

江苏省太湖高级中学 2023-2024 学年高三第五次模拟考试数学试卷

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $a \cos B + b \sin A = c$. 若 $a = 2$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 $3(\sqrt{2} - 1)$ ，则 $b + c =$ ()

- A. 5 B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. 16

2. 已知 R 为实数集， $A = \{x | x^2 - 1 \leq 0\}$ ， $B = \left\{x | \frac{1}{x} \geq 1\right\}$ ，则 $A \cap (\complement_R B) =$ ()

- A. $\{x | -1 < x \leq 0\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ C. $\{x | -1 \leq x \leq 0\}$ D. $\{x | -1 \leq x \leq 0 \text{ 或 } x = 1\}$

3. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的所有三个元素的子集记为 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n, n \in N^*$. 记 b_i 为集合 B_i 中的最大元素，则 $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n =$ ()

- A. 45 B. 105 C. 150 D. 210

4. 2019 年某校迎国庆 70 周年歌咏比赛中，甲乙两个合唱队每场比赛得分的茎叶图如图所示（以十位数字为茎，个位数字为叶）. 若甲队得分的中位数是 86，乙队得分的平均数是 88，则 $x + y =$ ()

甲				乙		
8	8	7	8			
8	2	x	8	2	y	9
7	6	9	9	1	3	7

- A. 170 B. 10 C. 172 D. 12

5. 本次模拟考试结束后，班级要排一张语文、数学、英语、物理、化学、生物六科试卷讲评顺序表，若化学排在生物前面，数学与物理不相邻且都不排在最后，则不同的排表方法共有 ()

- A. 72 种 B. 144 种 C. 288 种 D. 360 种

6. 若点 $P(-3, 4)$ 是角 α 的终边上一点，则 $\sin 2\alpha =$ ()

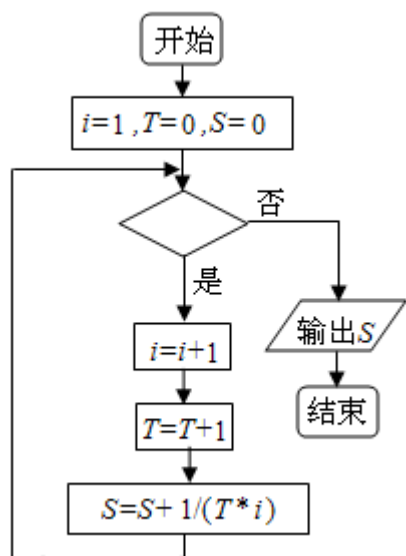
- A. $-\frac{24}{25}$ B. $-\frac{7}{25}$ C. $\frac{16}{25}$ D. $\frac{8}{5}$

7. 已知函数 $f(x) = A \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) - a$ ($0 < a < A$) 在区间 $\left[0, \frac{7\pi}{3\omega}\right]$ 有三个零点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 若

$x_1 + 2x_2 + x_3 = \frac{5\pi}{3}$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 ()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. π D. $\frac{4\pi}{3}$

8. 一个算法的程序框图如图所示, 若该程序输出的结果是 $\frac{3}{4}$, 则判断框中应填入的条件是 ()



- A. $i > 5?$ B. $i < 5?$ C. $i > 4?$ D. $i < 4?$

9. 在声学中, 声强级 L (单位: dB) 由公式 $L = 10 \lg\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$ 给出, 其中 I 为声强 (单位: W/m^2). $L_1 = 60\text{dB}$,

$L_2 = 75\text{dB}$, 那么 $\frac{I_1}{I_2} =$ ()

- A. $10^{\frac{4}{5}}$ B. $10^{\frac{4}{5}}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $10^{\frac{3}{2}}$

10. 已知 x, y 满足 $\begin{cases} x-y \leq 0 \\ x+y \leq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$, 则 $\frac{y-3}{x-2}$ 的取值范围为 ()

- A. $\left[\frac{3}{2}, 4\right]$ B. $(1, 2]$ C. $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ D. $(-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$

11. 已知 $z = i(3-2i)$, 则 $z \cdot \bar{z} =$ ()

- A. 5 B. $\sqrt{5}$ C. 13 D. $\sqrt{13}$

12. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 数列 $\{a_n\}$ 对任意的 $p, q \in \mathbb{N}^*$ 满足 $a_{p+q} = a_p + a_q + 13$. 若 $a_3 = -7$, 则当 S_n

取最小值时, n 等于 ()

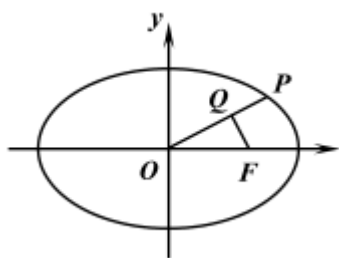
- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. $\left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^8$ 展开式的第 5 项的系数为_____.

