

专题 05 倍长中线问题

【要点提炼】

一、【倍长中线法】

中线是三角形中的重要线段之一，在利用中线解决几何问题时，常常采用“倍长中线法”添加辅助线。所谓倍长中线法，就是将三角形的中线延长一倍，以便构造出全等三角形，从而运用全等三角形的有关知识来解决问题的方法。倍长中线法的过程：延长某某到某点，使某某等于某某，使什么等于什么（延长的那一条），用 SAS 证全等（对顶角）+倍长中线最重要的一点，延长中线一倍，完成 SAS 全等三角形模型的构造。

二、【倍长中线法拓展：两次全等】

通常，在倍长中线后的第一组全等只是一个基础，往往还需证明第二组全等，但是难点就在于如何去倍长中线，倍长中线后去连接什么线，这是问题的关键。这时一般需要去试错，尤其是当有两个中点时，一般是倍长中线后大概率会有另一组的全等。

三、【倍长中线的常见类型】

1. 基本型

如图 1，在中，为边上的中线。

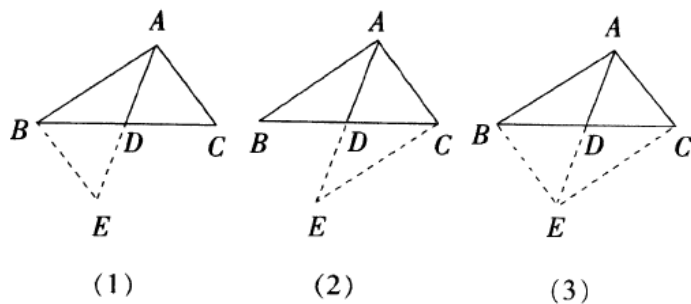


图 1

延长至点 E，使得。

若连结，则；

若连结，则；

若连结则四边形是平行四边形。

2. 中点型

如图 2，C 为 AB 的中点。

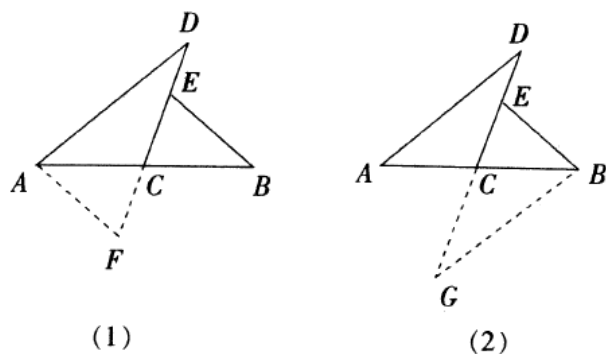


图 2

若延长 EC 至点 F ，使得 $CF = EC$ ，连结 AF ，则 $\triangle BCE \cong \triangle ACF$ ；

若延长 DC 至点 G ，使得 $CG = DC$ ，连结 BG ，则 $\triangle ACD \cong \triangle BCG$ 。

总结：在线段 AB 外，与中点 C 连结的点有 E 和 D 。事实上， EC 和 DC 分别是 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ABD$ 的中线，只不过是三角形不完整罢了，本质就是隐蔽的“基本型”

3. 中点+平行线型

如图 3， $AB \parallel CD$ ，点 E 为线段 AD 的中点。延长 CE 交 AB 于点 F （或交 BA 延长线于点 F ），则 $\triangle EDC \cong \triangle EAF$ 。

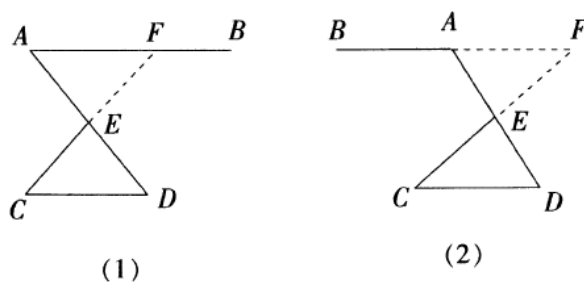


图 3

小结 若按“中点型”来倍长，则需证明点 F 在 AB 上，为了避免证明三点共线，点 F 就直接通过延长相交得到。因为有平行线，内错角相等，故根据“AAS”或“ASA”证明全等。这里“中点+平行线型”可以看做是“中点型”的改良版。

