

几何最值问题综合



题型大集合

1、将军饮马类几何最值

2、辅助圆类几何最值

3、瓜豆原理类几何最值

4、其他类几何最值



题型大提升

题型一：将军饮马类几何最值



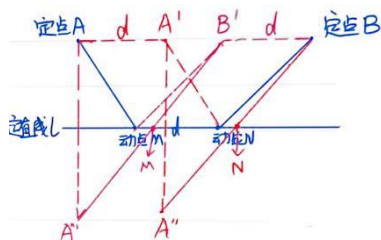
1. “两定一动”型将军饮马：

①异侧型 → 直接连接，交点即为待求动点；后用勾股定理求最值

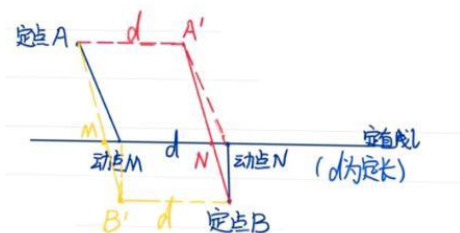
②同侧型 → 对称、连接；后续同上

2. “两定两动”型：

①同侧型 → 先水平平移（往靠近对方的方向）、再对称、最后连接；也可先对称、再水平平移（往靠近对方的方向）、最后连接；后续同上。



同侧型

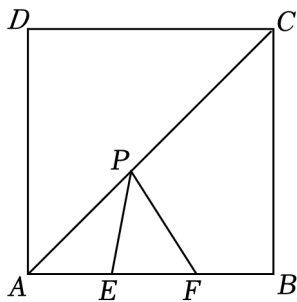


异侧型

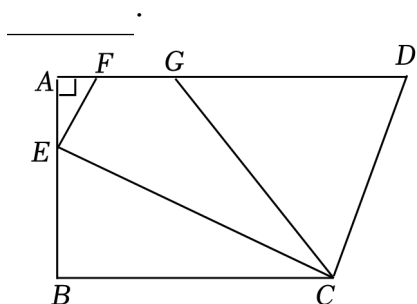
②异侧型 → 先水平平移（往靠近对方的方向）、再连接；后续同上。

【中考真题练】

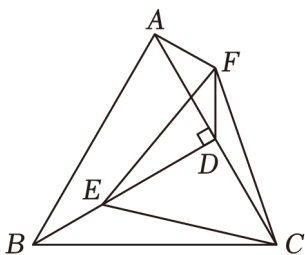
题目 1 (2023·泸州) 如图， E, F 是正方形 $ABCD$ 的边 AB 的三等分点， P 是对角线 AC 上的动点，当 $PE + PF$ 取得最小值时， $\frac{AP}{PC}$ 的值是 _____。



题目 2 (2023·德州) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AD \parallel BC$, $AB = 3$, $BC = 4$, 点 E 在 AB 上, 且 $AE = 1$. F, G 为边 AD 上的两个动点, 且 $FG = 1$. 当四边形 $CGFE$ 的周长最小时, CG 的长为

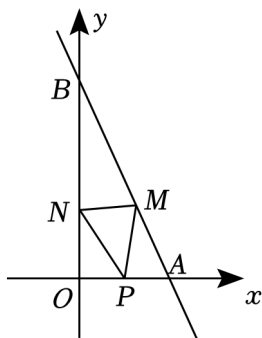


题目 3 (2023·绥化) 如图, $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形, 点 E 为高 BD 上的动点. 连接 CE , 将 CE 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 CF . 连接 AF, EF, DF , 则 $\triangle CDF$ 周长的最小值是



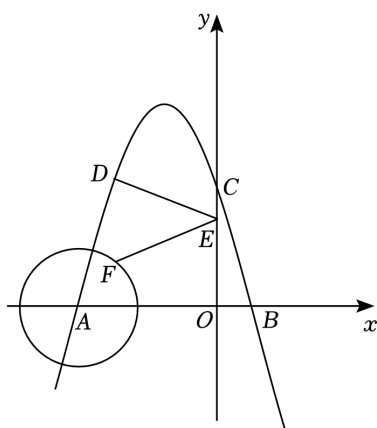
【中考模拟练】

题目 4 (2024·衡南县模拟) 已知: 如图, 直线 $y = -2x + 4$ 分别与 x 轴, y 轴交于 A, B 两点, 点 $P(1, 0)$, 若在直线 AB 上取一点 M , 在 y 轴上取一点 N , 连接 MN, MP, NP , 则 $MN + MP + NP$ 的最小值是 ()



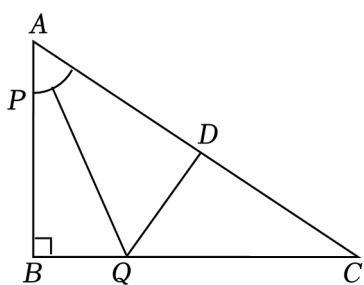
- A. 3 B. $1 + \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{85}}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{85}}{5}$ D. $\sqrt{10}$

题目 5 (2023·龙马潭区二模) 如图, 抛物线 $y = -x^2 - 3x + 4$ 与 x 轴交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C . 若点 D 为抛物线上一点且横坐标为 -3 , 点 E 为 y 轴上一点, 点 F 在以点 A 为圆心, 2 为半径的圆上, 则 $DE + EF$ 的最小值

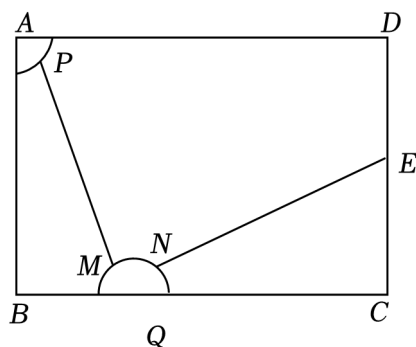


题目 6 (2024·碑林区校级一模) (1) 如图①, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 6$, $BC = 8$, 点 D 是边 AC 的中点. 以点 A 为圆心, 2 为半径在 $\triangle ABC$ 内部画弧, 若点 P 是上述弧上的动点, 点 Q 是边 BC 上的动点, 求 $PQ + QD$ 的最小值;

