专题 12 正余弦定理妙解三角形问题和最值问题

【目录】

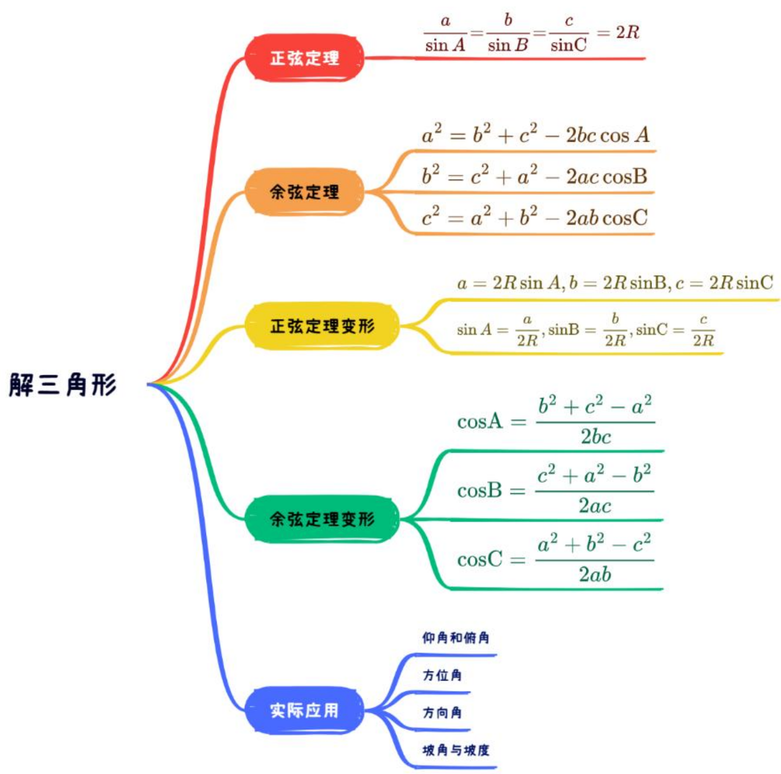
考情分析

解三角形是每年高考常考内容，在选择、填空题中考查较多，有时会出现在选择题、填空题的压轴小

题位置，综合考查以解答题为主，中等难度.

考点要求	考题统计	考情分析
正弦定理	**2023 年北京卷第 7 题，4 分** **2023 年乙卷第 4 题，5 分** **2022 年 II 卷第 18 题，12 分**	**【命题预测】** 预测 **2024** 年高考仍将重点考查已知三角形边角关系利用正弦定理解三角形及利用正余弦定理解平面图形的边、角与面积，题型既有选择也有填空更多是解答题，若考解答题，主要放在前两题位置，为中档题，若为选题可以为基础题，多为中档题，也可为压轴题.
余弦定理	**2022 年乙卷第 17 题，12 分** **2021 年乙卷第 15 题，5 分** **2021 年浙江卷第 14 题，6 分**	
三角形的几何计算	**2023 年甲卷第 16 题，5 分** **2023 年 II 卷第 17 题，10 分** **2022 年天津卷第 16 题，15 分** **2021 年乙卷第 9 题，5 分**	
范围与最值问题	**2022 年上海卷第 19 题，14 分** **2022 年甲卷第 16 题，5 分** **2022 年 I 卷第 18 题，12 分**	

知识建构



方法技巧

1、正弦定理和余弦定理的主要作用，是将三角形中已知条件的边、角关系转化为角的关系或边的关系，基本思想是方程思想，即根据正弦定理、余弦定理列出关于未知元素的方程，通过解方程求得未知元素.

2、与三角形面积或周长有关的问题，一般要用到正弦定理或余弦定理，进行边和角的转化．要适当选用公式，对于面积公式 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$，一般是已知哪一个角就使用哪个公式.

3、对于利用正、余弦定理解三角形中的最值与范围问题，主要有两种解决方法：一是利用基本不等式，求得最大值或最小值；二是将所求式转化为只含有三角形某一个角的三角函数形式，结合角的范围，确定所求式的范围.

4、利用正、余弦定理解三角形，要注意灵活运用面积公式，三角形内角和、基本不等式、二次函数等知识.

5、正弦定理和余弦定理是求解三角形周长或面积最值问题的杀手锏，要牢牢掌握并灵活运用．利用三角公式化简三角恒等式，并结合正弦定理和余弦定理实现边角互化，再结合角的范围、辅助角公式、基本不等式等求其最值.

6、三角形中的一些最值问题，可以通过构建目标函数，将问题转化为求函数的最值，再利用单调性求解.

7、“坐标法”是求解与解三角形相关最值问题的一条重要途径．充分利用题设条件中所提供的特殊边角关系，建立恰当的直角坐标系，选取合理的参数，正确求出关键点的坐标，准确表示出所求的目标，再结合三角形、不等式、函数等知识求其最值.

真题研析

1.（2023•北京）在 ΔABC 中，$(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$，则 $\angle C=($　　$)$

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

【答案】B

【解析】由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 为三角形外接圆半径）可得：

$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$，

所以 $(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$ 可化为 $(a+c)(a-c)=b(a-b)$，

即 $a^2+b^2-c^2=ab$，

$\therefore \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$，

又 $C \in (0,\pi)$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$.

故选：B.

2．（2023•乙卷）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，若 $a\cos B-b\cos A=c$，且 $C=\dfrac{\pi}{5}$，则 $\angle B=(\quad)$

A．$\dfrac{\pi}{10}$　　B．$\dfrac{\pi}{5}$　　C．$\dfrac{3\pi}{10}$　　D．$\dfrac{2\pi}{5}$

【答案】C

【解析】由 $a\cos B-b\cos A=c$ 得 $\sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin C$，

得 $\sin(A-B)=\sin C=\sin(A+B)$，

即 $\sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin A\cos B+\sin B\cos A$，

即 $2\sin B\cos A=0$，得 $\sin B\cos A=0$，

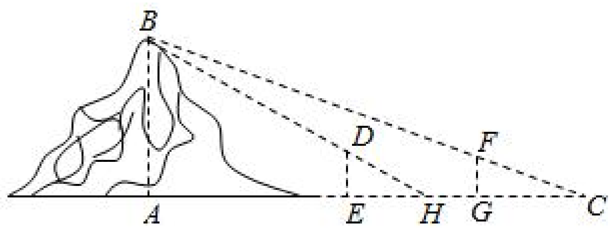
在 ΔABC 中，$\sin B\neq 0$，

$\therefore \cos A=0$，即 $A=\dfrac{\pi}{2}$，

则 $B=\pi-A-C=\pi-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{3\pi}{10}$.

故选：C.

