紫荆中学2024年高考第四次模拟考试试题（卷）

高三数学

命题人：高三数学备课组

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合$A=\{-1,1,2,4\},B=\{x||x-1|\le 1\}$，则$A\cap B=$（　　）

A．$\{-1,2\}$　　B．$\{1,2\}$　　C．$\{1,4\}$　　D．$\{-1,4\}$

2．$(2+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})=$（　　）

A．$-2+4\mathrm{i}$　　B．$-2-4\mathrm{i}$　　C．$6+2\mathrm{i}$　　D．$6-2\mathrm{i}$

3．已知圆锥的底面半径为$\sqrt{2}$，其侧面展开图为一个半圆，则该圆锥的母线长为（　　）

A．2　　B．$2\sqrt{2}$　　C．4　　D．$4\sqrt{2}$

4．若$\tan\theta=-2$，则$\dfrac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=$（　　）

A．$-\dfrac{6}{5}$　　B．$-\dfrac{2}{5}$　　C．$\dfrac{2}{5}$　　D．$\dfrac{6}{5}$

5．设$x\in\mathbf{R}$，则“$\sin x=1$”是“$\cos x=0$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．已知数列$\{a_n\}$，若$a_{n+1}=a_n+a_{n+2}\ (n\in\mathbf{N}^*)$，则称数列$\{a_n\}$为“凸数列”．已知数列$\{b_n\}$为“凸数列”，且$b_1=1$，$b_2=-2$，则$\{b_n\}$的前2 024项的和为（　　）

A．0　　B．1　　C．－5　　D．－1

7．已知两个不等的正实数x，y满足$\ln\dfrac{x}{y}=\dfrac{x-y}{xy}$，则下列结论一定正确的是（　　）

A．$x+y=1$　　B．$xy=1$

C．$x+y>2$　　D．$x+y>3$

8．正四面体$ABCD$的棱长为1，点P是该正四面体内切球球面上的动点，当$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$取得最小值时，点$P$到$AD$的距离为（　　）

A．$\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{12}$　　B．$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{12}$　　C．$\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{12}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

二、选择题 本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9．已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$ 的图像关于点 $\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$ 中心对称，则（　）

A．$f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$ 单调递减

B．$f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$ 有两个极值点

C．直线 $x=\frac{7\pi}{6}$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称轴

D．直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}-x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

10．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则（　）

A．直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 $90°$　　　　B．直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 $90°$

C．直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 $45°$　　D．直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$

11．已知直线 $l:ax+by-r^2=0$ 与圆 $C:x^2+y^2=r^2$，点 $A(a,b)$，则下列说法正确的是（　）

A．若点 A 在圆 C 上，则直线 l 与圆 C 相切　B．若点 A 在圆 C 内，则直线 l 与圆 C 相离

C．若点 A 在圆 C 外，则直线 l 与圆 C 相离　D．若点 A 在直线 l 上，则直线 l 与圆 C 相切

12．已知 O 为坐标原点，点 $P_1(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$P_2(\cos\beta,-\sin\beta)$，$P_3(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$，$A(1,0)$，则（　）

A．$\left|\overrightarrow{OP_1}\right|=\left|\overrightarrow{OP_2}\right|$　　　　B．$\left|\overrightarrow{AP_1}\right|=\left|\overrightarrow{AP_2}\right|$

C．$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}$　　　　D．$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．已知函数 $f(x)=x^3\left(a\cdot 2^x-2^{-x}\right)$ 是偶函数，则 $a=$_____.

14．已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，$a_2a_4a_5=a_3a_6$，$a_9a_{10}=-8$，则 $a_7=$_____.

15．函数 $f(x)=|2x-1|-2\ln x$ 的最小值为_____.

16．在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=60°, AB=2, BC=\sqrt{6}$，$\angle BAC$ 的角平分线交 BC 于 D，则 $AD=$_______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．在 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 所对的边长分别为 a、b、c，$b=a+1$，$c=a+2$..