(2) 如图②, 矩形 $ABCD$ 是某在建的公园示意图, 其中 $AB = 200\sqrt{3}$ 米, $BC = 400$ 米. 根据实际情况, 需要在边 DC 的中点 E 处开一个东门, 同时根据设计要求, 要在以点 A 为圆心, 在公园内以 10 米为半径的圆弧上选一处点 P 开一个西北门, 还要在边 BC 上选一处点 Q , 在以 Q 为圆心, 在公园内以 10 米为半径的半圆的三等分点的 M 、 N 处开两个南门. 线段 PM 、 NE 是要修的两条道路. 为了节约成本, 希望 $PM + NE$ 最小. 试求 $PM + NE$ 最小值及此时 BQ 的长.



(图①)



(图②)

题目 7 (2023·卧龙区二模) 综合与实践

问题提出

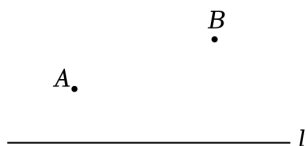
(1) 如图①, 请在直线 l 上找一点 P , 使点 P 到两个定点 A 和 B 的距离之和最小, 即 $PA + PB$ 的和最小 (保留作图痕迹, 不写作法);

思维转换

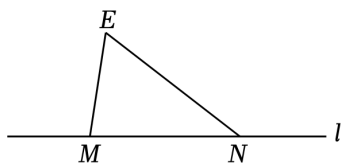
(2) 如图②, 已知点 E 是直线 l 外一定点, 且到直线 l 的距离为 4, MN 是直线 l 上的动线段, $MN = 6$, 连接 ME , NE , 求 $ME + NE$ 的最小值. 小敏在解题过程中发现: “借助物理学科的相对运动思维, 若将线段 MN 看作静线段, 则点 E 在平行于直线 l 的直线上运动”, 请你参考小敏的思路求 $ME + NE$ 的最小值;

拓展应用

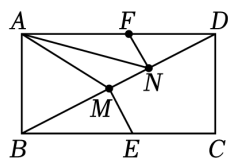
(3) 如图③, 在矩形 $ABCD$ 中, $AD = 2AB = 2\sqrt{5}$, 连接 BD , 点 E 、 F 分别是边 BC 、 AD 上的动点, 且 $BE = AF$, 分别过点 E 、 F 作 $EM \perp BD$, $FN \perp BD$, 垂足分别为 M 、 N , 连接 AM 、 AN , 请直接写出 $\triangle AMN$ 周长的最小值.



图①



图②



图③

题型二：辅助圆类几何最值

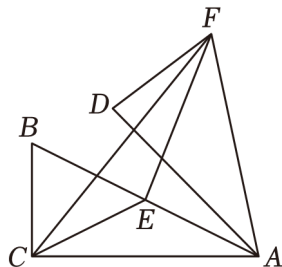


动点的运动轨迹为辅助圆的三种形式：

- 定义法** —— 若一动点到定点的距离恒等于固定长，则该点的运动轨迹为以定点为圆心，定长为半径的圆（或圆弧）
- 定边对直角** —— 若一条定边所对的“动角”始终为直角，则直角顶点运动轨迹是以该定边为直径的圆（或圆弧）
- 定边对定角** —— 若一条定边所对的“动角”始终为定角，则该定角顶点运动轨迹是以该定角为圆周角，该定边为弦的圆（或圆弧）

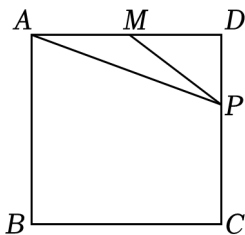
【中考真题练】

题目 8 (2023·黑龙江) 如图，在 $Rt\triangle ACB$ 中， $\angle BAC = 30^\circ$ ， $CB = 2$ ，点 E 是斜边 AB 的中点，把 $Rt\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转，得 $Rt\triangle AFD$ ，点 C ，点 B 旋转后的对应点分别是点 D ，点 F ，连接 CF ， EF ， CE ，在旋转的过程中， $\triangle CEF$ 面积的最大值是 _____。

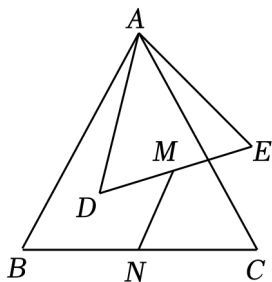


【中考模拟练】

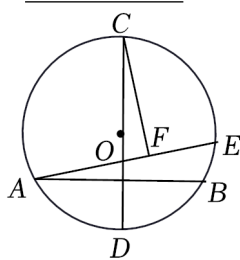
题目 9 (2023·永寿县二模) 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， M 是 AD 的中点，点 P 是 CD 上一个动点，当 $\angle APM$ 的度数最大时， CP 的长为 _____。



- 题目 10** (2023·营口一模) 如图, 等边三角形 ABC 和等边三角形 ADE , 点 N , 点 M 分别为 BC , DE 的中点, $AB=6$, $AD=4$, $\triangle ADE$ 绕点 A 旋转过程中, MN 的最大值为 _____.



- 题目 11** (2023·定远县校级一模) 如图, 半径为 4 的 $\odot O$ 中, CD 为直径, 弦 $AB \perp CD$ 且过半径 OD 的中点, 点 E 为 $\odot O$ 上一动点, $CF \perp AE$ 于点 F . 当点 E 从点 B 出发顺时针运动到点 D 时, 点 F 所经过的路径长为 _____.