3．（2021•乙卷）魏晋时期刘徽撰写的《海岛算经》是关于测量的数学著作，其中第一题是测量海岛的高．如图，点 E，H，G 在水平线 AC 上，DE 和 FG 是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度，称为“表高”，EG 称为“表距”，GC 和 EH 都称为“表目距”，GC 与 EH 的差称为“表目距的差”，则海岛的高 $AB=($　　$)$



A．$\dfrac{表高\times表距}{表目距的差}+表高$　　B．$\dfrac{表高\times表距}{表目距的差}-表高$

C．$\dfrac{表高\times表距}{表目距的差}+表距$　　D．$\dfrac{表高\times表距}{表目距的差}-表距$

【答案】A

【解析】$\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{EH}{AH}$，$\dfrac{FG}{BA}=\dfrac{CG}{CA}$，故 $\dfrac{EH}{AH}=\dfrac{CG}{CA}$，即 $\dfrac{EH}{AE+EH}=\dfrac{CG}{AE+EG+GC}$，

解得 $AE=\dfrac{EH\cdot EG}{CG-EH}$，$AH=AE+EH$，

故 $AB=\frac{DE\cdot AH}{EH}=\frac{DE\left(AE+EH\right)}{EH}=\frac{DE\cdot AE}{EH}+\frac{DE\cdot EH}{EH}=\frac{DE\cdot EG}{CG-EH}+DE=\frac{表高\times 表距}{表目距的差}+$ 表高.

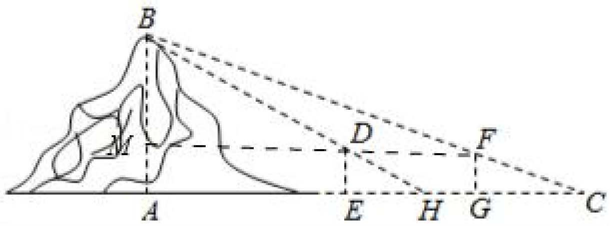
另如图所示，连接 FD 并延长交 AB 于点 M，

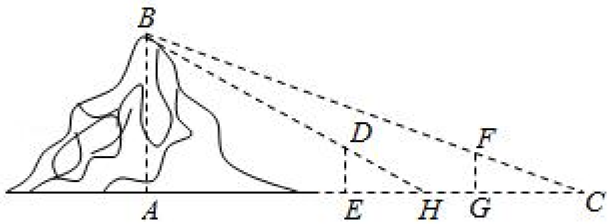
$\frac{表目距的差}{表高}=\frac{GC}{FG}-\frac{EH}{DE}=\frac{AC}{AB}-\frac{AH}{AB}=\frac{CH}{AB}$，

$\frac{表高\times 表距}{表目距的差}=\frac{表距}{\frac{表目距的差}{表高}}=\frac{EG}{\frac{CH}{AB}}=\frac{DF}{CH}\times AB=\frac{BD}{BH}\times AB=\frac{BM}{AB}\times AB=BM$，

$\therefore AB=BM+MA=\frac{表高\times 表距}{表目距的差}+$ 表高.

故选：A.





4．(2022•上海）已知在 ΔABC 中，$\angle A=\frac{\pi}{3}$，$AB=2$，$AC=3$，则 ΔABC 的外接圆半径为 ____.

【答案】$\frac{\sqrt{21}}{3}$.

【解析】在 ΔABC 中，$\angle A=\frac{\pi}{3}$，$AB=2$，$AC=3$，

利用余弦定理 $BC^2=AC^2+AB^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$，整理得 $BC=\sqrt{7}$，

所以 $\frac{BC}{\sin A}=2R$，解得 $R=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{21}}{3}$.

5．(2023•上海）已知 ΔABC 中，角 A，B，C 所对的边 $a=4$，$b=5$，$c=6$，则 $\sin A=$____.

【答案】$\frac{\sqrt{7}}{4}$.

【解析】$a=4$，$b=5$，$c=6$，

由余弦定理得，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{25+36-16}{2\times 5\times 6}=\frac{3}{4}$，

又$\because A\in(0,\pi)$，

$\therefore \sin A>0$，

$\therefore \sin A=\sqrt{1-cos^2 A}=\sqrt{1-(\frac{3}{4})^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{7}}{4}$.

6.（2021•乙卷）记ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，面积为$\sqrt{3}$，$B=60^\circ$，$a^2+c^2=3ac$，则$b=$____.

【答案】$2\sqrt{2}$.

【解析】$\because \Delta ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，面积为$\sqrt{3}$，$B=60^\circ$，$a^2+c^2=3ac$，

$\therefore \frac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}\Rightarrow \frac{1}{2}ac\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\Rightarrow ac=4\Rightarrow a^2+c^2=12$，

又$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{12-b^2}{8}\Rightarrow b=2\sqrt{2}$，（负值舍）

故答案为：$2\sqrt{2}$.

7.（2021•浙江）在ΔABC中，$\angle B=60^\circ$，$AB=2$，M是BC的中点，$AM=2\sqrt{3}$，则$AC=$____；$\cos\angle MAC=$____.

【答案】$2\sqrt{13}$；$\frac{2\sqrt{39}}{13}$.

【解析】在ΔABM中：$AM^2=BA^2+BM^2-2BA\cdot BM\cos 60^\circ$，$\therefore(2\sqrt{3})^2=2^2+BM^2-2\times2\cdot BM\cdot\frac{1}{2}$，

$\therefore BM^2-2BM-8=0$，解得：$BM=4$或-2（舍去）.

$\because$点M是BC中点，$\therefore MC=4$，$BC=8$，在ΔABC中：$AC^2=2^2+8^2-2\times2\times8\cos 60^\circ=52$，$\therefore AC=2\sqrt{13}$；

在ΔAMC中：$\cos\angle MAC=\frac{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{13})^2-4^2}{2\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{39}}{13}$.

故答案为：$2\sqrt{13}$；$\frac{2\sqrt{39}}{13}$.

8.（2022•甲卷）已知ΔABC中，点D在边BC上，$\angle ADB=120^\circ$，$AD=2$，$CD=2BD$．当$\frac{AC}{AB}$取得最小值时，$BD=$____.

【答案】$\sqrt{3}-1$.

