第3章　三角函数

3.2　任意角的三角函数

3.2.3　诱导公式(一)

预习导学

预习导学 挑战自我，点点落实

- [学习目标]
- 1．了解三角函数的诱导公式的意义和作用．
- 2．理解诱导公式的推导过程．
- 3．能运用有关诱导公式解决一些三角函数的求值、化简和证明问题．

预习导学

- [知识链接]
- 1．对于任意一个角α，与它终边相同的角的集合应如何表示？
- **答**　所有与α终边相同的角，连同α在内，可以构成一个集合：$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360°，k\in \mathbf{Z}\}$，即任何一个与角$\alpha$终边相同的角，都可以表示成角$\alpha$与整数个周角的和．

预习导学

- 2．设α为任意角，则$2k\pi+\alpha$，$\pi+\alpha$，$-\alpha$，$2\pi-\alpha$，$\pi-\alpha$的终边与α的终边之间的对称关系.

相关角	终边之间的对称关系
$2k\pi+\alpha$与α	终边相同
$\pi+\alpha$与α	关于__原点__对称
$-\alpha$与α	关于__x轴__对称
$2\pi-$__α__与α	关于__x轴__对称
$\pi-\alpha$与α	关于__y轴__对称

预习导学

- [预习导引]
- 1．诱导公式一～四(其中$k\in\mathbf{Z}$)
- (1)公式一：$\sin(\alpha+2k\pi)=$____$\sin\alpha$，$\cos(\alpha+2k\pi)=$____$\cos\alpha$，
- $\tan(\alpha+2k\pi)=$____$\tan\alpha$.
- (2)公式二：.$\sin(-\alpha)=$____$-\sin\alpha$，$\cos(-\alpha)=$____$\cos\alpha$，
- $\tan(-\alpha)=$____$-\tan\alpha$.
- (3)公式三：$\sin(\pi+\alpha)=$____$-\sin\alpha$，$\cos(\pi+\alpha)=$____$-\cos\alpha$，
- $\tan(\pi+\alpha)=$____$\tan\alpha$.
- (4)公式四：$\sin(\pi-\alpha)=$____$\sin\alpha$，$\cos(\pi-\alpha)=$____$-\cos\alpha$，
- $\tan(\pi-\alpha)=$____$-\cos\alpha$.

预习导学

- 2．诱导公式一～四的记忆方法
- $k\pi\pm\alpha(k\in\mathbf{Z})$的三角函数值，等于$\alpha$的____同名函数值____，前面添上一个把$\alpha$看成锐角时____原函数值的符号____．简记为“____函数名不变，符号看象限____”．

课堂讲义 重点难点，个个击破

要点一　给角求值问题

例1　求下列各三角函数式的值：

(1)$\sin 1\,320°$；　(2)$\cos\left(-\frac{31\pi}{6}\right)$；　(3)$\tan(-945°)$.

解　(1)法一　$\sin 1\,320°=\sin(3\times 360°+240°)$

$=\sin 240°=\sin(180°+60°)=-\sin 60°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

法二　$\sin 1\,320°=\sin(4\times 360°-120°)=\sin(-120°)$

$=-\sin(180°-60°)=-\sin 60°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

课堂讲义

(2)法一　$\cos\left(-\frac{31\pi}{6}\right)=\cos\frac{31\pi}{6}=\cos\left(4\pi+\frac{7\pi}{6}\right)$

$=\cos(\pi+\frac{\pi}{6})=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

法二　$\cos\left(-\frac{31\pi}{6}\right)=\cos\left(-6\pi+\frac{5\pi}{6}\right)$

$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3)$\tan(-945°)=-\tan 945°=-\tan(225°+2\times360°)$

$=-\tan 225°=-\tan(180°+45°)=-\tan 45°=-1$.

- **规律方法** 此问题为已知角求值，主要是利用诱导公式把任意角的三角函数转化为锐角的三角函数求解．如果是负角，一般先将负角的三角函数化为正角的三角函数．

课堂讲义

跟踪演练1　求$\sin\left(2n\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(n\pi+\frac{4\pi}{3}\right)$的值$(n\in\mathbf{Z})$.

解　①当n为奇数时，原式$=\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\left(-\cos\frac{4}{3}\pi\right)$

$=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left[-\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

课堂讲义

②当n为偶数时，原式$=\sin \frac{2}{3}\pi \cdot \cos \frac{4}{3}\pi$

$=\sin \left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos \left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin \frac{\pi}{3} \cdot \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

综上，原式$=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$.

要点二　给值求值问题

例2　已知$\cos(\alpha-75^\circ)=-\frac{1}{3}$，且$\alpha$为第四象限角，求$\sin(105^\circ+\alpha)$的值.

解　$\because \cos(\alpha-75^\circ)=-\frac{1}{3}<0$，且$\alpha$为第四象限角，

$\therefore \alpha-75^\circ$是第三象限角.

$\therefore \sin(\alpha-75^\circ)=-\sqrt{1-\cos^2(\alpha-75^\circ)}$

$=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$\therefore \sin(105^\circ+\alpha)=\sin\left[180^\circ+(\alpha-75^\circ)\right]$

$=-\sin(\alpha-75^\circ)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

课堂讲义

- **规律方法**　解答这类给值求值的问题，首先应把所给的值进行化简，再结合被求值的式子的特点，观察所给值的式子与被求式的特点，找出它们之间的内在联系，特别是角之间的关系，恰当地选择诱导公式.

跟踪演练2　已知$\cos(\pi+\alpha)=-\dfrac{3}{5}$，$\pi<\alpha<2\pi$，求$\sin(\alpha-3\pi)+\cos(\alpha-\pi)$的值.

解　$\because\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\therefore\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，

$\because\pi<\alpha<2\pi$，$\therefore\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，$\therefore\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$.

$\therefore\sin(\alpha-3\pi)+\cos(\alpha-\pi)=-\sin(3\pi-\alpha)+\cos(\pi-\alpha)$

$=-\sin(\pi-\alpha)+(-\cos\alpha)$

$=-\sin\alpha-\cos\alpha=-(\sin\alpha+\cos\alpha)$

$=-\left(-\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{1}{5}$.

要点三　三角函数式的化简

例3　化简下列各式：

(1)$\dfrac{\tan(2\pi-\alpha)\sin(-2\pi-\alpha)\cos(6\pi-\alpha)}{\cos(\alpha-\pi)\sin(5\pi-\alpha)}$；

(2)$\dfrac{\sqrt{1+2\sin 290°\cos 430°}}{\sin 250°+\cos 790°}$.