- 题目 12** (2024·兰州模拟) 综合与实践

【问题情境】 在数学综合实践课上, “希望小组” 的同学们以三角形为背景, 探究图形变化过程中的几何问题, 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle BAC=90^\circ$, 点 D 为平面内一点 (点 A, B, D 三点不共线), AE 为 $\triangle ABD$ 的中线.

【初步尝试】 (1) 如图 1, 小林同学发现: 延长 AE 至点 M , 使得 $ME=AE$, 连接 DM . 始终存在以下两个结论, 请在①, ②中挑选一个进行证明:

① $DM=AC$; ② $\angle MDA + \angle DAB = 180^\circ$;

【类比探究】 (2) 如图 2, 将 AD 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 AF , 连接 CF . 小斌同学沿着小林同学的思考进一步探究后发现: $AE = \frac{1}{2}CF$, 请你帮他证明;

【拓展延伸】 (3) 如图 3, 在 (2) 的条件下, 王老师提出新的探究方向: 点 D 在以点 A 为圆心, AD 为半径的圆上运动 ($AD > AB$), 直线 AE 与直线 CF 相交于点 G , 连接 BG , 在点 D 的运动过程中 BG 存在最大值. 若 $AB=4$, 请直接写出 BG 的最大值.

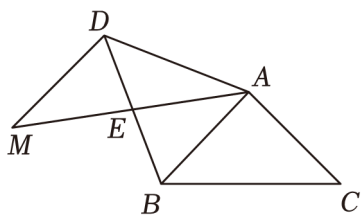


图 1

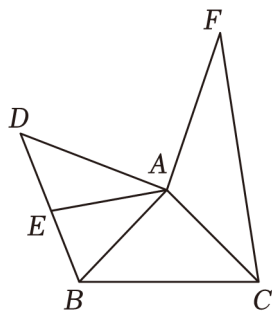


图 2

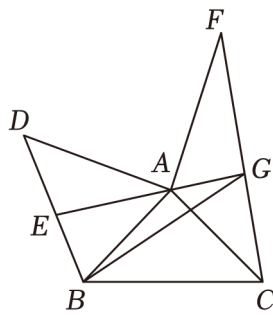


图 3

题型三：瓜豆原理类几何最值



大概动点问题符合瓜豆原理的模型时，也可以和几何最值结合

【中考真题练】

题目 13 (2022·沈阳)【特例感知】

(1) 如图 1, $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 是等腰直角三角形, $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$, 点 C 在 OA 上, 点 D 在 BO 的延长线上, 连接 AD, BC , 线段 AD 与 BC 的数量关系是 _____;

【类比迁移】

(2) 如图 2, 将图 1 中的 $\triangle COD$ 绕着点 O 顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), 那么第 (1) 问的结论是否仍然成立? 如果成立, 证明你的结论; 如果不成立, 说明理由.

【方法运用】

(3) 如图 3, 若 $AB = 8$, 点 C 是线段 AB 外一动点, $AC = 3\sqrt{3}$, 连接 BC .

① 若将 CB 绕点 C 逆时针旋转 90° 得到 CD , 连接 AD , 则 AD 的最大值是 _____;

② 若以 BC 为斜边作 $Rt\triangle BCD$ (B, C, D 三点按顺时针排列), $\angle CDB = 90^\circ$, 连接 AD , 当 $\angle CBD = \angle DAB = 30^\circ$ 时, 直接写出 AD 的值.

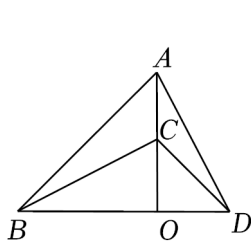


图 1

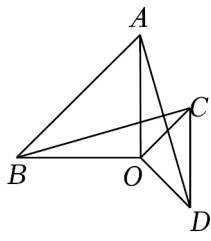


图 2

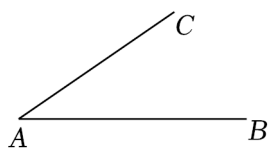


图 3

【中考模拟练】

题目 14 (2023·金平区三模) 如图, 长方形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, $BC = \frac{15}{2}$, E 为 BC 上一点, 且 $BE = \frac{3}{2}$, F

为 AB 边上的一个动点, 连接 EF , 将 EF 绕着点 E 顺时针旋转 45° 到 EG 的位置, 连接 FG 和 CG , 则 CG 的最小值为 _____.

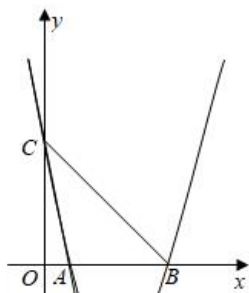


图1

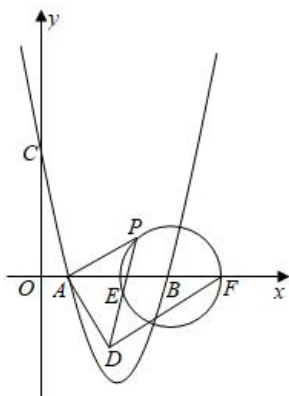


图2

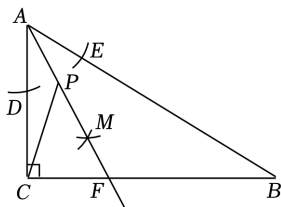
题型四：其他类几何最值



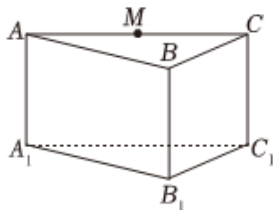
除了常见的模型与几何最值结合外,还有一些几何问题,应用直接的最值原理,比如:点到直线的距离垂线段最短等

【中考真题练】

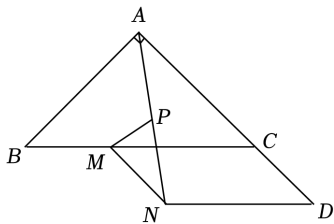
- 题目 18** (2023·锦州) 如图,在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, $AC = 4$,按下列步骤作图:①在 AC 和 AB 上分别截取 AD , AE ,使 $AD = AE$. ②分别以点 D 和点 E 为圆心,以大于 $\frac{1}{2}DE$ 的长为半径作弧,两弧在 $\angle BAC$ 内交于点 M . ③作射线 AM 交 BC 于点 F . 若点 P 是线段 AF 上的一个动点,连接 CP ,则 $CP + \frac{1}{2}AP$ 的最小值是 _____.