【专题训练】

一、解答题（共 14 小题）

1. 小明遇到这样一个问题，如图 1， $\triangle ABC$ 中， $AB=7$ ， $AC=5$ ，点 D 为 BC 的中点，求 AD 的取值范围。

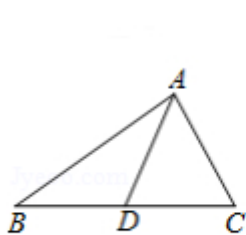


图 1

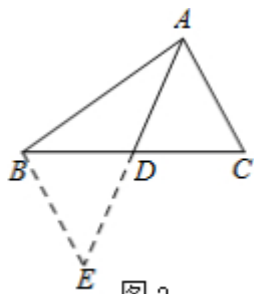


图 2

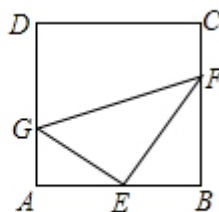


图 3

小明发现老师讲过的“倍长中线法”可以解决这个问题，所谓倍长中线法，就是将三角形的中线延长一倍，以便构造出全等三角形，从而运用全等三角形的有关知识来解决问题的方法，他的做法是如图 2，延长 AD 到 E ，使 $DE=AD$ ，连接 BE ，构造 $\triangle BED \cong \triangle CAD$ ，经过推理和计算使问题得到解决。

请回答：（1）小明证明 $\triangle BED \cong \triangle CAD$ 用到的判定定理是：_____（用字母表示）

（2） AD 的取值范围是_____

小明还发现：倍长中线法最重要的一点就是延长中线一倍，完成全等三角形模型的构造。

参考小明思考问题的方法，解决问题：

如图 3，在正方形 $ABCD$ 中， E 为 AB 边的中点， G 、 F 分别为 AD ， BC 边上的点，若 $AG=2$ ， $BF=4$ ， $\angle GEF=90^\circ$ ，求 GF 的长。

【答案】【第 1 空】SAS

【第 2 空】 $1 < AD < 6$

【解答】解：（1）如图 2 中，延长 AD 到 E ，使 $DE=AD$ ，连接 BE 。

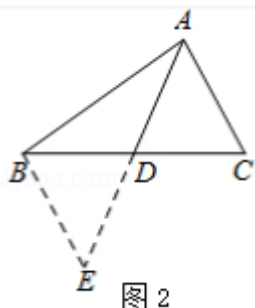


图 2

在 $\triangle BED$ 和 $\triangle CAD$ 中，

$$\begin{cases} BD=CD \\ \angle BDE=\angle ADC, \\ ED=AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle BED \cong \triangle CAD$ (SAS) .

（2） $\because \triangle BED \cong \triangle CAD$,

$\therefore BE=AC=5$, $\because AB=7$,

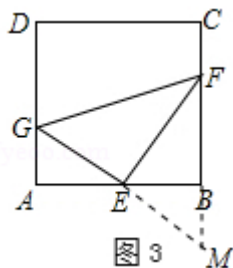
$\therefore 2 < AE < 12$,

$$\therefore 2 < 2AD < 12,$$

$$\therefore 1 < AD < 6.$$

故答案分别为 SAS , $1 < AD < 6$.

解决问题：如图 3 中，



解：延长 GE 交 CB 的延长线于 M .