【解析】设$BD=x$，$CD=2x$，

在三角形ACD中，$b^2=4x^2+4-2\cdot2x\cdot2\cdot\cos 60^\circ$，可得：$b^2=4x^2-4x+4$，

在三角形ABD中，$c^2=x^2+4-2\cdot x\cdot2\cdot\cos 120^\circ$，可得：$c^2=x^2+2x+4$，

要使得$\dfrac{AC}{AB}$最小，即$\dfrac{b^2}{c^2}$最小，

$\dfrac{b^2}{c^2}=\dfrac{4x^2-4x+4}{x^2+2x+4}=\dfrac{4(x^2+2x+4)-12x-12}{x^2+2x+4}=4-12\cdot\dfrac{x+1}{x^2+2x+4}=4-12\cdot\dfrac{x+1}{(x+1)^2+3}=4-\dfrac{12}{x+1+\dfrac{3}{x+1}}$，

其中$x+1+\dfrac{3}{x+1}\quad 2\sqrt{3}$，此时$\dfrac{b^2}{c^2}\quad 4-2\sqrt{3}$，

当且仅当$(x+1)^2=3$时，即$x=\sqrt{3}-1$或$x=-\sqrt{3}-1$（舍去），即$x=\sqrt{3}-1$时取等号，

故答案为：$\sqrt{3}-1$．

9．（2022•新高考Ⅱ）记ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，分别以a，b，c为边长的三个正三角形的面积依次为S_1，S_2，S_3．已知$S_1-S_2+S_3=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin B=\dfrac{1}{3}$．

（1）求ΔABC的面积；

（2）若$\sin A\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，求$b$．

【解析】（1）$S_1=\dfrac{1}{2}a^2\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$，

$S_2=\dfrac{1}{2}b^2\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2$，

$S_3=\dfrac{1}{2}c^2\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$，

$\because S_1-S_2+S_3=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

解得：$a^2-b^2+c^2=2$，

$\because \sin B=\dfrac{1}{3}$，$a^2-b^2+c^2=2>0$，即$\cos B>0$，

$\therefore \cos B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\therefore \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

解得：$ac=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$．

$\therefore \Delta ABC$的面积为$\dfrac{\sqrt{2}}{8}$．

（2）由正弦定理得：$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，

$\therefore a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}$， $c=\dfrac{b\sin C}{\sin B}$，

由（1）得 $ac=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，

$\therefore ac=\dfrac{b\sin A}{\sin B}\cdot\dfrac{b\sin C}{\sin B}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

已知， $\sin B=\dfrac{1}{3}$， $\sin A\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，

解得： $b=\dfrac{1}{2}$.

10.（2022•乙卷）记 ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$.

（1）证明： $2a^2=b^2+c^2$；

（2）若 $a=5$， $\cos A=\dfrac{25}{31}$，求 ΔABC 的周长.

【解析】（1）证明： ΔABC 中， $\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$，

所以 $\sin C(\sin A\cos B-\cos A\sin B)=\sin B(\sin C\cos A-\cos C\sin A)$ ，

所以 $\sin A\sin B\cos C+\sin A\cos B\sin C=2\cos A\sin B\sin C$，

即 $\sin A(\sin B\cos C+\cos B\sin C)=2\cos A\sin B\sin C$ ，

所以 $\sin A\sin(B+C)=2\cos A\sin B\sin C$ ，

由正弦定理得 $a^2=2bc\cos A$，

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ，

所以 $2a^2=b^2+c^2$；

（2）当 $a=5$， $\cos A=\dfrac{25}{31}$ 时， $b^2+c^2=2\times5^2=50$， $2bc=\dfrac{a^2}{\cos A}=\dfrac{25}{\frac{25}{31}}=31$，

所以 $(b+c)^2=b^2+c^2+2bc=50+31=81$，解得 $b+c=9$，

所以 ΔABC 的周长为 $a+b+c=5+9=14$.

11.（2022•天津）在 ΔABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c．已知 $a=\sqrt{6}$，$b=2c$， $\cos A=-\dfrac{1}{4}$.

（1）求 c 的值；

（2）求 $\sin B$ 的值；

（3）求 $\sin(2A-B)$ 的值.

【解析】解（1）因为 $a=\sqrt{6}$， $b=2c$， $\cos A=-\dfrac{1}{4}$，

由余弦定理可得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{4c^2+c^2-6}{4c^2}=-\dfrac{1}{4}$，

解得：$c=1$；

（2）$\cos A=-\frac{1}{4}$，$A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A=\sqrt{1-cos^2A}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

由 $b=2c$，可得 $\sin B=2\sin C$，

由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，即 $\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=\frac{1}{\sin C}$，

可得 $\sin C=\frac{\sqrt{10}}{8}$，

所以 $\sin B=2\sin C=2\times\frac{\sqrt{10}}{8}=\frac{\sqrt{10}}{4}$；

（3）因为 $\cos A=-\frac{1}{4}$，$\sin A=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

所以 $\sin 2A=2\sin A\cos A=2\times(-\frac{1}{4})\times\frac{\sqrt{15}}{4}=-\frac{\sqrt{15}}{8}$，$\cos 2A=2\cos^2A-1=2\times\frac{1}{16}-1=-\frac{7}{8}$，

$\sin B=\frac{\sqrt{10}}{4}$，可得 $\cos B=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

所以 $\sin(2A-B)=\sin 2A\cos B-\cos 2A\sin B=-\frac{\sqrt{15}}{8}\times\frac{\sqrt{6}}{4}-(-\frac{7}{8})\times\frac{\sqrt{10}}{4}=\frac{\sqrt{10}}{8}$，

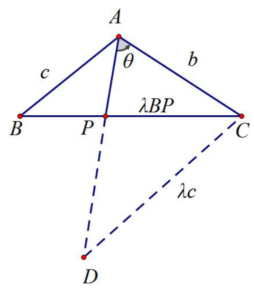
所以 $\sin(2A-B)$ 的值为 $\frac{\sqrt{10}}{8}$．

核心考点

考点一：倍长定比分线模型

规律总结

如图，若 P 在边 BC 上，且满足 $\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{BP}$，$|AP|=m$，则延长 AP 至 D，使 $\overrightarrow{PD}=\lambda\overrightarrow{AP}$，连接 CD，易知 $AB\ /\!/\ DC$，且 $DC=\lambda c$，$|AD|=(1+\lambda)|AP|$．$\angle BAC+\angle ACD=180°$．



题型特训

例 1.（2023·河南安阳·高三统考期末）在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $a^2+b^2=c^2-ab$，且 AB 边上的中线 $CD=1$，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为（　）

A．$\sqrt{3}$　　　B．$\sqrt{6}$　　　C．3　　　D．$2\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】由 $a^2+b^2=c^2-ab$，得 $\cos\angle ACB=\dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\angle ACB=120°$，

如图，作出平行四边形 $ACBE$，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ACE$ 的面积相等.在 $\triangle ACE$ 中，$\angle CAE=60°$，$CE=2$，则

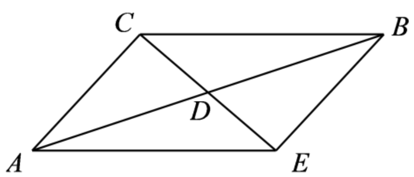
$\cos\angle CAE=\dfrac{a^2+b^2-4}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore a^2+b^2-ab=4$.