- 题目 19** (2023·德阳) 如图,在底面为正三角形的直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = 2\sqrt{3}$, $AA_1 = 2$,点 M 为 AC 的中点,一只小虫从 B_1 沿三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的表面爬行到 M 处,则小虫爬行的最短路程等于 _____.

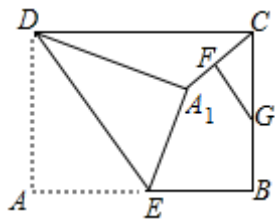


- 题目 20** (2023·常州) 如图,在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 4$, D 是 AC 延长线上的一点, $CD = 2$. M 是边 BC 上的一点(点 M 与点 B 、 C 不重合),以 CD 、 CM 为邻边作 $\square CMND$. 连接 AN 并取 AN 的中点 P ,连接 PM ,则 PM 的取值范围是 _____.

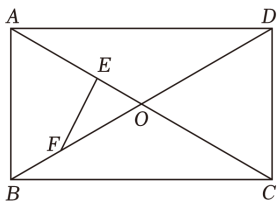


【中考模拟练】

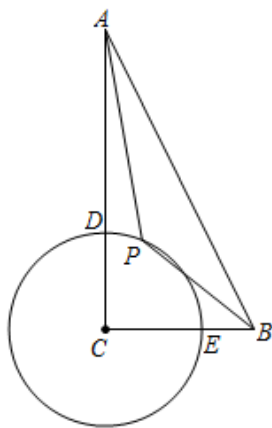
- 题目 21** (2024·济南一模) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=3$, E 为 AB 上一点, 连接 DE , 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折叠, 点 A 落在 A_1 处, 连接 A_1C , 若 F 、 G 分别为 A_1C 、 BC 的中点, 则 FG 的最小值为 _____.



- 题目 22** (2024·郾城区一模) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AD=6\sqrt{3}$, $AB=6$, 对角线 AC , BD 相交于点 O , 点 E 在线段 AC 上, 且 $AE=4$, 点 F 为线段 BD 上的一个动点, 则 $EF + \frac{1}{2}BF$ 的最小值为 _____.



- 题目 23** (2024·肇东市模拟) 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=9$, $BC=4$, 以点 C 为圆心, 3 为半径做 $\odot C$, 分别交 AC , BC 于 D , E 两点, 点 P 是 $\odot C$ 上一个动点, 则 $\frac{1}{3}PA + PB$ 的最小值为 _____.



几何最值问题综合



题型大集合

1、将军饮马类几何最值

2、辅助圆类几何最值

3、瓜豆原理类几何最值

4、其他类几何最值



题型大提升

题型一：将军饮马类几何最值



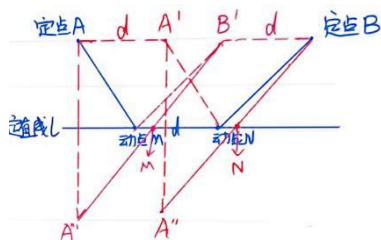
1. “两定一动”型将军饮马：

①异侧型 → 直接连接，交点即为待求动点；后用勾股定理求最值

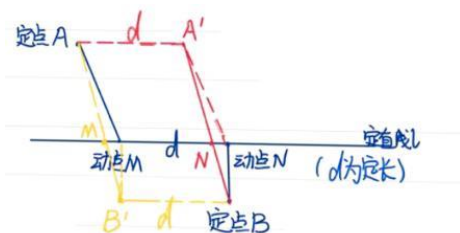
②同侧型 → 对称、连接；后续同上

2. “两定两动”型：

①同侧型 → 先水平平移（往靠近对方的方向）、再对称、最后连接；也可先对称、再水平平移（往靠近对方的方向）、最后连接；后续同上。



同侧型

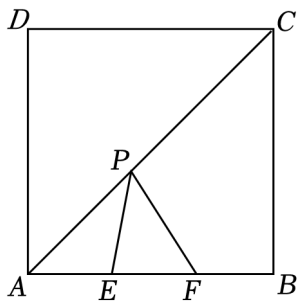


异侧型

②异侧型 → 先水平平移（往靠近对方的方向）、再连接；后续同上。

【中考真题练】

题目 1 (2023·泸州) 如图， E, F 是正方形 $ABCD$ 的边 AB 的三等分点， P 是对角线 AC 上的动点，当 $PE + PF$ 取得最小值时， $\frac{AP}{PC}$ 的值是 $\frac{2}{7}$ 。



【分析】找出点 E 关于 AC 的对称点 E' , 连接 FE' 与 AC 的交点 P' 即为 $PE + PF$ 取得最小值时, 点 P 的位置, 再设法求出 $\frac{AP'}{P'C}$ 的值即可.

【解答】解: 作点 E 关于 AC 的对称点 E' , 连接 FE' 交 AC 于点 P' , 连接 PE' ,
 $\therefore PE = PE'$,

$\therefore PE + PF = PE' + PF \geq E'F$,

故当 $PE + PF$ 取得最小值时, 点 P 位于点 P' 处,

$\therefore$ 当 $PE + PF$ 取得最小值时, 求 $\frac{AP}{PC}$ 的值, 只要求出 $\frac{AP'}{P'C}$ 的值即可.