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AD \parallel CM$,

$\therefore \angle AGE = \angle M$,

在 $\triangle AEG$ 和 $\triangle BEM$ 中，

$$\begin{cases} \angle AGE = \angle M \\ \angle AEG = \angle MEB, \\ AE = BE \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEG \cong \triangle BEM$,

$\therefore GE = EM, AG = BM = 2$,

$\because EF \perp MG$,

$\therefore FG = FM$,

$\because BF = 4$,

$\therefore MF = BF + BM = 2 + 4 = 6$,

$\therefore GF = FM = 6$.

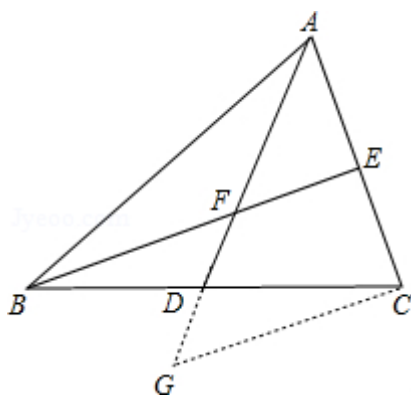
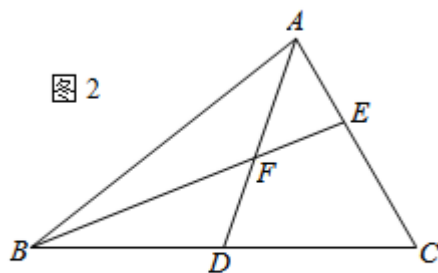
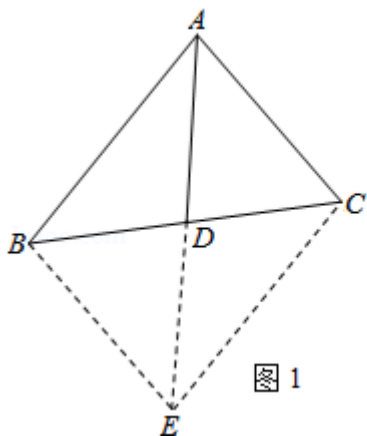
【知识点】 四边形综合题

2. 自主学习，学以致用

先阅读，再回答问题：如图 1，已知 $\triangle ABC$ 中， AD 为中线．延长 AD 至 E ，使 $DE = AD$ ．在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ECD$ 中， $AD = DE$ ， $\angle ADB = \angle EDC$ ， $BD = CD$ ，所以， $\triangle ABD \cong \triangle ECD$ (SAS)，进一步可得到 $AB = CE$ ， $AB \parallel CE$ 等结论．

在已知三角形的中线时，我们经常用“倍长中线”的辅助线来构造全等三角形，并进一步解决一些相关的计算或证明题．

解决问题 如图 2，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是三角形的中线， F 为 AD 上一点，且 $BF = AC$ ，连结并延长 BF 交 AC 于点 E ，求证： $AE = EF$ ．



【解答】

证明：延长 AD 到 G ，使 $DF=DG$ ，连接 CG ，

$\because AD$ 是中线，

$\therefore BD=DC$ ，

在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle CDG$ 中

$$\begin{cases} BD=DC \\ \angle BDF=\angle CDG \\ DF=DG \end{cases}$$

$\therefore \triangle BDF \cong \triangle CDG$ ，

$\therefore BF=CG$ ， $\angle BFD=\angle G$ ，

$\because \angle AFE=\angle BFD$ ，

$\therefore \angle AFE=\angle G$ ，

$\because BF=CG$ ， $BF=AC$ ，

$\therefore CG=AC$ ，

$\therefore \angle G=\angle CAF$ ，

$\therefore \angle AFE=\angle CAF$ ，

$\therefore AE=EF$ 。

【知识点】全等三角形的判定与性质

3. 阅读并解答问题。

如图，已知： AD 为 $\triangle ABC$ 的中线，求证： $AB+AC>2AD$ 。

证明：延长 AD 至 E 使得 $DE=AD$ ，连接 EC ，则 $AE=2AD$

$\because AD$ 为 $\triangle ABC$ 的中线

$$\therefore BD=CD$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CED$ 中

$$\begin{cases} (\quad) \\ (\quad), \\ (\quad) \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CED$$