又 $a^2+b^2-ab\geq ab$，$\therefore ab\leq 4$，

$\therefore S_{\triangle ACE}=\dfrac{1}{2}ab\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ab\leq\sqrt{3}$，

故 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

故选：A



例 2.（2023·湖南长沙·高三宁乡一中校考期中）设 a，b，c 分别为 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边，AD 为 BC 边上的中线，$c=1$，$\angle BAC=\dfrac{2\pi}{3}$，$2c\sin A\cos B=a\sin A-b\sin B+\dfrac{1}{2}b\sin C$.

(1)求 AD 的长度；

(2)若 E 为 AB 上靠近 B 的四等分点，G 为 $\triangle ABC$ 的重心，连接 EG 并延长与 AC 交于点 F，求 AF 的长度.

【解析】（1）依据题意，由 $2c\sin A\cos B=a\sin A-b\sin B+\dfrac{1}{2}b\sin C$ 可得

$2ac\cos B=a^2-b^2+\dfrac{1}{2}bc$，则 $\cos B=\dfrac{a^2-b^2+\frac{1}{2}bc}{2ac}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\therefore c^2=\dfrac{1}{2}bc$，

$b=2c=2$，$\cos\angle BAC=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{4+1-a^2}{4}=-\dfrac{1}{2}$，解得 $a=\sqrt{7}$，$BD=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

$\cos B=\dfrac{1+7-4}{2\sqrt{7}}=\dfrac{1+\frac{7}{4}-AD^2}{\sqrt{7}}$，解得 AD 为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

（2）G 为 $\triangle ABC$ 的重心，$\therefore AG=\dfrac{2}{3}AD=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\cos\angle BAD=\dfrac{1+\frac{3}{4}-\frac{7}{4}}{\sqrt{3}}=0,\therefore\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$，$EG=\sqrt{\dfrac{9}{16}+\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{129}}{12}$

$\cos\angle AGF=-\cos\angle AGE=-\frac{4}{\sqrt{43}}$， $\sin\angle AGF=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}$， $\cos\angle DAC=\cos(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2},\sin\angle DAC=\frac{1}{2}$，

$\therefore\cos\angle AFE=-\cos(\angle AGF+\angle DAC)=\frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{43}}$， $\sin\angle AFE=\frac{5}{2\sqrt{43}},\frac{AG}{\sin\angle AFE}=\frac{AF}{\sin\angle AGF}$， $\therefore AF=\frac{3}{5}$

例 3.（2023·辽宁·校联考二模）在$\triangle ABC$中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且满足 $\cos^2\frac{A-C}{2}-\cos A\cos C=\frac{3}{4}$，

(1)求角 B 的大小；

(2)若 $a=8$, $\cos A=\frac{\sqrt{21}}{7}$，$D$ 为边 AB 上一点，且 $CD=7$，求 $\frac{BD}{DA}$ 的值.

【解析】(1) $\cos^2\frac{A-C}{2}-\cos A\cos C=\frac{3}{4}$，

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(A-C)-\cos A\cos C=\frac{3}{4}$，

所以 $-\frac{1}{2}\cos A\cos C+\frac{1}{2}\sin A\sin C=\frac{1}{4}$， 即 $\cos(A+C)=-\frac{1}{2}$，

故 $\cos B=\frac{1}{2}$，

因为 $0<B<\pi$， 所以 $B=\frac{\pi}{3}$；

（2）因为 $\cos A=\frac{\sqrt{21}}{7}$， 所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，

$\sin C=\sin(A+B)=\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=\sin A\cos\frac{\pi}{3}+\cos A\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2\sqrt{7}}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{21}}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$，

在$\triangle ABC$中，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$， 所以 $c=\frac{8\times\frac{5\sqrt{7}}{14}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}}=10$，

在$\triangle BDC$中，由余弦定理得：$CD^2=DB^2+BC^2-2BD\cdot BC\cos B$，

即 $BD^2-8BD+15=0$， 故 $(BD-3)(BD-5)=0$， 所以 $BD=3$ 或 $BD=5$，

当 $BD=3$ 时， $AD=7$， $\frac{BD}{DA}=\frac{3}{7}$，

当 $BD=5$ 时， $AB=5$， $\frac{BD}{DA}=1$.

所以 $\frac{BD}{DA}$ 的值为 $\frac{3}{7}$ 或 1.

考点二：倍角定理

规律总结

$B=2A \Leftrightarrow b^2=a(a+c)$

$C=2B \Leftrightarrow c^2=b(b+a)$，这样的三角形称为“倍角三角形”．

$A=2C \Leftrightarrow a^2=c(c+b)$

推论 1：$A=2B \Leftrightarrow \dfrac{a}{\sin 2B}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin 3B} \Leftrightarrow b=\dfrac{a}{2\cos B}=\dfrac{c}{3-4\sin^2 B}$

推论 2：$A=2B \Leftrightarrow \dfrac{c}{b}=1+2\cos A \Leftrightarrow b+c=2a\cos B$

题型特训

例 4．（2023·江苏连云港·高三统考期中）在 $\triangle ABC$ 中，$AB=4$，$AC=3$．

(1)若 $\cos C=-\dfrac{1}{4}$，求 $\triangle ABC$ 的面积；

(2)若 $A=2B$，求 BC 的长．

【解析】（1）在 $\triangle ABC$ 中，设角 A、B、C 所对的边分别为 a，b，c．

由余弦定理得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos C$，

即 $16=9+a^2-2\times3\times a\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)$，得 $a=2$ 或 $a=-\dfrac{7}{2}$（舍），

由 $\cos C=-\dfrac{1}{4}$，$C\in(0,\pi)$，得 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times3\times2\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$．

（2）在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}\Rightarrow\dfrac{a}{\sin 2B}=\dfrac{3}{\sin B}\Rightarrow\dfrac{a}{2\sin B\cdot\cos B}=\dfrac{3}{\sin B}$，

所以 $a=6\cos B$．

在 $\triangle ABC$ 中，再由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{16+a^2-9}{2\times4\times a}$，

所以 $\dfrac{a}{6}=\dfrac{16+a^2-9}{2\times4\times a}$，解得 $a=\sqrt{21}$．

例 5．（2023·广西钦州·高三校考阶段练习）在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边为 a，b，c，且 $a\cdot\cos B=b(1+\cos A)$．

(1)证明: $A=2B$

(2)若 $b=2$，求 a 的取值范围．

【解析】（1）$\because a\cdot\cos B=b(1+\cos A)$，

由正弦定理，得$\sin A\cdot\cos B=\sin B(1+\cos A)$，

即$\sin A\cdot\cos B-\cos A\cdot\sin B=\sin B$，

∴$\sin(A-B)=\sin B$，

∴$A-B=B$或$(A-B)+B=\pi$（舍），即$A=2B$，

（2）由锐角△ABC，可得$0<B<\dfrac{\pi}{2}$，$0<A=2B<\dfrac{\pi}{2}$，$0<C=\pi-3B<\dfrac{\pi}{2}$.