（1）若$2\sin C=3\sin A$，求$\triangle ABC$的面积；

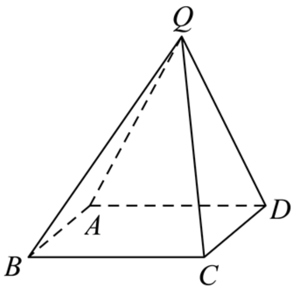
（2）是否存在正整数a，使得$\triangle ABC$为钝角三角形?若存在，求出a的值；若不存在，说明理由.

18．已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, n\text{为奇数},\\ a_n+2, n\text{为偶数}.\end{cases}$

（1）记$b_n=a_{2n}$，写出b_1，b_2，并求数列$\left\{b_n\right\}$的通项公式；

（2）求$\left\{a_n\right\}$的前20项和.

19．在四棱锥$Q-ABCD$中，底面$ABCD$是正方形，若$AD=2, QD=QA=\sqrt{5}, QC=3$.



（1）证明：平面$QAD\perp$平面$ABCD$；

（2）求二面角$B-QD-A$的平面角的余弦值.

20．已知椭圆的一个顶点$A(0,-1)$，焦点在x轴上，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆的标准方程；

（2）设直线$y=kx+m(k\neq 0)$与椭圆交于不同的两点M，N．当$|AM|=|AN|$时，求m的取值范围.

21．某冰糖橙是甜橙的一种，以味甜皮薄著称.该橙按照等级可分为四类：珍品、特级、优级和一级.某采购商打算订购一批橙子销往省外，并从采购的这批橙子中随机抽取100箱（每箱有5kg），利用橙子的等级分类标准得到的数据如下表：

等级	珍品	特级	优级	一级
箱数	40	30	10	20

(1)若将频率作为概率，从这100箱橙子中有放回地随机抽取4箱，求恰好有2箱是一级品的概率；

(2)利用样本估计总体，果园老板提出两种方案供采购商参考：方案一：不分等级出售，价格为27元/kg；方案二：分等级出售，橙子价格如下表.

等级	珍品	特级	优级	一级

价格/（元/kg）	36	30	24	18

从采购商的角度考虑，应该采用哪种方案？

(3)用分层随机抽样的方法从这100箱橙子中抽取10箱，再从抽取的10箱中随机抽取3箱，X表示抽取的珍品的箱数，求X的分布列及均值$E\left(X\right)$.

22．已知函数$f\left(x\right)=x\ln x$.

(1)判断$f\left(x\right)$的单调性；

(2)设方程$f\left(x\right)-2x+1=0$的两个根分别为x_1,x_2，求证：$x_1+x_2>2\mathrm{e}$.

1．B

【分析】方法一：求出集合B后可求$A\cap B$.

【详解】**[方法一]：直接法**

因为$B=\{x\mid 0\leq x\leq 2\}$，故$A\cap B=\{1,2\}$，故选：B.

[方法二]：【最优解】代入排除法

$x=-1$代入集合$B=\{x\mid\left|x-1\right|\leq 1\}$，可得$2\leq 1$，不满足，排除 A、D；

$x=4$代入集合$B=\{x\mid\left|x-1\right|\leq 1\}$，可得$3\leq 1$，不满足，排除 C.

故选：B.

【整体点评】方法一：直接解不等式，利用交集运算求出，是通性通法；

方法二：根据选择题特征，利用特殊值代入验证，是该题的最优解.

2．D

【分析】利用复数的乘法可求$\left(2+2\mathrm{i}\right)\left(1-2\mathrm{i}\right)$.

【详解】$\left(2+2\mathrm{i}\right)\left(1-2\mathrm{i}\right)=2+4-4\mathrm{i}+2\mathrm{i}=6-2\mathrm{i}$，

故选：D.