$$\therefore AB=EC$$

在 $\triangle ACE$ 中，根据三角形的三边关系有

$$AC+EC \text{ ______ } AE$$

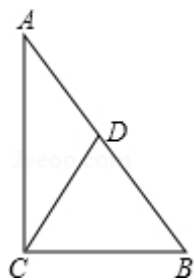
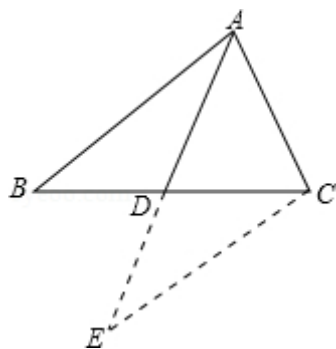
$$\text{而 } AB=EC, AE=2AD$$

$$\therefore AB+AC > 2AD$$

这种辅助线方法，我们称为“倍长中线法”，请利用这种方法解决以下问题：

(1) 如图，已知： CD 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的中线， $\angle ACB=90^\circ$ ，求证： $CD=\frac{1}{2}AB$ ；

(2) 把(1)中的结论用简洁的语言描述出来。



【答案】 >

【解答】解：(1) 证明：延长 CD 至 E 使 $DE=CD$ ，连接 EB ， AE 。

$\because CD$ 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的中线，

$$\therefore AD=CD,$$

$$\because CD=DE, \angle ADC=\angle EDB,$$

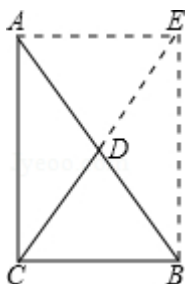
$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle EDB,$$

$$\therefore \angle ACD=\angle DEB, AC=BE,$$

$$\therefore AC \parallel BE,$$

$\therefore$ 四边形 $ACBE$ 是平行四边形，
 又 $\because \angle ACB = 90^\circ$ ，
 $\therefore$ 平行四边形 $ACBE$ 是矩形，
 $\therefore AB = CE$ ， $CD = DE = AD = BD$ ，
 $\therefore CD = \frac{1}{2}AB$ ；

(2) 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半。



【知识点】直角三角形斜边上的中线、全等三角形的判定与性质

4. 我们定义：如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，把 AB 绕点 A 顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) 得到 AB' ，把 AC 绕点 A 逆时针旋转 β 得到 AC' ，连接 $B'C'$ 。当 $\alpha + \beta = 180^\circ$ 时，我们称 $\triangle AB'C'$ 是 $\triangle ABC$ 的“旋补三角形”， $\triangle AB'C'$ 边 $B'C'$ 上的中线 AD 叫做 $\triangle ABC$ 的“旋补中线”，点 A 叫做“旋补中心”。

特例感知：

(1) 在图 2，图 3 中， $\triangle AB'C'$ 是 $\triangle ABC$ 的“旋补三角形”， AD 是 $\triangle ABC$ 的“旋补中线”。

① 如图 2，当 $\triangle ABC$ 为等边三角形时， AD 与 BC 的数量关系为 $AD = \underline{\hspace{2cm}} BC$ ；

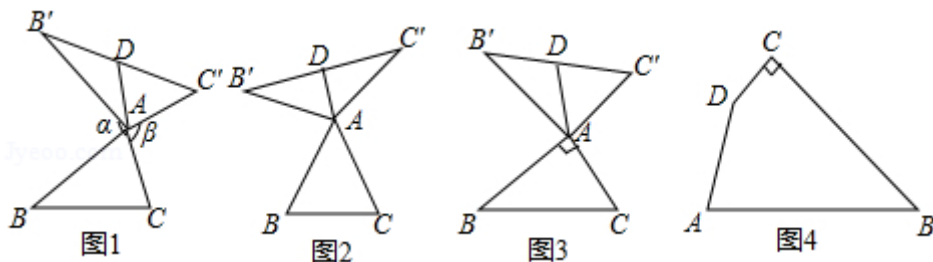
② 如图 3，当 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $BC = 8$ 时，则 AD 长为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