即$\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{4}$，∴$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos B<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

由正弦定理可得：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}\Rightarrow a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\dfrac{b\sin 2B}{\sin B}=\dfrac{4\sin B\cos B}{\sin B}=4\cos B$，

所以$2\sqrt{2}<4\cos B<2\sqrt{3}$.

所以a的取值范围为：$\left(2\sqrt{2},2\sqrt{3}\right)$.

例6.（2023·四川绵阳·统考一模）在锐角$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边为a，b，c，且$a\cdot\cos B=b\left(1+\cos A\right)$.

(1)证明：$\sin C=\sin 3B$；

(2)求$\dfrac{c}{a}$的取值范围.

【解析】（1）∵$a\cdot\cos B=b(1+\cos A)$，

由正弦定理，得$\sin A\cdot\cos B=\sin B(1+\cos A)$，

即$\sin A\cdot\cos B-\cos A\cdot\sin B=\sin B$，

∴$\sin(A-B)=\sin B$，

∴$A-B=B$或$(A-B)+B=\pi$（舍），即$A=2B$，

∴$C=\pi-A-B=\pi-3B$，

∴$\sin C=\sin(\pi-3B)=\sin 3B$.

（2）由锐角△ABC，可得$0<B<\dfrac{\pi}{2}$，$0<A=2B<\dfrac{\pi}{2}$，$0<C=\pi-3B<\dfrac{\pi}{2}$.

即$\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{4}$，∴$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos B<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

∵$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sin C}{\sin A}=\dfrac{\sin 3B}{\sin 2B}=\dfrac{\sin 2B\cdot\cos B+\cos 2B\cdot\sin B}{\sin 2B}=2\cos B-\dfrac{1}{2\cos B}$.

令$\cos B=t$，$y=2t-\dfrac{1}{2t},t\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

因为$y=2t-\dfrac{1}{2t}$在$t\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$上单调递增，

所以当$t=\dfrac{\sqrt{2}}{2},y_{\min}=\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

当 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_{\max}=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

∴ $\frac{c}{a}\in(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{2\sqrt{3}}{3})$.

例 7.（2023 •辽宁鞍山 •鞍山一中校考一模）已知 a，b，c 分别为△ABC 三个内角 A，B，C 的对边，S 为△ABC 的面积，$\sin(B+C)=\frac{2S}{a^2-c^2}$.

（1）证明：$A=2C$；

（2）若 $b=2$，且△ABC 为锐角三角形，求 S 的取值范围.

【解析】(1)证明：由 $\sin(B+C)=\frac{2S}{a^2-c^2}$，即 $\sin A=\frac{2S}{a^2-c^2}$，

$\therefore \sin A=\frac{bc\sin A}{a^2-c^2}$，$\sin A\neq 0$，$\therefore a^2-c^2=bc$，

$\because a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$\therefore a^2-c^2=b^2-2bc\cos A$，

$\therefore b^2-2bc\cos A=bc$，$\therefore b-2c\cos A=c$，

$\therefore \sin B-2\sin C\cos A=\sin C$，

$\therefore \sin(A+C)-2\sin C\cos A=\sin C$，$\therefore \sin A\cos C-\cos A\sin C=\sin C$，

$\therefore \sin(A-C)=\sin C$，

$\because A$，B，$C\in(0,\pi)$，$\therefore A=2C$.

(2) $\because A=2C$，$\therefore B=\pi-3C$，

$\therefore \sin B=\sin 3C$.

$\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 且 $b=2$，

$\therefore a=\frac{2\sin 2C}{\sin 3C}$，

$\therefore S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{2\sin 2C\sin C}{\sin(2C+C)}=\frac{2\sin 2C\sin C}{\sin 2C\cos C+\cos 2C\sin C}=\frac{2\tan 2C\tan C}{\tan 2C+\tan C}=\frac{4\tan C}{3-\tan^2 C}=\frac{4}{\frac{3}{\tan C}-\tan C}$，

$\because$ △ABC 为锐角三角形，$\therefore \begin{cases} A=2C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \\ B=\pi-3C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \\ C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$，

$\therefore C\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$，$\therefore \tan C\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$，

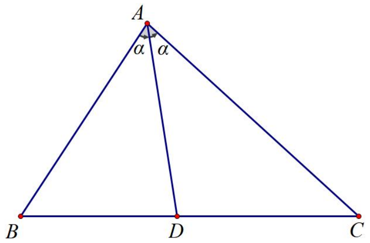
$\because S=\dfrac{4}{\dfrac{3}{\tan C}-\tan C}$为增函数，

$\therefore S\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},2\right)$.

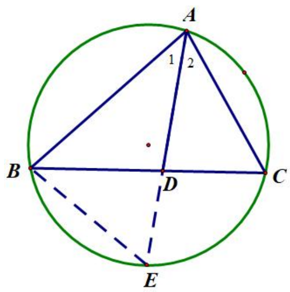
考点三：角平分线模型

规律总结

角平分线张角定理：如图，AD 为 $\angle BAC$ 平分线，$\cos\angle BAD=\dfrac{1}{2}(\dfrac{AD}{b}+\dfrac{AD}{c})$（参考一轮复习）



斯库顿定理：如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，则 $AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot DC$，可记忆：中方=上积一下积.



题型特训

例 8.（2023·贵州贵阳·高三贵阳一中校考阶段练习）在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $\sin B+\sin C=\dfrac{a\sin A-b\sin B}{c}$, $a=6\sqrt{2}$.

(1)求角 A 的大小；

(2)边 BC 上存在点 M，使 AM 为 $\angle BAC$ 的角平分线，若 $AM=1$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

【解析】(1）因为在 $\triangle ABC$ 中，$\sin B+\sin C=\dfrac{a\sin A-b\sin B}{c}$，

所以 $a\sin A-b\sin B=c(\sin B+\sin C)$，

所以由正弦定理得 $a^2-b^2=c(b+c)$，

即$b^2+c^2-a^2=-bc$，由余弦定理得$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$，

因为$0<A<\pi$，所以$A=\dfrac{2\pi}{3}$.