3．B

【分析】设圆锥的母线长为l，根据圆锥底面圆的周长等于扇形的弧长可求得l的值，即为所求.

【详解】设圆锥的母线长为l，由于圆锥底面圆的周长等于扇形的弧长，则$\pi l=2\pi\times\sqrt{2}$，解得$l=2\sqrt{2}$.

故选：B.

4．C

【分析】将式子先利用二倍角公式和平方关系配方化简，然后增添分母($1=\sin^2\theta+\cos^2\theta$)，进行齐次化处理，化为正切的表达式，代入$\tan\theta=-2$即可得到结果.

【详解】将式子进行齐次化处理得：

$$\frac{\sin\theta\left(1+\sin 2\theta\right)}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\sin\theta\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta\right)}{\sin\theta+\cos\theta}=\sin\theta\left(\sin\theta+\cos\theta\right)$$

$=\dfrac{\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\dfrac{\tan^2\theta+\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{4-2}{1+4}=\dfrac{2}{5}$.

故选：C.

【点睛】易错点睛：本题如果利用 $\tan\theta=-2$，求出 $\sin\theta,\cos\theta$ 的值，可能还需要分象限讨论其正负，通过齐次化处理，可以避开了这一讨论.

5．A

【分析】由三角函数的性质结合充分条件、必要条件的定义即可得解.

【详解】因为 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 可得：

当 $\sin x=1$ 时，$\cos x=0$，充分性成立；

当 $\cos x=0$ 时，$\sin x=\pm1$，必要性不成立；

所以当 $x\in\mathbf{R}$，$\sin x=1$ 是 $\cos x=0$ 的充分不必要条件.

故选：A.

6．D

【分析】根据 $b_{n+2}=b_{n+1}-b_n$，递推出数列 $\{b_n\}$ 是以 6 为周期的周期数列求解.

【详解】解：因为 $b_{n+2}=b_{n+1}-b_n$，所以 $b_3=b_2-b_1=-2-1=-3,b_4=b_3-b_2=-3-(-2)=-1$，

$b_5=b_4-b_3=-1-(-3)=2,b_6=b_5-b_4=2-(-1)=3,b_7=b_6-b_5=3-2=1$，

则数列 $\{b_n\}$ 是以 6 为周期的周期数列，又 $S_6=1-2-3-1+2+3=0$，

所以 $S_{2024}=S_{337\times6+2}=b_1+b_2=-1$，

故选：D

7．C

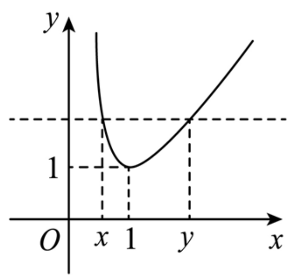
【分析】先化简已知式，构造函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$（$x>0$），并利用导数研究函数性质，画出图象，再利用图象得到 x,y 范围，结合特殊值计算排除错误选项，研究极值点偏移得到答案即可.

【详解】因为 $\ln\dfrac{x}{y}=\dfrac{x-y}{xy}$，所以 $\ln x-\ln y=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}$，即 $\ln x+\dfrac{1}{x}=\ln y+\dfrac{1}{y}$，

令函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，$x>0$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$，

$x\in(0,1)$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，$x\in(1,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 $f(1)=1$，如图所示：



依题意 $f(x)=f(y)$，$x \neq y$，不妨设 $x<y$，由图象可知，$0<x<1<y$，故 $x+y>1$，A 错误；

假设 $xy=1$ 成立，可取 $x=\frac{1}{2}, y=2$，则 $f\left(x\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=2-\ln 2, f\left(y\right)=f\left(2\right)=\frac{1}{2}+\ln 2$，易见不满足题意 $f(x)=f(y)$，即 B 不正确；

如图取 $1<y\leq 2$ 时，设 $f(x)=f(y)=t$，则由 $0<x<1$ 知，可有 $x+y\leq 3$，故 D 错误；

由函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$（$x>0$）中，$0<x<1$ 时，$f(x)\in\left(1,+\infty\right)$，$x>1$ 时，$f(x)\in\left(1,+\infty\right)$，可知 $f(x)=f(y)$，$x \neq y$ 时极值点 $x=1$ 左偏，即 $2\times 1<x+y$，即 $x+y>2$ 一定成立，C 正确.