$\because$ 正方形 $ABCD$ 是关于 AC 所在直线轴对称,

$\therefore$ 点 E 关于 AC 所在直线对称的对称点 E' 在 AD 上, 且 $AE' = AE$,

过点 F 作 $FG \perp AB$ 交 AC 于点 G ,

则 $\angle GFA = 90^\circ$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle DAB = \angle B = 90^\circ$, $\angle CAB = \angle ACB = 45^\circ$,

$\therefore FG \parallel BC \parallel AD$, $\angle AGF = \angle ACB = 45^\circ$,

$\therefore GF = AF$,

$\because E, F$ 是正方形 $ABCD$ 的边 AB 的三等分点,

$\therefore AE' = AE = EF = FB$,

$\therefore GC = \frac{1}{3}AC$, $\frac{AE'}{GF} = \frac{AE}{AF} = \frac{1}{2}$,

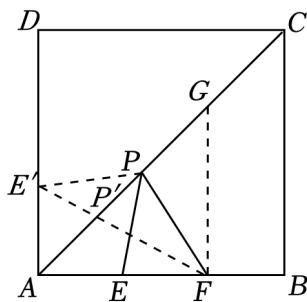
$\therefore AG = \frac{2}{3}AC$, $\frac{AP'}{P'C} = \frac{AE'}{GF} = \frac{1}{2}$,

$\therefore AP' = \frac{1}{3}AG = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}AC = \frac{2}{9}AC$,

$\therefore P'C = AC - AP' = AC - \frac{2}{9}AC = \frac{7}{9}AC$,

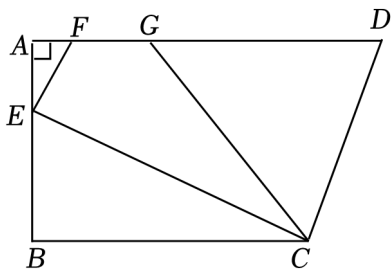
$\therefore \frac{AP'}{P'C} = \frac{\frac{2}{9}AC}{\frac{7}{9}AC} = \frac{2}{7}$,

故答案为: $\frac{2}{7}$.



题目 2 (2023·德州) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AD \parallel BC$, $AB = 3$, $BC = 4$, 点 E 在 AB 上, 且 $AE = 1$. F, G 为边 AD 上的两个动点, 且 $FG = 1$. 当四边形 $CGFE$ 的周长最小时, CG 的长为

$\frac{15}{4}$.



【分析】先确定 FG 和 EC 的长为确定的值, 得到四边形 $CGFE$ 的周长最小时, 即为 $CG + EF$ 最小时, 平移 CG 到 $C'F$, 作点 E 关于 AD 对称点 E' , 连接 $E'C'$ 交 AD 于点 G' , 得到 $CG + EF$ 最小时, 点 G 与 G' 重合, 再利用平行线分线段成比例求出 $C'G'$ 长即可.

【解答】解: $\because \angle A = 90^\circ, AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle B = 90^\circ,$$

$$\because AB = 3, BC = 4, AE = 1,$$

$$\therefore BE = AB - AE = 3 - 1 = 2,$$

在 $Rt\triangle EBC$ 中,

$$\text{由勾股定理, 得 } EC = \sqrt{BE^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\because FG = 1,$$

$$\therefore \text{四边形 } CGFE \text{ 的周长} = CG + FG + EF + EC = CG + EF + 1 + 2\sqrt{5},$$

$\therefore$ 四边形 $CGFE$ 的周长最小时, 只要 $CG + EF$ 最小即可.

过点 F 作 $FC' \parallel GC$ 交 BC 于点 C' , 延长 BA 到 E' , 使 $AE' = AE = 1$, 连接 $E'F, E'C'$, $E'C'$ 交 AD 于点 G' , 可得 AD 垂直平分 $E'E$,

$$\therefore E'F = EF,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore C'F = CG, CC' = FG = 1,$$

$$\therefore CG + EF = C'F + E'F \geq E'C',$$

即 $CG + EF$ 最小时, $CG = C'G'$,

$$\because E'B = AB + AE' = 3 + 1 = 4, BC' = BC - CC' = 4 - 1 = 3,$$

$$\text{由勾股定理, 得 } E'C' = \sqrt{E'B^2 + BC'^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

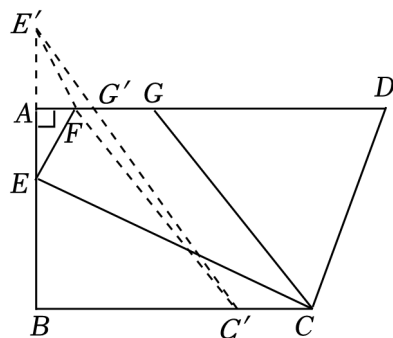
$$\because AG' \parallel BC',$$

$$\therefore \frac{C'G'}{E'C'} = \frac{AB}{E'B}, \text{ 即 } \frac{C'G'}{5} = \frac{3}{4},$$

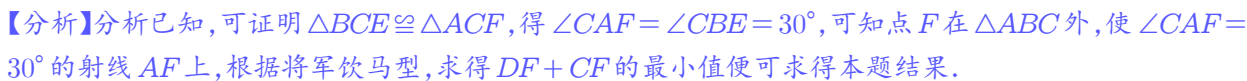
$$\text{解得 } C'G' = \frac{15}{4},$$

即四边形 $CGFE$ 的周长最小时, CG 的长为 $\frac{15}{4}$.

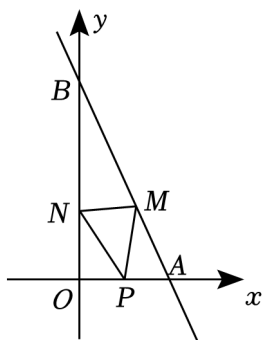
故答案为: $\frac{15}{4}$.



题目 3 (2023·绥化) 如图, $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形, 点 E 为高 BD 上的动点. 连接 CE , 将 CE 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 CF . 连接 AF, EF, DF , 则 $\triangle CDF$ 周长的最小值是 $3 + 3\sqrt{3}$.