（2）因为$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc$，

且$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABM}+S_{\triangle ACM}=\dfrac{1}{2}\times 1\times c\times\sin\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{2}\times 1\times b\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(b+c)$

所以$bc=b+c$，

由余弦定理得：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-72}{2bc}=\dfrac{(b+c)^2-2bc-72}{2bc}=\dfrac{(b+c)^2-2(b+c)-72}{2(b+c)}=-\dfrac{1}{2}$，

整理得$(b+c)^2-(b+c)-72=0$，

解得$b+c=9$或$b+c=-8$（舍去），

所以$a+b+c=6\sqrt{2}+9$，

所以$\triangle ABC$的周长为$6\sqrt{2}+9$.

例 9.（2023·浙江·高三浙江省长兴中学校联考期中）已知在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，$2c\cdot\cos B=2a+b$.

(1)求角C的大小；

(2)若$b=1$，$c=\sqrt{7}$，$\angle ACB$的角平分线交AB于D，求CD的值.

【解析】（1）∵$2c\cdot\cos B=2a+b$，

由正弦定理得，$2\sin C\cos B=2\sin A+\sin B$，

∴$2\sin C\cos B=2\sin(B+C)+\sin B$，

∴$2\sin C\cos B=2\sin B\cos C+2\cos B\sin C+\sin B$，

∴$2\cos C\sin B=-\sin B$，即$\cos C=-\dfrac{1}{2}$，

∵$C\in(0,\pi)$，∴$C=\dfrac{2}{3}\pi$.

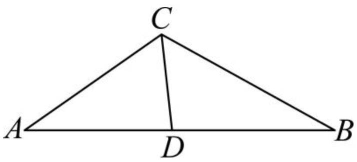
（2）由余弦定理得，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

∴$7=a^2+1^2+a$，解得$a=2$或$a=-3$（舍去），

由$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADC}+S_{\triangle BDC}$，

∴$\dfrac{1}{2}\times 1\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\times 1\times CD\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\times CD\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

∴$CD=\dfrac{2}{3}$.



例 10.（2023·福建福州·高三校联考期中）$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，设 $(\sin B+\sin C)^2=\sin^2 A+\sin B\sin C$.

(1)求 A；

(2)若 AD 为 $\angle BAC$ 的角平分线，且 $AD=1$，求 $4b+c$ 的最小值.

【解析】(1) $(\sin B+\sin C)^2=\sin^2 B+2\sin B\sin C+\sin^2 C=\sin^2 A+\sin B\sin C$，

即：$\sin^2 B+\sin^2 C+\sin B\sin C=\sin^2 A$，

由正弦定理可得：$b^2+c^2+bc=a^2$，

所以 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$，

又因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$.

(2) AD 为 $\angle BAC$ 的角平分线，$\angle BAD=\angle CAD=\dfrac{\pi}{3}$.

由 $S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABC}$，得 $\dfrac{1}{2}c\cdot AD\cdot\sin\angle BAD+\dfrac{1}{2}b\cdot AD\cdot\sin\angle CAD=\dfrac{1}{2}bc\sin\angle BAC$，

又 $AD=1$，所以 $b+c=bc$，故 $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$，

所以 $4b+c=(4b+c)\cdot\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=5+\dfrac{c}{b}+\dfrac{4b}{c}\geqslant 5+2\sqrt{\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{4b}{c}}=9$，

当且仅当 $\dfrac{c}{b}=\dfrac{4b}{c}$，即 $c=2b$ 时，$4b+c$ 的最小值为 9.

例 11.（2023·重庆沙坪坝·高三重庆一中校考阶段练习）$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别记为 a，b，c，若 $a=\sqrt{7}$，$\cos C=-\dfrac{\sqrt{7}}{14}$，从下面条件①②③中任选一个作为已知条件，完成以下问题：

①$c=3$；②$\sin B=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$；③$a\cos B=c+b\cos 2A$.

(1)求 $\triangle ABC$ 的面积；

(2)若 $\angle A$ 的角平分线与边 BC 交于点 D，延长 AD 至点 E 使得 $DE=2AD$，求 BE.

【解析】(1) 若选①$c=3$，则 $\cos C=\dfrac{b^2-2}{2\sqrt{7}b}=-\dfrac{\sqrt{7}}{14}\Rightarrow b^2+b-2=0\Rightarrow b=1$，

$0<C<\pi$，又 $\cos C=-\dfrac{\sqrt{7}}{14}\Rightarrow \sin C=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}\Rightarrow S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

若选②$\sin B=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$，$0<B<\pi$，则 $\cos B=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$，$\sin C=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$，

$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C=\frac{\sqrt{7}}{14}\times\frac{5\sqrt{7}}{14}+\frac{\sqrt{21}}{14}\times\frac{3\sqrt{21}}{14}=\frac{1}{2}\Rightarrow A=\frac{\pi}{3}$，

由正弦定理可得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow b=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{21}}{14}=1\Rightarrow S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

若选③ $a\cos B=c+b\cos 2A$，由 $0<B<\pi$ 得 $\sin B\neq 0$，且 $0<A<\pi$，

则 $a\cos B=c+b\cos 2A\Rightarrow\sin A\cos B=\sin C+\sin B\cos 2A$

$\Rightarrow\cos A\sin B+\sin B\cos 2A=0\Rightarrow 2\cos^2 A+\cos A-1=0\Rightarrow\cos A=\frac{1}{2}\Rightarrow A=\frac{\pi}{3}$，

由 $0<C<\pi$ 得 $\cos C=-\frac{\sqrt{7}}{14}\Rightarrow\sin C=\frac{3\sqrt{21}}{14}$，

则 $\sin B=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C=\frac{\sqrt{21}}{14}$，

由正弦定理可得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow b=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{21}}{14}=1\Rightarrow S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{4}$；

（2）由角平分线的性质知：$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{1}$，∴ $BD=\frac{3\sqrt{7}}{4}$，$DC=\frac{\sqrt{7}}{4}$，

在 $\triangle ABD$ 中，$0<B<\pi$，∵ $\sin B=\frac{\sqrt{21}}{14}$，∴ $\cos B=\frac{5\sqrt{7}}{14}$，由余弦定理知：

$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos B=9+\frac{63}{16}-2\cdot 3\cdot\frac{3\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{5\sqrt{7}}{14}=\frac{27}{16}$，

故 $AD=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，

在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理知：$\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{DC}{\sin\angle DAC}$，

即 $\frac{1}{\sin\angle ADC}=\frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\sin\angle ADC=\frac{2}{\sqrt{7}}$，故 $\cos\angle ADC=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

在 $\triangle BDE$ 中，$DE=2AD=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$\cos\angle BDE=\cos\angle ADC=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$，

由余弦定理知：

$BE^2=DE^2+BD^2-2DE\cdot BD\cdot\cos\angle BDE=\frac{27}{4}+\frac{63}{16}-2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{63}{16}$，

故 $BE=\frac{3\sqrt{7}}{4}$.