猜想论证：

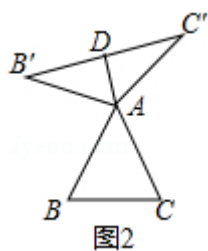
(2) 在图 1 中，当 $\triangle ABC$ 为任意三角形时，猜想 AD 与 BC 的数量关系，并给予证明。

拓展应用

(3) 如图 4，在四边形 $ABCD$ ， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle D = 150^\circ$ ， $BC = 12$ ， $CD = 2\sqrt{3}$ ， $AB = 2\sqrt{39}$ 。在四边形内部是否存在点 P ，使 $\triangle PDC$ 是 $\triangle PAB$ 的“旋补三角形”？若存在，给予证明，并求 $\triangle PAB$ 的“旋补中线”长；若不存在，说明理由。



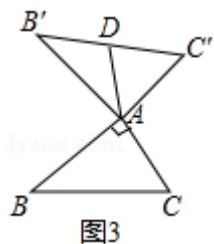
【解答】解：（1）①如图 2 中，



$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，
 $\therefore AB=BC=AC=AB'=AC'$ ，
 $\therefore DB'=DC'$ ，
 $\therefore AD \perp B'C'$ ，
 $\because \angle BAC=60^\circ$ ， $\angle BAC+\angle B'AC'=180^\circ$ ，
 $\therefore \angle B'AC'=120^\circ$ ，
 $\therefore \angle B'=\angle C'=30^\circ$ ，
 $\therefore AD=\frac{1}{2}AB'=\frac{1}{2}BC$ ，

故答案为 $\frac{1}{2}$ 。

②如图 3 中，



$\because \angle BAC=90^\circ$ ， $\angle BAC+\angle B'AC'=180^\circ$ ，
 $\therefore \angle B'AC'=\angle BAC=90^\circ$ ，
 $\because AB=AB'$ ， $AC=AC'$ ，
 $\therefore \triangle BAC \cong \triangle B'AC'$ ，
 $\therefore BC=B'C'$ ，
 $\because B'D=DC'$ ，
 $\therefore AD=\frac{1}{2}B'C'=\frac{1}{2}BC=1$ ，

故答案为 1。

（2）结论： $AD=\frac{1}{2}BC$ 。

理由：如图 1 中，延长 AD 到 M ，使得 $AD=DM$ ，连接 $B'M$ ， $C'M$

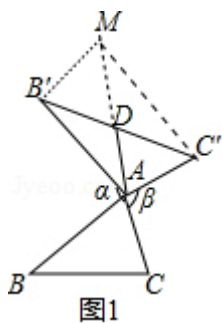


图1

$\because B'D = DC', AD = DM,$
 $\therefore$ 四边形 $AC'MB'$ 是平行四边形,
 $\therefore AC' = B'M = AC,$
 $\because \angle BAC + \angle B'AC' = 180^\circ, \angle B'AC' + \angle AB'M = 180^\circ,$
 $\therefore \angle BAC = \angle MB'A, \because AB = AB',$
 $\therefore \triangle BAC \cong \triangle AB'M,$
 $\therefore BC = AM,$
 $\therefore AD = \frac{1}{2}BC.$

(3) 存在.

理由: 如图 4 中, 延长 AD 交 BC 的延长线于 M , 作 $BE \perp AD$ 于 E , 作线段 BC 的垂直平分线交 BE 于 P , 交 BC 于 F , 连接 PA 、 PD 、 PC , 作 $\triangle PCD$ 的中线 PN . 连接 DF 交 PC 于 O .