故选：C.

【点睛】关键点点睛：

本题的解题关键在于构造函数关系 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$（$x>0$），并研究其单调性和极值点，结合图象判断极值点的偏移情况，即突破难点.

8．A

【分析】根据正四面体的体积可求出内切球的半径，取 AD 的中点为 E，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PE}^2-\frac{1}{4}$，可得当 PE 的长度最小时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$ 取得最小值，求出球心 O 到点 E 的距离 d，可得点 P 到 AD 的距离为 $d-r$.

【详解】因为四面体 $ABCD$ 是棱长为 1 的正四面体，

所以其体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{12}$.

设正四面体 $ABCD$ 内切球的半径为 r，

则 $4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times r=\frac{\sqrt{2}}{12}$，得 $r=\frac{\sqrt{6}}{12}$.

如图，取 AD 的中点为 E，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=(\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EA})\cdot(\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{ED})$

$=\overrightarrow{PE}^2+\overrightarrow{PE}\cdot(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED})+\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{PE}^2-\frac{1}{4}$.

显然，当 PE 的长度最小时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$ 取得最小值.

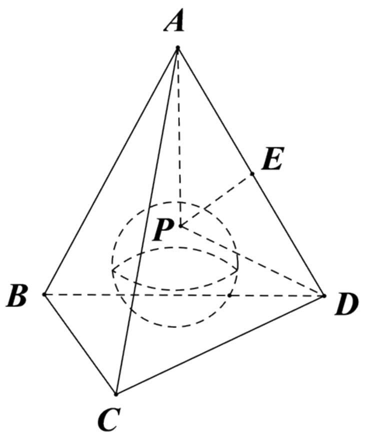
设正四面体内切球的球心为 O，可求得 $OA=OD=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

因为球心O到点E的距离$d=\sqrt{PA^2-AE^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

所以球O上的点P到点E的最小距离为$d-r=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{12}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{12}$，

即当$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$取得最小值时，点$P$到$AD$的距离为$\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{12}$.

故选：A.



【点睛】关键点睛：本题考查几何体的内切球问题，解题的关键是先根据正四面体的体积可求出内切球的半径，得出点P到AD的距离为球心O到点E的距离减去半径.

9．AD

【分析】根据三角函数的性质逐个判断各选项，即可解出.

【详解】由题意得：$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=0$，所以$\frac{4\pi}{3}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

即$\varphi=-\frac{4\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

又$0<\varphi<\pi$，所以$k=2$时，$\varphi=\frac{2\pi}{3}$，故$f(x)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

对 A，当$x\in\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$时，$2x+\frac{2\pi}{3}\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right)$，由正弦函数$y=\sin u$图象知$y=f(x)$在$\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$上是单调递减；

对 B，当$x\in\left(-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$时，$2x+\frac{2\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right)$，由正弦函数$y=\sin u$图象知$y=f(x)$只有 1 个极值点，由$2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$，解得$x=\frac{5\pi}{12}$，即$x=\frac{5\pi}{12}$为函数的唯一极值点；

对 C，当$x=\frac{7\pi}{6}$时，$2x+\frac{2\pi}{3}=3\pi$，$f(\frac{7\pi}{6})=0$，直线$x=\frac{7\pi}{6}$不是对称轴；

对 D，由$y'=2\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=-1$得：$\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$，

解得 $2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ 或 $2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，

从而得：$x=k\pi$ 或 $x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$，

所以函数 $y=f(x)$ 在点 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 处的切线斜率为 $k=y'|_{x=0}=2\cos\frac{2\pi}{3}=-1$，