考点四：隐圆问题

规律总结

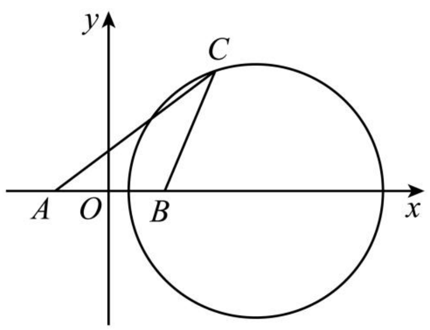
若三角形中出现$b=\lambda a(\lambda>1)$，且c为定值，则点C位于阿波罗尼斯圆上.

题型特训

例 12.（2023·全国·高三专题练习）若$\triangle ABC$满足条件$AB=4$，$AC=\sqrt{2}BC$，则$\triangle ABC$面积的最大值为__.

【答案】$8\sqrt{2}$

【解析】如图，以AB的中点为原点，AB为x轴，AB的中垂线为y轴，建立平面直角坐标系，如图所示，



则$A(-2,0)$，$B(2,0)$，设$C(x,y)$，由$AC=\sqrt{2}BC$，

得$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，

化简可得$(x-6)^2+y^2=32$，

则点C的轨迹是以$(6,0)$为圆心，半径$r=4\sqrt{2}$的圆，

且去掉点$(6+4\sqrt{2}$，$0)$和$(6-4\sqrt{2}$，$0)$；

所以$\triangle ABC$的面积的最大值为$\frac{1}{2}\times|AB|\times r=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$，

故答案为：$8\sqrt{2}$.

例 13.（2023·湖南长沙·高三雅礼中学校考阶段练习）在$\triangle ABC$中，$AB=3,\sin B=m\cdot\sin A(m\geq2)$，则$\triangle ABC$的面积最大值为____________.

【答案】3

【解析】因为$\sin B=m\cdot\sin A$，所以由正弦定理得$b=ma$，即$AC=m\cdot BC$，

以线段AB所在直线为x轴，以AB的中点O为坐标原点建立平面直角坐标系，

则$A\left(-\frac{3}{2},0\right),B\left(\frac{3}{2},0\right),C(x,y)$,

由$AC=m\cdot BC$得$\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2}=m\cdot\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2}$，

因为$m\geq2$，所以整理得$x^2+y^2-\frac{3m^2+3}{m^2-1}x+\frac{9}{4}=0$，

由此可知点 C 的轨迹是以 $\left(\dfrac{3m^2+3}{2\left(m^2-1\right)},0\right)$ 为圆心，以 $r=\dfrac{3m}{m^2-1}$ 为半径的圆，

所以当点 C 在圆上运动时，点 C 到 x 轴的最大距离为半径 $r=\dfrac{3m}{m^2-1}$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times3\times\dfrac{3m}{m^2-1}=\dfrac{9}{2}\times\dfrac{1}{m-\dfrac{1}{m}}$ 在 $m\in[2,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $S_{\max}=\dfrac{9}{2}\times\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2}}=3$.

故答案为：3.

例 14.（2023·福建·高三统考阶段练习）波罗尼斯（古希腊数学家，约公元前 262-190 年）的著作《圆锥曲线论》是古代世界光辉的科学成果，它将圆锥曲线的性质网罗殆尽几乎使后人没有插足的余地.他证明过这样一个命题：平面内与两定点距离的比为常数 k（$k>0$ 且 $k\neq1$）的点的轨迹是圆，后人将这个圆称为阿波罗尼斯圆.现有 ΔABC，$AC=4,\sin C=2\sin A$，则当 ΔABC 的面积最大时，AC 边上的高为______________.

【答案】$\dfrac{8}{3}$

【解析】ΔABC，$AC=4,\sin C=2\sin A$，即 $\dfrac{c}{a}=2$．根据阿波罗尼斯圆可得：点 B 的轨迹为圆，以线段 AC 中点为原点，AC 所在直线为 x 轴建立直角坐标系,求出 B 的轨迹方程，进而得出结论．$\because\sin C=2\sin A,\therefore\dfrac{|AB|}{|CB|}=\dfrac{\sin C}{\sin A}=2$ 为非零常数，

根据阿波罗尼斯圆可得：点 B 的轨迹是圆.

以线段 AC 中点为原点，AC 所在直线为 x 轴建立直角坐标系

则 $A(-2,0),C(2,0)$，设 $B(x,y)$，$\because|AB|=2|CB|$

$\therefore\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

$3x^2+3y^2-20x+12=0$，整理得 $\left(x-\dfrac{10}{3}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{8}{3}\right)^2$

因此，当 ΔABC 面积最大时，BC 边上的高为圆的半径 $\dfrac{8}{3}$.

例 15.（2023·安徽马鞍山·高三和县第二中学校考阶段练习）阿波罗尼斯是古希腊数学家，他与阿基米德、欧几里得被称为亚历山大时期的“数学三巨匠”，以他名字命名的阿波罗尼斯圆是指平面内到两定点距离之比为定值 λ（$\lambda>0,\lambda\neq1$）的动点的轨迹.已知在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$\sin A=2\sin B,\ a\cos B+b\cos A=2$，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为__________.

【答案】$\dfrac{4}{3}$

【解析】由已知条件结合余弦定理，可求出 $BC=2AC$，$AB=2$，建立坐标系求出点 C 所在的圆的方程，求

出点C到AB距离的最大值，即可求出结论.依题意，$\sin A=2\sin B$，得$BC=2AC$，

$$a\cos B+b\cos A=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}=c=2$$

即$AB=2$，以AB边所在的直线为x轴，AB的垂直平分线为y轴

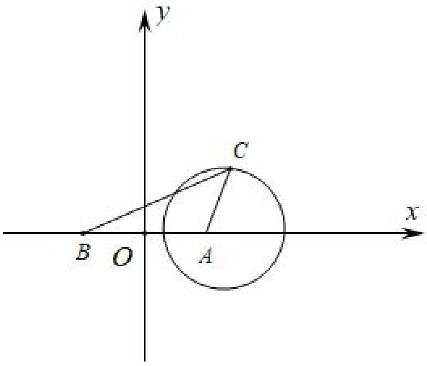
建立直角坐标系，则$A(1,0),B(-1,0)$，设$C(x,y),x\neq 0$，

由$BC=2AC$，则C的轨迹为阿波罗尼斯圆，其方程为

$(x-\frac{5}{3})^2+y^2=\frac{16}{9},x\neq 0$，边$AB$高的最大值为$\frac{4}{3}$，

$\therefore (S_{\triangle ABC})_{\max}=\frac{4}{3}$.