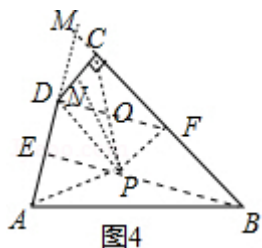


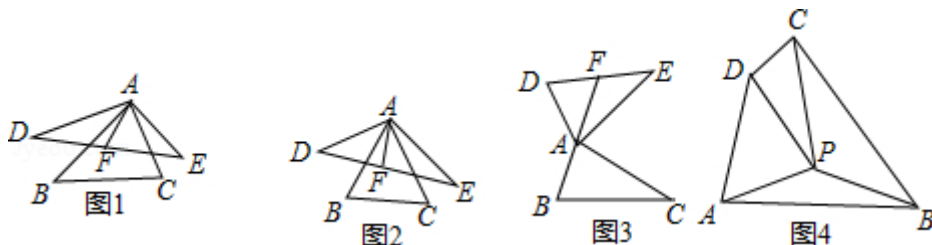
图4

$\because \angle ADC = 150^\circ,$
 $\therefore \angle MDC = 30^\circ,$
 在 $\text{Rt}\triangle DCM$ 中, $\because CD = 2\sqrt{3}, \angle DCM = 90^\circ, \angle MDC = 30^\circ,$
 $\therefore CM = 2, DM = 4, \angle M = 60^\circ,$
 在 $\text{Rt}\triangle BEM$ 中, $\because \angle BEM = 90^\circ, BM = 14, \angle MBE = 30^\circ,$
 $\therefore EM = \frac{1}{2}BM = 7,$
 $\therefore DE = EM - DM = 3,$
 $\therefore AD = 6,$
 $\therefore AE = DE, \because BE \perp AD,$
 $\therefore PA = PD, PB = PC,$
 在 $\text{Rt}\triangle CDF$ 中, $\because CD = 2\sqrt{3}, CF = 6,$
 $\therefore \tan \angle CDF = \sqrt{3},$
 $\therefore \angle CDF = 60^\circ$
 $\therefore \angle ADF = 90^\circ = \angle AEB,$
 $\therefore \angle CBE = \angle CFD,$

$\because \angle CBE = \angle PCF,$
 $\therefore \angle CFD = \angle PCF,$
 $\therefore \angle CFD + \angle CDF = 90^\circ, \angle PCF + \angle CPF = 90^\circ,$
 $\therefore \angle CPF = \angle CDF = 60^\circ = \angle CDF$
 易证 $\triangle FCP \cong \triangle CFD,$
 $\therefore CD = PF, \because CD \parallel PF,$
 $\therefore$ 四边形 $CDPF$ 是矩形,
 $\therefore \angle CDP = 90^\circ,$
 $\therefore \angle ADP = \angle ADC - \angle CDP = 60^\circ,$
 $\therefore \triangle ADP$ 是等边三角形,
 $\therefore \angle ADP = 60^\circ, \because \angle BPF = \angle CPF = 60^\circ,$
 $\therefore \angle BPC = 120^\circ,$
 $\therefore \angle APD + \angle BPC = 180^\circ,$
 $\therefore \triangle PDC$ 是 $\triangle PAB$ 的“旋补三角形”,
 $\therefore AB = 2\sqrt{39}.$
 $\therefore \triangle PAB$ 的“旋补中线”长 $= \frac{1}{2}AB = \sqrt{39}.$

【知识点】四边形综合题

5. 我们定义：如果两个三角形的两组对应边相等，且它们的夹角互补，我们就把其中一个三角形叫做另一个三角形的“夹补三角形”，同时把第三边的中线叫做“夹补中线”。例如：图1中， $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 的对应边 $AB = AD, AC = AE, \angle BAC + \angle DAE = 180^\circ$ ， AF 是 DE 边的中线，则 $\triangle ADE$ 就是 $\triangle ABC$ 的“夹补三角形”， AF 叫做 $\triangle ABC$ 的“夹补中线”。