题目 4 (2024·衡南县模拟) 已知:如图,直线 $y = -2x + 4$ 分别与 x 轴, y 轴交于 A 、 B 两点,点 $P(1, 0)$,若在直线 AB 上取一点 M ,在 y 轴上取一点 N ,连接 MN 、 MP 、 NP ,则 $MN + MP + NP$ 的最小值是 ()



A. 3

B. $1 + \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{85}}{5}$

C. $\frac{2\sqrt{85}}{5}$

D. $\sqrt{10}$

【分析】作点 P 关于 y 轴的对称点 E , 点 P 关于 AB 的对称点 F , 连接 EN, EM, EF, FM, FP , 设 FP 交 AB 于 C , 过点 F 作 $FD \perp x$ 轴于 D , 则 $EN = NP, FM = MP, FP \perp AB, OE = OP, FC = PC, MN + MP + NP = MN + FM + EN$, 根据“两点之间线段最短”得 $MN + FM + EN \geq EF$, 则 $MN + MP + NP \geq EF$, 因此 $MN + MP + NP$ 的最小值为线段 EF 的长; 先求出点 $A(2, 0)$, 点 $B(0, 4)$, 则 $OA = 2, OB = 4$, 再由点 $P(1, 0)$ 得 $OP = 1$, 则 $OE = OP = 1, PA = OA - OP = 1$, 再求出 $AB = 2\sqrt{5}$, 证 $\triangle PAC \sim \triangle BAO$ 得 $PC:OB = PA:AB$, 由此得 $PC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $PF = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, 再证 $\triangle PFD \sim \triangle BAO$ 得 $FD:OA = PD:OB = PF:AB$, 由此可得 $FD = \frac{4}{5}, PD = \frac{8}{5}$, 则 $ED = OE + OP + PD = \frac{18}{5}$, 然后在 $Rt\triangle EFD$ 中由勾股定理求出 EF 即可得 $MN + MP + NP$ 的最小值.

【解答】解: 作点 P 关于 y 轴的对称点 E , 点 P 关于 AB 的对称点 F , 连接 EN, EM, EF, FM, FP , 设 FP 交 AB 于 C , 过点 F 作 $FD \perp x$ 轴于 D , 如图所示:

则 $EN = NP, FM = MP, FP \perp AB, OE = OP, FC = PC$,

$\therefore MN + MP + NP = MN + FM + EN$,

根据“两点之间线段最短”得 $MN + FM + EN \geq EF$,

$\therefore MN + MP + NP \geq EF$,

$\therefore MN + MP + NP$ 的最小值为线段 EF 的长,

对于 $y = -2x + 4$, 当 $x = 0$ 时, $y = 4$, 当 $x = 2$ 时, $y = 0$,

$\therefore$ 点 $A(2, 0)$, 点 $B(0, 4)$,

$\therefore OA = 2, OB = 4$,

又 $\because$ 点 $P(1, 0)$,

$\therefore OP = 1$,

$\therefore OE = OP = 1, PA = OA - OP = 2 - 1 = 1$,

在 $Rt\triangle OAB$ 中, $OA = 2, OB = 4$,

由勾股定理得: $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 2\sqrt{5}$,

$\therefore FP \perp AB, FD \perp x$ 轴, $\angle BOA = 90^\circ$,

$\therefore \angle PCA = \angle BOA = \angle PDF = 90^\circ$,

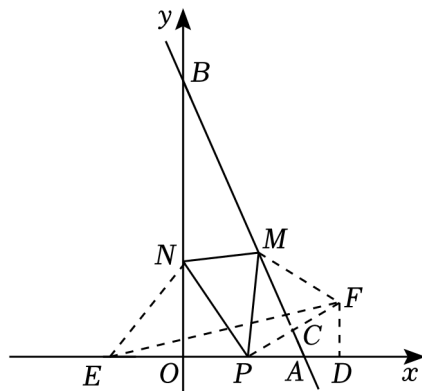
又 $\because \angle PAC = \angle BAO$,

$\therefore \triangle PAC \sim \triangle BAO$,

$\therefore PC:OB = PA:AB, \angle APC = \angle ABO$,

即 $PC:4 = 1:2\sqrt{5}$,

$\therefore PC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,



$$\therefore FC = PC = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore PF = FC + PC = \frac{4\sqrt{5}}{5},$$

$$\because \angle APC = \angle ABO, \angle BOA = \angle PDF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle PFD \sim \triangle BAO,$$

$$\therefore FD : OA = PD : OB = PF : AB,$$

$$\text{即 } FD : 2 = PD : 4 = \frac{4\sqrt{5}}{5} : 2\sqrt{5},$$

$$\therefore FD = \frac{4}{5}, PD = \frac{8}{5},$$

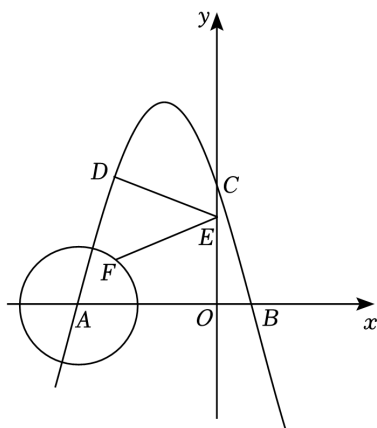
$$\therefore ED = OE + OP + PD = 1 + 1 + \frac{8}{5} = \frac{18}{5},$$

$$\text{在 } Rt\triangle EFD \text{ 中, } ED = \frac{18}{5}, FD = \frac{4}{5},$$

$$\text{由勾股定理得: } EF = \sqrt{ED^2 + FD^2} = \frac{2\sqrt{85}}{5}.$$

故选: C.

题目 5 (2023·龙马潭区二模) 如图, 抛物线 $y = -x^2 - 3x + 4$ 与 x 轴交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C . 若点 D 为抛物线上一点且横坐标为 -3 , 点 E 为 y 轴上一点, 点 F 在以点 A 为圆心, 2 为半径的圆上, 则 $DE + EF$ 的最小值 $\underline{\sqrt{65} - 2}$.