14. 如图, 椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 e , F 是 Γ 的右焦点, 点 P 是 Γ 上第一象限内任意一点,

$\vec{OQ} = \lambda \vec{OP} (\lambda > 0)$, $\vec{FQ} \cdot \vec{OP} = 0$, 若 $\lambda < e$, 则 e 的取值范围是_____.



15. 已知 x, y 为正实数, 且 $xy + 2x + 4y = 41$, 则 $x + y$ 的最小值为_____.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 3a_n$, 且 $a_2 + a_4 + a_6 = 9$, 则 $\log_{\frac{1}{3}}(a_5 + a_7 + a_9) =$ _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = a(x+1)\ln(x+1) - x^2 - ax (a > 0)$ 是减函数.

(1) 试确定 a 的值;

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ $a_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} T_n = a_1 a_2 a_3 \dots a_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 求证: $\ln[(n+2)T_n] < 1 - \frac{n}{2}$.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x+m) + m, m \in \mathbb{R}$.

(1) 若 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极值点, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $m \leq 2$ 时, 证明: $f(x) > m$

19. (12 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n \neq 0$, $a_1 = 1$ 且 $a_{n+1} - a_n + 3a_{n+1}a_n = 0$.

(1) 证明: 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n \cdot a_{n+1}\}$ 的前 n 项和 S_n .

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax - \ln x (a \in \mathbb{R})$.

(1) 若 $a=2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 设 $g(x) = f(x) + \frac{3}{2}x^2 + 1$, 若函数 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上有两个零点, 求实数 a 的取值范围.

21. (12 分) 已知在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = \frac{3\pi}{4}$, $AB \perp AD$, $AB = 1$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求 AC 的长;

(2) 已知 $CD = \frac{\sqrt{17}}{2}$, $\angle ADC$ 为锐角, 求 $\tan \angle ADC$.

22. (10 分) 设数阵 $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, 其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \{1, 2, \dots, 6\}$. 设 $S = \{e_1, e_2, \dots, e_l\} \subseteq \{1, 2, \dots, 6\}$,

其中 $e_1 < e_2 < \dots < e_l$, $l \in \mathbb{N}^*$ 且 $l \leq 6$. 定义变换 φ_k 为“对于数阵的每一行, 若其中有 k 或 $-k$, 则将这一行中每个数都乘以 -1 ; 若其中没有 k 且没有 $-k$, 则这一行中所有数均保持不变” ($k = e_1, e_2, \dots, e_l$). $\varphi_S(A_0)$ 表示“将 A_0 经过 φ_{e_1} 变换得到 A_1 , 再将 A_1 经过 φ_{e_2} 变换得到 $A_2, \dots$, 以此类推, 最后将 A_{l-1} 经过 φ_{e_l} 变换得到 A_l ”, 记数阵 A_l 中四个数的和为 $T_S(A_0)$.

(1) 若 $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, 写出 A_0 经过 φ_2 变换后得到的数阵 A_1 ;

(2) 若 $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $S = \{1, 3\}$, 求 $T_S(A_0)$ 的值;

(3) 对任意确定的一个数阵 A_0 , 证明: $T_S(A_0)$ 的所有可能取值的和不超过 -4 .

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

根据正弦定理边化角以及三角函数公式可得 $A = \frac{\pi}{4}$, 再根据面积公式可求得 $bc = 6(2 - \sqrt{2})$, 再代入余弦定理求解即可.

【详解】

$\triangle ABC$ 中, $a \cos B + b \sin A = c$, 由正弦定理得 $\sin A \cos B + \sin B \sin A = \sin C$,

$$\text{又} \sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B,$$

$$\therefore \sin B \sin A = \cos A \sin B, \text{又} \sin B \neq 0, \therefore \sin A = \cos A, \therefore \tan A = 1, \text{又} A \in (0, \pi),$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{4} \therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{\sqrt{2}}{4} bc = 3(\sqrt{2} - 1),$$

$$\therefore bc = 6(2 - \sqrt{2}), \therefore a = 2, \therefore \text{由余弦定理可得 } a^2 = (b+c)^2 - 2bc - 2bc \cos A,$$

$$\therefore (b+c)^2 = 4 + (2 + \sqrt{2})bc = 4 + (2 + \sqrt{2}) \times 6(2 - \sqrt{2}) = 16, \text{可得 } b+c = 4.$$

故选：C

【点睛】

本题主要考查了解三角形中正余弦定理与面积公式的运用,属于中档题.

