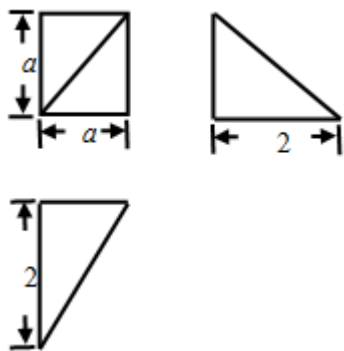
12. 如图，这是某校高三年级甲、乙两班在上学期的 5 次数学测试的班级平均分的茎叶图，则下列说法不正确的是（ ）

甲班					乙班			
			7	9	5		8	
7	3	1		10	1		3	
		2		11			3	

- A. 甲班的数学成绩平均分的平均水平高于乙班
B. 甲班的数学成绩的平均分比乙班稳定
C. 甲班的数学成绩平均分的中位数高于乙班
D. 甲、乙两班这 5 次数学测试的总平均分是 103

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 如图是一个几何体的三视图，若它的体积是 $\frac{2}{3}$ ，则 $a =$ _____，该几何体的表面积为 _____.



14. 若 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{3}$, $\alpha \in (0, \pi)$, 则 $\cos \alpha =$ _____.

15. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 满足 $a_1 = 2$, $3S_n = (n+m)a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{R}$), 且 $a_n b_n = n+1$. 若任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \leq T_{2n} - T_n$ 成立, 则实数 λ 的取值范围为_____.

16. 已知 $\sin(2\alpha + \beta) = p \sin \beta$, $\tan(\alpha + \beta) = p \tan \alpha$, 其中, p 为正的常数, 且 $p \neq 1$, 则 p 的值为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 设函数 $f(x) = |2x+a| + |2x-3|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \leq 6$ 的解集;

(2) 若不等式 $f(x) \geq 4$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

18. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3n^2 + 8n$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_n = b_n + b_{n+1}$.

(I) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

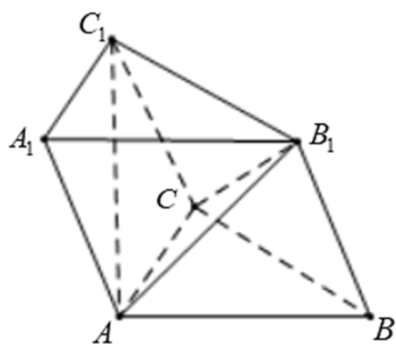
(II) 令 $c_n = \frac{(a_n+1)^{n+1}}{(b_n+2)^n}$. 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - ae^x - 2a^2x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

20. (12 分) 如图, 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 是全等的等边三角形.



(1) 求证: $BC \perp AB_1$;

(2) 若 $\cos \angle B_1BA = \frac{1}{4}$, 求二面角 $B - B_1C - A$ 的余弦值.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = x \ln x - \frac{a}{2}x^2 - x, a \in R, e \approx 2.71828 \dots$ 是自然对数的底数.

(1) 若 $a = -e$, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 求 a 的取值范围, 并证明: $x_1 x_2 > x_1 + x_2$.

22. (10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho \sin^2 \theta = 2a \cos \theta (a > 0)$, 过点 $P(-2, -4)$ 的直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = -4 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (\text{为参数}), \text{ 直线 } l \text{ 与曲线 } C \text{ 交于 } M, N \text{ 两点.}$$

(1) 写出直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 若 $|PM|, |MN|, |PN|$ 成等比数列, 求 a 的值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

利用指数函数和对数函数的单调性比较 a 、 b 、 c 三个数与 1 和 2 的大小关系, 进而可得出 a 、 b 、 c 三个数的大小关系.

【详解】

对数函数 $y = \log_4 x$ 为 $(0, +\infty)$ 上的增函数，则 $1 = \log_4 4 < \log_4 15.9 < \log_4 16 = 2$ ，即 $1 < a < 2$ ；

