证明方法

回顾

问题1：如何基于命题逻辑进行推理?

- 蕴含永真式导出推理规则

问题2：什么是(一阶)谓词逻辑?

- 命题逻辑+谓词+量词；量化表达式

问题3：如何基于谓词逻辑进行推理?

- 命题逻辑的推理+全称/存在 例示/生成

本节提要

问题1：什么叫证明?
问题2：常见的证明方法有哪些?
问题3：什么是猜想？有哪些有意思的猜想?

定理与证明

- 定理(theorem)
  - 能够被证明为真的陈述，通常是比较重要的陈述。
- 证明(proof)
  - 表明陈述(定理)为真的有效论证。
- 定理证明中可以使用的陈述:
  - 公理(不证自明的基本事实)
  - (当前)定理的前提
  - 已经证明的定理(推论、命题、引理)

例

- 定理的陈述(举例)
  - 如果x>y，其中x和y是正实数，那么 $x^2>y^2$。
- 如何表达
  - $\forall x \forall y((x>y) \rightarrow (x^2>y^2))$ //论域为正实数
- 如何证明
  - 定理的陈述为: $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
  - 先证明，对论域中的任一元素c， $P(c) \rightarrow Q(c)$
  - 再使用全称引入，得到 $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$

归纳推理的证明方式

证明的本质是“保证真实性”，其涵义根据领域的不同有所差异：

- 科学中的“证明”指利用归纳推理（inductive reasoning）去证实（prove）某个假设（hypothesis）
- 人们将大量特殊的信息收集（归纳）起来并根据自身的知识和经验去观察，并推断（推理）哪些是真实的
- 此类“证明”不产生定论（mathematical certainty)

归纳推理的证明方式

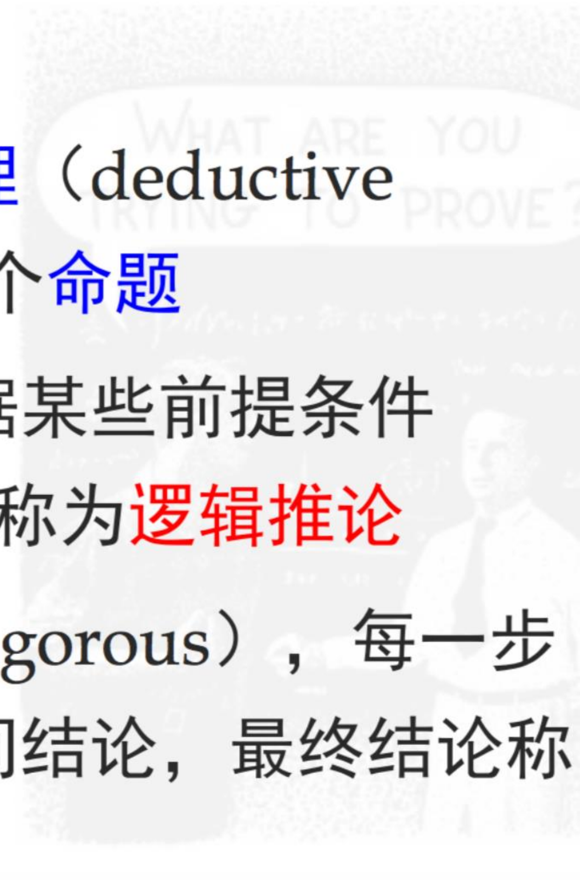
- 日常生活中“证明”的例子：
  - 我们观察到：小王今早上课迟到了。
  - 我们观察到：小王今天没梳头。
  - 经验： 小王平时对发型相当在意。
  - **结论：小王今天睡过头了。**

- 这类“证明”方式一般在数学中用于提出假设

演绎推理的证明方式

证明的本质是“保证真实性”，其涵义根据领域的不同有所差异：

- 数学中的“证明”指利用演绎推理（deductive reasoning）和逻辑规则去推证某个命题
- 数学证明中每一步推理过程都根据某些前提条件（premise）展示出一个结论——称为逻辑推论
- 所有的证明过程必须是严密的（rigorous），每一步都必须提供确信的证据来支持中间结论，最终结论称为系统中的定理（theorem）



演绎推理的证明方式

- 用于数学的证明方式称为**形式化证明**或**推导**（derivation）
- **定义**（**形式化证明**）：对一个命题的基于**公理化系统**的一系列**逻辑演绎**的**有限过程**
- **例**：欧几里德平面几何的公理集合
  - **公理1.** 任意两点可以通过一条直线连接。
  - **公理2.** 任意线段可无限延伸为一条直线。
  - **公理3.** 给定任意线段，可以以其一个端点作为圆心，该线段作为半径作一个圆。
  - **公理4.** 所有直角都全等。
  - **公理5.** 若两条直线都与第三条直线相交，并且在同一边的内角之和小于两个直角，则这两条直线在这一边必定相交。

本节提要

问题1：什么叫证明?