2、C

【解析】

求出集合 A , B , $\complement_R B$, 由此能求出 $A \cap (\complement_R B)$.

【详解】

$$Q R \text{ 为实数集, } A = \{x | x^2 - 1, 0\} = \{x | -1, x, 1\}, B = \{x | \frac{1}{x} \dots 1\} = \{x | 0 < x, 1\},$$

$$\therefore \complement_R B = \{x | x, 0 \text{ 或 } x > 1\},$$

$$\therefore A \cap (\complement_R B) = \{x | -1, x, 0\}.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查交集、补集的求法,考查交集、补集的性质等基础知识,考查运算求解能力,是基础题.

3、B

【解析】

分类讨论,分别求出最大元素为 3,4,5,6 的三个元素子集的个数,即可得解.

【详解】

集合 M 含有 3 个元素的子集共有 $C_6^3 = 20$, 所以 $k = 20$.

在集合 $B_i (i = 1, 2, 3, \dots, k)$ 中:

最大元素为 3 的集合有 $C_2^2 = 1$ 个;

最大元素为 4 的集合有 $C_3^2 = 3$;

最大元素为5的集合有 $C_4^2 = 6$;

最大元素为6的集合有 $C_5^2 = 10$;

所以 $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 3 \times 1 + 4 \times 3 + 5 \times 6 + 6 \times 10 = 105$.

故选: B.

【点睛】

此题考查集合相关的新定义问题, 其本质在于弄清计数原理, 分类讨论, 分别求解.

4、D

【解析】

中位数指一串数据按从小(大)到大(小)排列后, 处在最中间的那个数, 平均数指一串数据的算术平均数.

【详解】

由茎叶图知, 甲的中位数为 $80 + x = 86$, 故 $x = 6$;

乙的平均数为 $\frac{78 + 82 + 80 + y + 89 + 91 + 93 + 97}{7} = 88$,

解得 $y = 6$, 所以 $x + y = 12$.

故选: D.

【点睛】

本题考查茎叶图的应用, 涉及到中位数、平均数的知识, 是一道容易题.

5、B

【解析】

利用分步计数原理结合排列求解即可

【详解】

第一步排语文, 英语, 化学, 生物4种, 且化学排在生物前面, 有 $A_4^2 = 12$ 种排法; 第二步将数学和物理插入前4科

除最后位置外的4个空挡中的2个, 有 $A_4^2 = 12$ 种排法, 所以不同的排表方法共有 $12 \times 12 = 144$ 种.

选 B.

【点睛】

本题考查排列的应用, 不相邻采用插空法求解, 准确分步是关键, 是基础题

6、A

【解析】

根据三角函数的定义, 求得 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, 再由正弦的倍角公式, 即可求解.

【详解】

由题意，点 $P(-3,4)$ 是角 α 的终边上一点，

根据三角函数的定义，可得 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$,

则 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{4}{5} \times (-\frac{3}{5}) = -\frac{24}{25}$ ，故选 A.

【点睛】

本题主要考查了三角函数的定义和正弦的倍角公式的化简、求值，其中解答中根据三角函数的定义和正弦的倍角公式，准确化简、计算是解答的关键，着重考查了推理与运算能力，属于基础题.

7、C

【解析】

根据题意，知当 $x = \frac{7\pi}{3\omega}$ 时， $\omega x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{2}$ ，由对称轴的性质可知 $x_1 + x_2 = \frac{2\pi}{3\omega}$ 和 $x_2 + x_3 = \frac{8\pi}{3\omega}$ ，即可求出 ω ，即可求

出 $f(x)$ 的最小正周期.

【详解】

解：由于 $f(x) = A \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) - a$ ($0 < a < A$) 在区间 $\left[0, \frac{7\pi}{3\omega}\right]$ 有三个零点 x_1, x_2, x_3 ，

当 $x = \frac{7\pi}{3\omega}$ 时， $\omega x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{2}$ ，

$\therefore$ 由对称轴可知 x_1, x_2 满足 $\omega x_1 + \frac{\pi}{6} + \omega x_2 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \times 2$ ，

即 $x_1 + x_2 = \frac{2\pi}{3\omega}$.