切线方程为：$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-(x-0)$ 即 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}-x$．

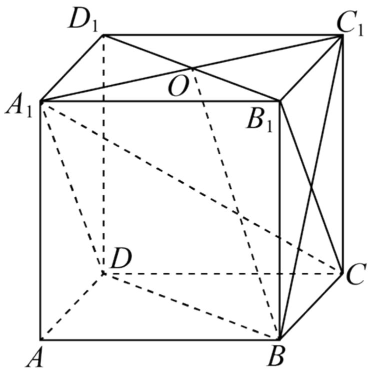
故选：AD．

10．ABD

【分析】数形结合，依次对所给选项进行判断即可.

【详解】如图，连接 B_1C 、BC_1，因为 $DA_1//B_1C$，所以直线 BC_1 与 B_1C 所成的角即为直线 BC_1 与 DA_1 所成的角，

因为四边形 BB_1C_1C 为正方形，则 $B_1C\perp BC_1$，故直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 $90°$，A 正确；



连接 A_1C，因为 $A_1B_1\perp$ 平面 BB_1C_1C，$BC_1\subset$ 平面 BB_1C_1C，则 $A_1B_1\perp BC_1$，

因为 $B_1C\perp BC_1$，$A_1B_1\cap B_1C=B_1$，所以 $BC_1\perp$ 平面 A_1B_1C，

又 $A_1C\subset$ 平面 A_1B_1C，所以 $BC_1\perp CA_1$，故 B 正确；

连接 A_1C_1，设 $A_1C_1\cap B_1D_1=O$，连接 BO，

因为 $BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$C_1O\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，则 $C_1O\perp B_1B$，

因为 $C_1O\perp B_1D_1$，$B_1D_1\cap B_1B=B_1$，所以 $C_1O\perp$ 平面 BB_1D_1D，

所以 $\angle C_1BO$ 为直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角，

设正方体棱长为1，则$C_1O=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$BC_1=\sqrt{2}$，$\sin\angle C_1BO=\dfrac{C_1O}{BC_1}=\dfrac{1}{2}$，

所以，直线BC_1与平面BB_1D_1D所成的角为$30°$，故C错误；

因为$C_1C\perp$平面$ABCD$，所以$\angle C_1BC$为直线BC_1与平面$ABCD$所成的角，易得

$\angle C_1BC=45°$，故D正确.

故选：ABD

11．ABD

【分析】转化点与圆、点与直线的位置关系为a^2+b^2,r^2的大小关系，结合点到直线的距离及直线与圆的位置关系即可得解.

【详解】圆心$C(0,0)$到直线l的距离$d=\dfrac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

若点$A(a,b)$在圆C上，则$a^2+b^2=r^2$，所以$d=\dfrac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=|r|$，

则直线l与圆C相切，故A正确；

若点$A(a,b)$在圆C内，则$a^2+b^2<r^2$，所以$d=\dfrac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}>|r|$，

则直线l与圆C相离，故B正确；

若点$A(a,b)$在圆C外，则$a^2+b^2>r^2$，所以$d=\dfrac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}<|r|$，

则直线l与圆C相交，故C错误；

若点$A(a,b)$在直线l上，则$a^2+b^2-r^2=0$即$a^2+b^2=r^2$，

所以$d=\dfrac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=|r|$，直线$l$与圆$C$相切，故D正确.

故选：ABD.

12．AC

【分析】A、B写出$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$、$\overrightarrow{AP_1}$，$\overrightarrow{AP_2}$的坐标，利用坐标公式求模，即可判断正误；C、D根据向量的坐标，应用向量数量积的坐标表示及两角和差公式化简，即可判断正误.

【详解】A：$\overrightarrow{OP_1}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\overrightarrow{OP_2}=(\cos\beta,-\sin\beta)$，所以$|\overrightarrow{OP_1}|=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1$，