- 表明定理为真的有效论证（演绎推理）

问题2：常见的证明方法有哪些?

问题3：什么是猜想？有哪些有意思的猜想?

直接证明法

- **证明方法：** 证明“若A为真，则B为真”
- **理论依据：** “若A为真，则B为真” $\Longrightarrow$ “$A \rightarrow B$为真”
- **例：**

证明：若n是奇数，则n^2也是奇数.

证： 因为n是奇数，故$\exists k \in \mathbb{N}$ 使 $n = 2k + 1$，于是有：

$$n^2 = (2k+1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

故n^2是奇数. $\square$

间接证明法

- 证明方法：证明逆否命题“$\neg B \to \neg A$”为真
- 理论依据：“$A \to B$为真”$\Leftrightarrow$“$\neg B \to \neg A$”为真
- 例：

证明：若n^2是奇数，则n也是奇数.

证：只需证**若$\boldsymbol{n}$是偶数，则$\boldsymbol{n^2}$也是偶数.** 假设$\exists k \in \mathbb{N}$，$n = 2k$，于是有：$n^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$，故n^2为偶数，从而原命题得证. $\square$

空证明法(前件假证明法)

- **证明方法：** 要证“$A \rightarrow B$为真”，可证“A为矛盾式”
- **理论依据：** “A为矛盾式”$\Longrightarrow$“$A \rightarrow B$为真”
- **例：**

证明：空集$\emptyset$是任何集合的子集.

证： 根据子集的定义$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$，令$A = \emptyset$，则$\emptyset \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in \emptyset \rightarrow x \in B) \Leftrightarrow \forall x(\perp \rightarrow x \in B) \Leftrightarrow \boldsymbol{T}$，命题得证. $\square$

平凡证明法(后件真证明法)

- **证明方法：**要证“$A \to B$为真”，可证“B为永真式”
- **理论依据：**“B为永真式”$\Longrightarrow$“$A \to B$为真”
- **例：**

证明：若$a \le b$，则$a^0 \le b^0$.

证：因为$a^0 \le b^0$恒为真，故命题得证. □

- 这种证明方式常在数学归纳法的“**奠基**”中出现

归谬法(反证法)

- **证明方法：** 假设A真且$\neg B$真，推出矛盾，即$A \wedge \neg B \Longrightarrow \perp$
- **理论依据：** “$A \wedge \neg B \Longrightarrow \perp$”为真$\Leftrightarrow$“$A \wedge \neg B$”为假$\Leftrightarrow$“$\neg(A \wedge \neg B)$”为真$\Leftrightarrow$“$\neg A \vee B$”为真$\Leftrightarrow$“$A \rightarrow B$”为真
- **例1：**

证明：若$3n+2$是奇数，则n也是奇数.

证： 反设在题设条件下n为偶数，即$\exists k \in \mathbb{N}$, $n = 2k$，于是有：$3n+2 = 6k+2 = 2(3k+1)$，故$3n+2$为偶数，与题设矛盾！原命题得证. $\square$

归谬法

- **例2：**

证明：$\sqrt{2}$是无理数.

证： 反设$\sqrt{2}$为有理数，则其可写为$\frac{p}{q}$ $(p,q\in\mathbb{N}\wedge(p,q)=1)$

之形式，且$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$；那么有：$p^2=2q^2\to p^2$为偶$\to p$亦

为偶$\to p^2$为4的倍数$\to q^2$为偶$\to q$为偶$\to p$与q有公因子2.

这与$(p,q)=1$矛盾，故假设错误，原命题得证. $\square$

广义归谬法

- 证明方法：假设$A_1, A_2, \cdots, A_k$真且$\neg B$真，推出矛盾，即

  $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B \Longrightarrow \perp$

- 理论依据：$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B \Rightarrow \perp \ \Leftrightarrow \ A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Longrightarrow B$