特例感知：

(1) 如图2、图3中， $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 是一对“夹补三角形”， AF 是 $\triangle ABC$ 的“夹补中线”；

①当 $\triangle ABC$ 是一个等边三角形时， AF 与 BC 的数量关系是：_____；

②如图3当 $\triangle ABC$ 是直角三角形时， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $BC = a$ 时，则 AF 的长是_____；

猜想论证：

(2) 在图1中，当 $\triangle ABC$ 为任意三角形时，猜想 AF 与 BC 的关系，并给予证明。

拓展应用：

(3) 如图4，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle DCB = 90^\circ$ ， $\angle ADC = 150^\circ$ ， $BC = 2AD = 6$ ， $CD = \sqrt{3}$ ，若 $\triangle PAD$ 是等边三角形，求证： $\triangle PCD$ 是 $\triangle PBA$ 的“夹补三角形”，并求出它们的“夹补中线”。

的长.

【解答】解：（1）

$\because \triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 是一对“夹补三角形”，
 $\therefore AB=AD, AC=AE, \angle BAC+\angle DAE=180^\circ$ ，

① $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，
 $\therefore AB=AC=BC, \angle BAC=60^\circ$
 $\therefore AD=AE=AB=AC, \angle DAE=120^\circ$ ，
 $\therefore \angle ADE=30^\circ$ ，
 $\because AF$ 是“夹补中线”，
 $\therefore DF=EF$ ，
 $\therefore AF \perp DE$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中， $AF=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}BC$ ，

故答案为： $AF=\frac{1}{2}BC$ ；

② 当 $\triangle ABC$ 是直角三角形时， $\angle BAC=90^\circ$ ，

$\because \angle DAE=90^\circ = \angle BAC$ ，

易证， $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ ，

$\therefore DE=BC$ ，

$\because AF$ 是“夹补中线”，

$\therefore DF=EF$ ，

$\therefore AF=\frac{1}{2}DE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a$ ，

故答案为 $\frac{1}{2}a$ ；

（2）解：猜想： $AF=\frac{1}{2}BC$ ，

理由：如图 1，延长 DA 到 G ，使 $AG=AD$ ，连 EG

$\because \triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 是一对“夹补三角形”，

$\therefore AB=AD, AC=AE, \angle BAC+\angle DAE=180^\circ$ ，

$\therefore AG=AB, \angle EAG=\angle BAC, AE=AC$ ，

$\therefore \triangle AEG \cong \triangle ACB$ ，

$\therefore EG=BC$ ，

$\because AF$ 是“夹补中线”，

$\therefore DF=EF$ ，

$\therefore AF=\frac{1}{2}EG$ ，

$\therefore AF=\frac{1}{2}BC$ ；

（3）证明：如图 4，

$\because \triangle PAD$ 是等边三角形,
 $\therefore DP=AD=3, \angle ADP=\angle APD=60^\circ$,
 $\therefore \angle ADC=150^\circ$,
 $\therefore \angle PDC=90^\circ$,
 作 $PH \perp BC$ 于 H ,
 $\therefore \angle BCD=90^\circ$
 $\therefore$ 四边形 $PHCD$ 是矩形,
 $\therefore CH=PD=3$,
 $\therefore BH=6-3=3=CH$,
 $\therefore PC=PB$,

在 $\text{Rt}\triangle PCD$ 中, $\tan \angle DPC = \frac{CD}{DP} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \angle DPC=30^\circ$
 $\therefore \angle CPH=\angle BPH=60^\circ$, $\angle APB=360^\circ - \angle APD - \angle DPC - \angle BPC=150^\circ$,
 $\therefore \angle APB+\angle CPD=180^\circ$,
 $\therefore DP=AP, PC=PB$,
 $\therefore \triangle PCD$ 是 $\triangle PBA$ 的“夹补三角形”,

由 (2) 知, $\frac{1}{2}CD = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore \triangle PAB$ 的“夹补中线” $= \sqrt{3^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{39}}{2}$.

