

3.3 直线与方程

3.3.1 直线的交点坐标与两点间的距离公式



复习回顾：

点斜式方程 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 当斜率不存在时不适用

斜截式方程 $y = kx + b$ 当斜率不存在时不适用

两点式方程 $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2)$ 当垂直于坐标轴时不适用

截距式方程 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 (a \neq 0, b \neq 0)$ 当垂直于坐标轴和经过原点时不适用

一般式方程 $Ax + By + C = 0$ (其中A、B不同时为0)

当直线与y轴垂直时 $x - x_0 = 0$ 或 $x = x_0$

当直线与x轴垂直时 $y - y_0 = 0$ 或 $y = y_0$



新课导入

两条直线的位置关系有：平行、垂直两种特殊位置关系，除此之外，还有一般的相交位置关系，相交时两直线的公共点为两直线的交点，那么怎么求出两直线的交点坐标呢？

我国著名数学家华罗庚曾说过：

数缺形时少直观，
形少数时难入微；
数形结合百般好，
隔离分家万事休。



新课讲授

问题探究一 两直线的交点

1. 讨论下列二元一次方程组解的情况:

$$(1) \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{一组解} \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ -x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{无数组}$$

$$(3) \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{无解}$$

二元一次方程表示直线，你能从直线的角度加以解释吗？



提问:

已知两条直线

$$l_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

$$l_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

相交, 如何求这两条直线交点的坐标?

几何元素及关系	代数表示
点 A	$A(a, b)$
直线 l	$l: Ax + By + C = 0$
点 A 在直线 l 上	$Aa + Bb + C = 0$
直线 l_1 与直线 l_2 的交点 A	$\begin{cases} A_1a + B_1b + C_1 = 0 \\ A_2a + B_2b + C_2 = 0 \end{cases}$

两条直线的交点:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

- (1)若方程组有且只有一个解, 则 l_1 与 l_2 相交;
- (2)若方程组无解, 则 $l_1 // l_2$;
- (3)若方程组有无数解, 则 l_1 与 l_2 重合.



典例展示

例1. 判断下列直线的位置关系. 如果相交, 求出交点的坐标:

$$l_1 : x - y = 0, \quad l_2 : 3x + 3y - 10 = 0;$$

$$l_1 : 3x - y + 4 = 0, \quad l_2 : 6x - 2y - 1 = 0;$$

$$l_1 : 3x + 4y - 5 = 0, \quad l_2 : 6x + 8y - 10 = 0.$$

$$\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3} \right)$$

平行

重合



例2. 求 $l_1:3x+4y-2=0$ 与 $l_2:2x+y+2=0$ 的交点.

解：由
$$\begin{cases} 3x+4y-2=0 \\ 2x+y+2=0 \end{cases} \quad \text{得} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$$

\therefore 交点 $(-2, 2)$



变1. 直线 $y = -x + b$ 和 $x - y = 0$ 的交点在第一象限，
求 b 的取值范围.

解：由
$$\begin{cases} y = -x + b \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{得} \quad \begin{cases} x = \frac{b}{2} \\ y = \frac{b}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{b}{2} > 0 \\ y = \frac{b}{2} > 0 \end{cases} \quad \therefore b > 0$$



变2. 设三条直线 $l_1 : 3x + 4y - 2 = 0$, $l_2 : 2x + y + 2 = 0$,

$l_3 : x - (k + 1)y - 5 = 0$, 若这三条直线交于一点, 求 k 的值

两直线交点坐标 \Leftrightarrow 方程组的解

(几何问题)

代入法, 加减消元法

(代数问题)



问题探究二 共点直线系方程

当 λ 变化时, 方程

$$3x + 4y - 2 + \lambda(2x + y + 2) = 0$$

表示什么图形? 图形有何特点?

已知两条直线相交

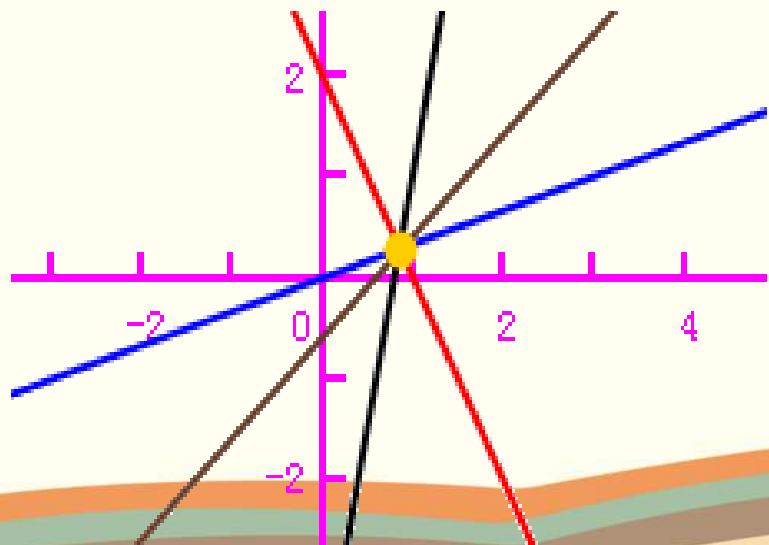
$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

思考: 经过两直线的交点的直线方程怎么写?

$$(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

(λ 为待定系数)



此直线系方程少一条直线 l_2



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/645212133143011213>