指数函数 $y = 2^x$ 为 R 上的增函数，则 $b = 2^{1.01} > 2^1 = 2$ ；

指数函数 $y = 0.4^x$ 为 R 上的减函数，则 $c = 0.4^{0.1} < 0.4^0 = 1$ 。

综上所述， $b > a > c$ 。

故选：C。

【点睛】

本题考查指数幂与对数式的大小比较，一般利用指数函数和对数函数的单调性结合中间值法来比较，考查推理能力，属于基础题。

2、B

【解析】

根据 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上投影为 -2 ，以及 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in [-1, 0)$ ，可得 $|\vec{b}|_{\min} = 2$ ；再对所求模长进行平方运算，可将问题转化为模长和夹角运算，代入 $|\vec{a} - 3\vec{b}|_{\min}$ 即可求得 $|\vec{a} - 3\vec{b}|_{\min}$ 。

【详解】

$\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上投影为 -2 ，即 $|\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -2$

Q $|\vec{b}| > 0 \quad \therefore \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle < 0$

又 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in [-1, 0) \quad \therefore |\vec{b}|_{\min} = 2$

$$|\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = \vec{a}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - 6|\vec{a}||\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + 9|\vec{b}|^2 = 9|\vec{b}|^2 + 64$$

$$\therefore |\vec{a} - 3\vec{b}|_{\min} = \sqrt{9 \times 4 + 64} = 10$$

本题正确选项：B

【点睛】

本题考查向量模长的运算，对于含加减法运算的向量模长的求解，通常先求解模长的平方，再开平方求得结果；解题关键是需要通过夹角取值范围的分析，得到 $|\vec{b}|$ 的最小值。

3、D

【解析】

由图可知，收入最高值为90万元，收入最低值为30万元，其比是3:1，故A项正确；

结余最高为7月份，为 $80 - 20 = 60$ ，故B项正确；

1至2月份的收入的变化率为4至5月份的收入的变化率相同，故C项正确；

前6个月的平均收入为 $\frac{1}{6}(40+60+30+30+50+60)=45$ 万元，故D项错误.

综上，故选D.

4、B

【解析】

利用指数函数和对数函数的单调性，将数据和0,1做对比，即可判断.

【详解】

由于 $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^{0.2} < \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$,

$$0.2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{5}}} = \sqrt{5},$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 2 < \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$$

故 $b > a > c$.

故选：B.

【点睛】

本题考查利用指数函数和对数函数的单调性比较大小，属基础题.

5、A

【解析】

建立平面直角坐标系，求出直线 $AB: y = \sqrt{3}(x+1)$ ， $AC: y = -\sqrt{3}(x-1)$

设出点 $E(m, \sqrt{3}(m+1)), F(n, -\sqrt{3}(n-1))$ ，通过 $|\overrightarrow{AE}| = 2|\overrightarrow{CF}|$ ，找出 m 与 n 的关系.

通过数量积的坐标表示，将 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$ 表示成 m 与 n 的关系式，消元，转化成 m 或 n 的二次函数，利用二次函数的相关知识，求出其值域，即为 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$ 的取值范围.

【详解】

以D为原点，BC所在直线为 x 轴，AD所在直线为 y 轴建系，

设 $A(0, \sqrt{3}), B(-1, 0), C(1, 0)$ ，则直线 $AB: y = \sqrt{3}(x+1)$ ， $AC: y = -\sqrt{3}(x-1)$

设点 $E(m, \sqrt{3}(m+1)), F(n, -\sqrt{3}(n-1))$ ， $-1 \leq m < 0, 0 < n \leq 1$

所以 $\overrightarrow{AE} = (m, \sqrt{3}m), \overrightarrow{CF} = (n-1, -\sqrt{3}(n-1))$

由 $|\overrightarrow{AE}| = 2|\overrightarrow{CF}|$ 得 $m^2 = 4(n-1)^2$ ，即 $m = 2(n-1)$ ，

所以 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = mn - 3(m+1)(n-1) = -4n^2 + 7n - 3 = -4(n - \frac{7}{8})^2 + \frac{1}{16}$ ，

由 $-1 \leq m = 2(n-1) < 0$ 及 $0 < n \leq 1$ ，解得 $\frac{1}{2} \leq n < 1$ ，由二次函数 $y = -4(n - \frac{7}{8})^2 + \frac{1}{16}$ 的图像知， $y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{16}]$ ，所以

$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$ 的取值范围是 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{16}]$ 。故选 A。