【分析】先求出点 $A(-4, 0)$, 点 $D(-3, 4)$, 作点 D 关于 y 轴对称的点 T , 则点 $T(3, 4)$, 连接 AE 交与轴于 M , 交 $\odot A$ 于 N , 过点 T 作 $TH \perp x$ 轴于 H , 连接 AF , 当点 E 与点 M 重合, 点 F 与点 N 重合时, $DE + EF$ 为最小, 最小值为线段 TN 的长, 然后可在 $Rt\triangle ATH$ 中由勾股定理求出 TA , 进而可得 TN , 据此可得出答案.

【解答】解: 对于 $y = -x^2 - 3x + 4$, 当 $y = 0$ 时, $-x^2 - 3x + 4 = 0$,

解得: $x_1 = -4, x_2 = 1$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-4, 0)$,

对于 $y = -x^2 - 3x + 4$, 当 $x = -3$ 时, $y = 4$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(-3, 4)$,

作点 D 关于 y 轴对称的点 T , 则点 $T(3, 4)$,

连接 AE 交与轴于 M , 交 $\odot A$ 于 N , 过点 T 作 $TH \perp x$ 轴于 H , 连接 AF ,

当点 E 与点 M 重合, 点 F 与点 N 重合时, $DE + EF$ 为最小, 最小值为线段 TN 的长.

理由如下:

当点 E 与点 M 不重合, 点 F 与点 N 不重合时,

根据轴对称的性质可知: $DE = TE$,

$$\therefore DE + EF = TE + EF,$$

根据“两点之间线段最短”可知: $TE + EF + AF > AT$,

$$\text{即: } TE + EF + AF > TN + AN,$$

$$\therefore AF = AN = 2,$$

$$\therefore TE + EF > TN,$$

$$\text{即: } DE + EF > TN,$$

$\therefore$ 当点 E 与点 M 重合, 点 F 与点 N 重合时, $DE + EF$ 为最小.

$$\therefore \text{点 } T(3, 4), A(-4, 0),$$

$$\therefore OH = 3, TH = 4, OA = 4,$$

$$\therefore AH = OA + OH = 7,$$

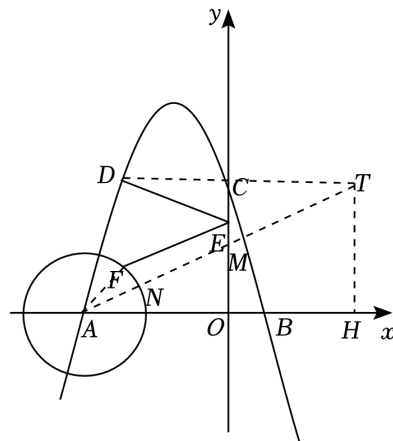
在 $Rt\triangle ATH$ 中, $AH = 7, TH = 4$,

$$\text{由勾股定理得: } TA = \sqrt{AH^2 + TH^2} = \sqrt{65},$$

$$\therefore TN = TA - AN = \sqrt{65} - 2.$$

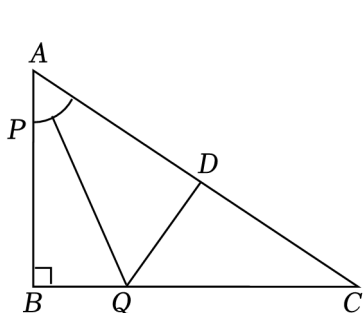
即 $DE + EF$ 为最小值为 $\sqrt{65} - 2$.

故答案为: $\sqrt{65} - 2$.

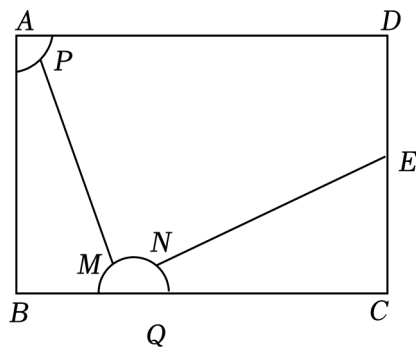


题目 6 (2024·碑林区校级一模) (1) 如图①, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 6$, $BC = 8$, 点 D 是边 AC 的中点. 以点 A 为圆心, 2 为半径在 $\triangle ABC$ 内部画弧, 若点 P 是上述弧上的动点, 点 Q 是边 BC 上的动点, 求 $PQ + QD$ 的最小值;

(2) 如图②, 矩形 $ABCD$ 是某在建的公园示意图, 其中 $AB = 200\sqrt{3}$ 米, $BC = 400$ 米. 根据实际情况, 需要在边 DC 的中点 E 处开一个东门, 同时根据设计要求, 要在以点 A 为圆心, 在公园内以 10 米为半径的圆弧上选一处点 P 开一个西北门, 还要在边 BC 上选一处点 Q , 在以 Q 为圆心, 在公园内以 10 米为半径的半圆的三等分点的 M 、 N 处开两个南门. 线段 PM 、 NE 是要修的两条道路. 为了节约成本, 希望 $PM + NE$ 最小. 试求 $PM + NE$ 最小值及此时 BQ 的长.