故答案为：$\frac{4}{3}$



例 16.（2023·四川眉山·统考三模）阿波罗尼奥斯是与阿基米德、欧几里得齐名的古希腊数学家，以他姓名命名的阿氏圆是指平面内到两定点的距离的比值为常数$\lambda(\lambda>0,\lambda\neq 1)$的动点的轨迹．已知在$\triangle ABC$中，角A、$B$、$C$所对的边分别为$a$、$b$、$c$，且$\sin A=2\sin B$，$a\cos B+b\cos A=3$，则$\triangle ABC$面积的最大值为（　）

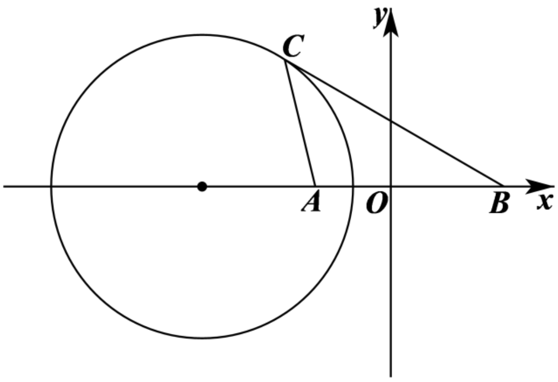
A．3　　　　B．$3\sqrt{3}$　　　　C．6　　　　D．$6\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】由正弦定理可得$a=2b$，设$\triangle ABC$的外接圆半径为r，

则$a\cos B+b\cos A=2r(\sin A\cos B+\cos A\sin B)=2r\sin(A+B)=2r\sin C=c=3$，

以AB的中点O为原点，AB所在直线为x轴建立平面直角坐标系，如下图所示：



则 $A\left(-\frac{3}{2},0\right)$、$B\left(\frac{3}{2},0\right)$，

设点 $C(x,y)$，由 $a=2b$，可得 $\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2}=2\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2}$，

化简可得 $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+y^2=4$，

所以，$\triangle ABC$ 的边 AB 上的高的最大值为 2，因此，$S_{\triangle ABC}\le\frac{1}{2}c\times 2=3$.

故选：A.

考点五：正切比值与和差问题

规律总结

定理 1：$\tan A=\lambda\tan B\Leftrightarrow c=(\lambda+1)b\cos A\Leftrightarrow(\lambda+1)(b^2-a^2)+(\lambda-1)c^2=0$

定理 2：$\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}=\frac{\lambda}{\tan C}\Leftrightarrow a^2+b^2=\frac{\lambda+2}{\lambda}c^2$

定理 3：（正切恒等式）ΔABC 中，$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$.

题型特训

例 17.（2023·山东日照·高三校联考期末）已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A，B，C 满足 $\sin B+2\sin A\cos C=0$，则（　）

A．$\triangle ABC$ 是锐角三角形　　　　B．角 B 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$

C．角 C 的最大值为 $\frac{2\pi}{3}$　　　　D．$\sin^{2022}A+\sin^{2022}B<\sin^{2022}C$

【答案】D

【解析】由 $\sin B+2\sin A\cos C=0$ 得 $b+2a\cos C=0$，则 $\cos C<0$，所以 $\triangle ABC$ 是钝角三角形，故 A 不正确；

由 $\sin B+2\sin A\cos C=0$ 得 $b+2a\cos C=0$，则 $b+2a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=0$，整理得 $a^2+2b^2=c^2$，

所以 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{3a^2+c^2}{4ac}\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，当且仅当 $3a^2=c^2$ 等号成立，∴ $B\leqslant\dfrac{\pi}{6}$，故 B 不正确；

由 $\sin B+2\sin A\cos C=0$ 得 $\sin\left(A+C\right)+2\sin A\cos C=0$，化简可得 $\tan C=-3\tan A$，则

$\tan B=-\tan(A+C)=\dfrac{2\tan A}{1+3\tan^2 A}$，

因为 C 为钝角，所以 A 为锐角，取 $C=\dfrac{3\pi}{4}$，得 $\tan A=\dfrac{1}{3}$， $\tan B=\dfrac{1}{2}$，

符合题意，即 C 可以取大于 $\dfrac{2\pi}{3}$ 的值，故 C 错误；

由 $\cos C<0$ 得 $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$，$a^2+b^2<c^2$，$\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2<1$，所以 $\left(\dfrac{a}{c}\right)^{2022}+\left(\dfrac{b}{c}\right)^{2022}<1$，即 $a^{2022}+b^{2022}<c^{2022}$，

结合正弦定理可得 $\sin^{2022}A+\sin^{2022}B<\sin^{2022}C$， 故 D 正确.

故选：D.

例 18.（2023·河南安阳·高三统考阶段练习）在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{1}{\tan C}=\dfrac{3}{bc\cdot\sin A}$，且 $\sin\left(C-B\right)=\dfrac{1}{2}\sin A$，则 $c^2-b^2=$__________.

【答案】$\dfrac{3}{2}$

【解析】$\triangle ABC$ 中，$\dfrac{1}{\tan B}=\dfrac{\cos B}{\sin B}$，$\dfrac{1}{\tan C}=\dfrac{\cos C}{\sin C}$，

$\sin C\cos B+\cos C\sin B=\sin(C+B)=\sin(\pi-A)=\sin A$，

由正弦定理有 $\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{a}{b}$， $c\sin A=a\sin C$，

由 $\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{1}{\tan C}=\dfrac{3}{bc\cdot\sin A}$， 得 $\dfrac{\cos B}{\sin B}+\dfrac{\cos C}{\sin C}=\dfrac{3}{bc\cdot\sin A}$，

有 $\dfrac{\sin C\cos B+\cos C\sin B}{\sin B\sin C}=\dfrac{3}{bc\cdot\sin A}$， 即 $\dfrac{\sin A}{\sin B\sin C}=\dfrac{3}{bc\cdot\sin A}$，

$\dfrac{a}{b\sin C}=\dfrac{3}{ba\sin C}$， 得 $a^2=3$，

由 $\sin\left(C-B\right)=\dfrac{1}{2}\sin A$， 可得 $2\sin C\cos B-2\cos C\sin B=\sin C\cos B+\cos C\sin B$，

即 $\sin C\cos B=3\cos C\sin B$， 代入 $\dfrac{\sin C\cos B+\cos C\sin B}{\sin B\sin C}=\dfrac{3}{bc\cdot\sin A}$，

得 $\dfrac{4\cos C}{\sin C}=\dfrac{3}{bc\cdot\sin A}=\dfrac{3}{ab\sin C}$， ∴ $ab\cos C=\dfrac{3}{4}$，

由余弦定理， $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$c^2=3+b^2-\dfrac{3}{2}$， 得 $c^2-b^2=\dfrac{3}{2}$，