同理 x_2, x_3 满足 $\omega x_2 + \frac{\pi}{6} + \omega x_3 + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \times 2$ ，即 $x_2 + x_3 = \frac{8\pi}{3\omega}$ ，

$\therefore x_1 + 2x_2 + x_3 = \frac{10\pi}{3\omega} = \frac{5\pi}{3}$ ， $\omega = 2$ ，

所以最小正周期为： $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

故选：C.

【点睛】

本题考查正弦型函数的最小正周期，涉及函数的对称性的应用，考查计算能力.

8、D

【解析】

首先判断循环结构类型，得到判断框内的语句性质，然后对循环体进行分析，找出循环规律，判断输出结果与循环次数以及*i*的关系，最终得出选项。

【详解】

经判断此循环为“直到型”结构，判断框为跳出循环的语句，

$$\text{第一次循环: } S = 0 + \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}, \quad i = 1 + 1 = 2;$$

$$\text{第二次循环: } S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{2}{3}, \quad i = 2 + 1 = 3;$$

$$\text{第三次循环: } S = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \times 4} = \frac{3}{4}, \quad i = 3 + 1 = 4,$$

此时退出循环，根据判断框内为跳出循环的语句， $\therefore i < 4?$ ，故选 D。

【点睛】

题主要考查程序框图的循环结构流程图，属于中档题。解决程序框图问题时一定注意以下几点：(1) 不要混淆处理框和输入框；(2) 注意区分程序框图是条件分支结构还是循环结构；(3) 注意区分当型循环结构和直到型循环结构；(4) 处理循环结构的问题时一定要正确控制循环次数；(5) 要注意各个框的顺序，(6) 在给出程序框图求解输出结果的试题中只要按照程序框图规定的运算方法逐次计算，直到达到输出条件即可。

9、D

【解析】

由 $L = 101g\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$ 得 $\lg I = \frac{L}{10} - 12$ ，分别算出 I_1 和 I_2 的值，从而得到 $\frac{I_1}{I_2}$ 的值。

【详解】

$$\therefore L = 101g\left(\frac{I}{10^{-12}}\right),$$

$$\therefore L = 10(\lg I - \lg 10^{-12}) = 10(\lg I + 12),$$

$$\therefore \lg I = \frac{L}{10} - 12,$$

$$\text{当 } L_1 = 60 \text{ 时, } \lg I_1 = \frac{L_1}{10} - 12 = \frac{60}{10} - 12 = -6, \therefore I_1 = 10^{-6},$$

$$\text{当 } L_2 = 75 \text{ 时, } \lg I_2 = \frac{L_2}{10} - 12 = \frac{75}{10} - 12 = -4.5, \therefore I_2 = 10^{-4.5},$$

$$\therefore \frac{I_1}{I_2} = \frac{10^{-6}}{10^{-4.5}} = 10^{-1.5} = 10^{-\frac{3}{2}},$$

故选：D.

【点睛】

本小题主要考查对数运算，属于基础题.

10、C

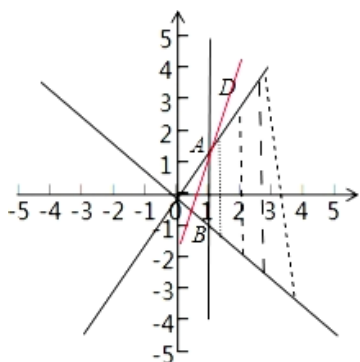
【解析】

设 $k = \frac{y-3}{x-2}$ ，则 k 的几何意义为点 (x, y) 到点 $(2, 3)$ 的斜率，利用数形结合即可得到结论.

【详解】

解：设 $k = \frac{y-3}{x-2}$ ，则 k 的几何意义为点 $P(x, y)$ 到点 $D(2, 3)$ 的斜率，

作出不等式组对应的平面区域如图：



由图可知当过点 D 的直线平行于 x 轴时，此时 $k = \frac{y-3}{x-2} = 0$ 成立；

$k = \frac{y-3}{x-2}$ 取所有负值都成立；

当过点 A 时， $k = \frac{y-3}{x-2}$ 取正值中的最小值， $\begin{cases} x=1 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow A(1,1)$ ，此时 $k = \frac{y-3}{x-2} = \frac{1-3}{1-2} = 2$ ；

故 $\frac{y-3}{x-2}$ 的取值范围为 $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ ；

故选：C.

【点睛】

本题考查简单线性规划的非线性目标函数问题，解题时作出可行域，利用目标函数的几何意义求解是解题关键. 对于直线斜率要注意斜率不存在的直线是否存在.

11、C

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/645322041011011201>