【点睛】

本题主要考查解析法在向量中的应用，以及转化与化归思想的运用。

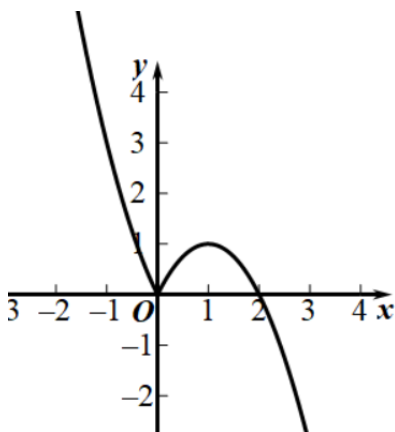
6、D

【解析】

画出函数 $f(x)$ 的图象，利用一元二次不等式解法可得解集，再利用数形结合即可得出。

【详解】

解：函数 $f(x)$ ，如图所示



$$[f(x)]^2 + af(x) < 0 \Rightarrow f(x)(f(x) + a) < 0$$

当 $a > 0$ 时， $-a < f(x) < 0$ ，

由于关于 x 的不等式 $[f(x)]^2 + af(x) < 0$ 恰有 1 个整数解

因此其整数解为 3，又 $f(3) = -9 + 6 = -3$

$\therefore -a < -3 < 0$ ， $-a \geq f(4) = -8$ ，则 $3 < a \leq 8$

当 $a = 0$ 时， $[f(x)]^2 < 0$ ，则 $a = 0$ 不满足题意；

当 $a < 0$ 时， $0 < f(x) < -a$

当 $0 < -a \leq 1$ 时， $0 < f(x) < -a$ ，没有整数解

当 $-a > 1$ 时, $0 < f(x) < -a$, 至少有两个整数解

综上, 实数 a 的最大值为 8

故选: D

【点睛】

本题主要考查了根据函数零点的个数求参数范围, 属于较难题.

7、D

【解析】

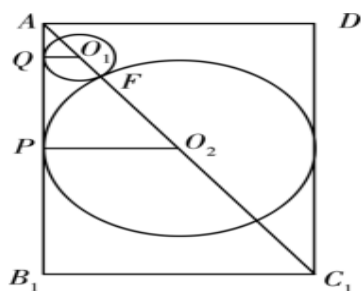
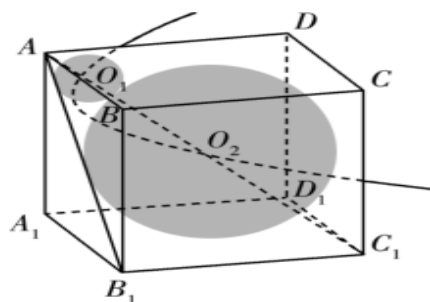
由题先画出立体图, 再画出平面 AB_1C_1D 处的截面图, 由抛物线第一定义可知, 点 O_2 到点 F 的距离即半径 r_2 , 也即点 O_2 到面 CDD_1C_1 的距离, 点 O_2 到直线 AB_1 的距离即点 O_2 到面 ABB_1A_1 的距离因此球 O_2 内切于正方体, 设 $r_2 = 1$, 两球球心和公切点都在体对角线 AC_1 上, 通过几何关系可转化出 r_1 , 进而求解

【详解】

根据抛物线的定义, 点 O_2 到点 F 的距离与到直线 AB_1 的距离相等, 其中点 O_2 到点 F 的距离即半径 r_2 , 也即点 O_2 到面 CDD_1C_1 的距离, 点 O_2 到直线 AB_1 的距离即点 O_2 到面 ABB_1A_1 的距离, 因此球 O_2 内切于正方体, 不妨设 $r_2 = 1$, 两个球心 O_1 , O_2 和两球的切点 F 均在体对角线 AC_1 上, 两个球在平面 AB_1C_1D 处的截面如图所示, 则

$O_2F = r_2 = 1$, $AO_2 = \frac{AC_1}{2} = \sqrt{3}$, 所以 $AF = AO_2 - O_2F = \sqrt{3} - 1$. 又因为 $AF = AO_1 + O_1F = \sqrt{3}r_1 + r_1$, 因此

$(\sqrt{3} + 1)r_1 = \sqrt{3} - 1$, 得 $r_1 = 2 - \sqrt{3}$, 所以 $\frac{r_1}{r_2} = 2 - \sqrt{3}$.



故选: D

【点睛】

本题考查立体图与平面图的转化, 抛物线几何性质的使用, 内切球的性质, 数形结合思想, 转化思想, 直观想象与数学运算的核心素养

8、C

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/645023314043011340>