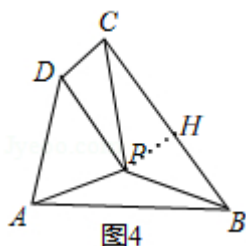


图4

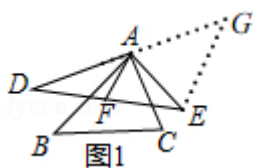


图1

【知识点】四边形综合题

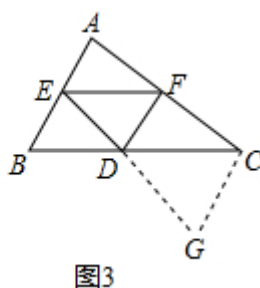
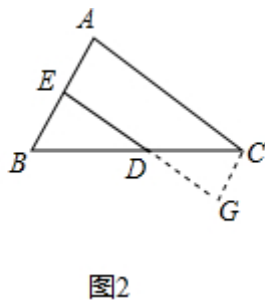
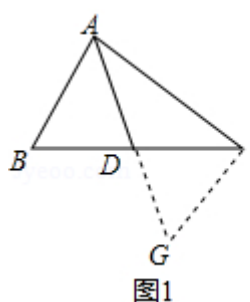
6. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是 BC 的中点, 延长 AD 到点 G , 使 $DG=AD$, 连接 CG , 可以得到 $\triangle ABD \cong \triangle GCD$, 这种作辅助线的方法我们通常叫做“倍长中线法”.

如图 2, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是 BC 的中点, 点 E 是 AB 上一点, 连接 ED , 小明由图 1 中作辅助线的方法想到: 延长 ED 到点 G , 使 $DG=ED$, 连接 CG .

(1) 请直接写出线段 BE 和 CG 的关系: _____;

(2) 如图 3, 若 $\angle A=90^\circ$, 过点 D 作 $DF \perp DE$ 交 AC 于点 F , 连接 EF , 已知 $BE=3$, $CF=2\sqrt{5}$

，其它条件不变，求 EF 的长.



【答案】 $BE=CG$

【解答】解：（1） $\because$ 点 D 是 BC 的中点，

$$\therefore BD=CD,$$

在 $\triangle EBD$ 和 $\triangle GCD$ 中，

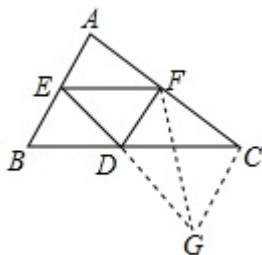
$$\therefore \begin{cases} BD=CD \\ \angle BDE=\angle CDG, \\ DE=DG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EBD \cong \triangle GCD \text{ (SAS)},$$

$$\therefore BE=CG,$$

故答案为： $BE=CG$;

（2）如图，连接 GF ，



由（1）知 $\triangle EBD \cong \triangle GCD$,

$$\therefore \angle B = \angle GCD, BE=CG=3,$$

$$\text{又} \because \angle A=90^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle BCA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GCD + \angle BCA = 90^\circ, \text{ 即 } \angle GCF = 90^\circ,$$

$$\therefore CG=3, CF=2\sqrt{5},$$

$$\therefore FG = \sqrt{CG^2 + CF^2} = \sqrt{29},$$

$$\therefore DF \perp DE, \text{ 且 } DE=DG,$$

$$\therefore EF=FG=\sqrt{29}.$$

【知识点】全等三角形的判定与性质

7.[方法呈现]

（1）如图①， $\triangle ABC$ 中， AD 为中线，已知 $AB=3$ ， $AC=5$ ，求中线 AD 长的取值范围.

解决此问题可以用如下方法：

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要
下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/645243032030011332>