(图①)



(图②)

【分析】 (1) 作点 D 关于 BC 的对称点 D' , 连接 $D'Q$ 、 AP , 过点 D' 作 $D'E \perp AB$ 交 AB 的延长线于 E , 则 $QD = QD'$, $DK = D'K$, 当 A 、 P 、 Q 、 D' 在同一条直线上时, $PQ + QD = AD' - AP$ 取得最小值, 由 $DK \parallel AB$, 可得 $\triangle CDK \sim \triangle CAB$, 运用相似三角形性质可得 $DK = 3$, $CK = 4$, 再由勾股定理即可求得答案;

(2) 连接 MQ , NQ , 过点 Q 作 $QK \perp MN$ 于 K , 作点 A 关于直线 MN 的对称点 A' , 将 E 向左平移 10 米得到点 E' , 过点 E' 作 $E'L \parallel AB$, 过点 A' 作 $A'L \perp E'L$ 于 L , 连接 $A'M$ 、 $A'E'$ 、 $E'M$, 由题意得随着圆心 Q 在 BC 上运动, MN 在平行于 BC 且到 BC 距离为 $5\sqrt{3}$ 的直线上运动, 再运用勾股定理可得 $PM + NE$ 最小值 $= A'E - AP = (20\sqrt{1011} - 10)$ 米; 设 $E'L$ 与 GH 的交点为 T , 过点 Q 作 $QK \perp MN$ 于 K , 由 $E'L \parallel AA'$, 可得 $\triangle E'MT \sim \triangle A'MG$, 即可求得 BQ 的值.

【解答】解：(1) 如图①，作点 D 关于 BC 的对称点 D' ，连接 $D'Q$ 、 AP ，过点 D' 作 $D'E \perp AB$ 交 AB 的延长线于 E ，

则 $QD = QD'$ ， $DK = D'K$ ，

$\therefore PQ + QD = PQ + QD' = AQ - AP + QD'$ ，

当 A 、 P 、 Q 、 D' 在同一条直线上时， $PQ + QD = AD' - AP$ 取得最小值，

$\because \angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， $BC = 8$ ，

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ ，

$\because$ 点 D 是边 AC 的中点，

$\therefore CD = \frac{1}{2}AC = 5$ ，

$\because DK \parallel AB$ ，

$\therefore \triangle CDK \sim \triangle CAB$ ，

$\therefore \frac{DK}{AB} = \frac{CK}{BC} = \frac{CD}{AC}$ ，即 $\frac{DK}{6} = \frac{CK}{8} = \frac{5}{10}$ ，

$\therefore DK = 3$ ， $CK = 4$ ，

$\therefore D'K = 3$ ， $BK = 4$ ，

$\because \angle E = \angle EBK = \angle BKD' = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $BED'K$ 是矩形，

$\therefore D'E = BK = 4$ ， $BE = D'K = 3$ ，

$\therefore AE = AB + BE = 6 + 3 = 9$ ，

$\therefore AD' = \sqrt{AE^2 + D'E^2} = \sqrt{9^2 + 4^2} = \sqrt{97}$ ，

$\therefore AP = 2$ ，

$\therefore PQ + QD$ 的最小值 $= \sqrt{97} - 2$ ；

(2) 如图②，连接 MQ ， NQ ，过点 Q 作 $QK \perp MN$ 于 K ，作点 A 关于直线 MN 的对称点 A' ，将 E 向左平移 10 米得到点 E' ，过点 E' 作 $E'L \parallel AB$ ，过点 A' 作 $A'L \perp E'L$ 于 L ，连接 $A'M$ 、 $A'E'$ 、 $E'M$ ，

$\because M$ 、 N 是半圆 Q 的三等分点，且半径为 10，

$\therefore \triangle QMN$ 为等边三角形，且 $MN \parallel BC$ ， $MN = 10$ ，

$\because QK \perp MN$ ， $QM = 10$ 米，

$\therefore QK = 5\sqrt{3}$ 米，

$\therefore$ 随着圆心 Q 在 BC 上运动， MN 在平行于 BC 且到 BC 距离为 $5\sqrt{3}$ 的直线上运动，

$\because EE' \parallel MN$ 且 $EE' = MN = 10$ 米，

$\therefore$ 四边形 $EE'MN$ 是平行四边形，

$\therefore NE = ME'$ ，

$\therefore PM + NE = PM + ME' \geq AM - AP + ME' = AM + ME' - 10$ ，

$\because E$ 是 CD 的中点，

$\therefore DE = \frac{1}{2}CD = 100\sqrt{3}$ ，

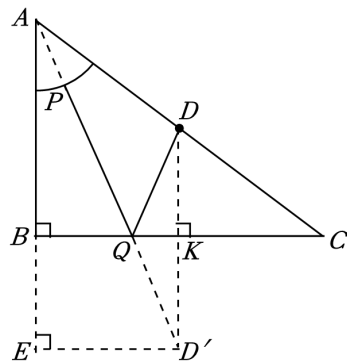
$\therefore E'L = AA' - DE = 2(AB - QK) - DE = 2 \times (200\sqrt{3} - 5\sqrt{3}) - 100\sqrt{3} = 290\sqrt{3}$ (米)，

$A'L = BC - E'E = 400 - 10 = 390$ (米)，

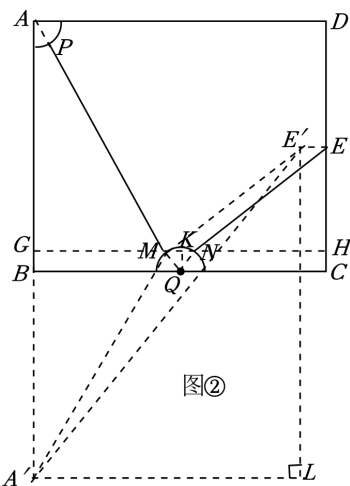
在 $Rt\triangle A'E'L$ 中， $A'E' = \sqrt{A'L^2 + E'L^2} = \sqrt{390^2 + (290\sqrt{3})^2} = 20\sqrt{1011}$ ，

$\therefore PM + NE$ 最小值 $= A'E' - AP = (20\sqrt{1011} - 10)$ 米；

此时 $\triangle MNQ$ 在如图③的 $\triangle M'N'Q$ 位置，



图①



图②

!

1

1

•

题目 7

1

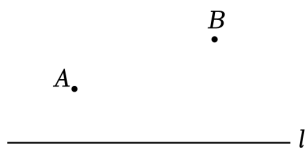
(

E

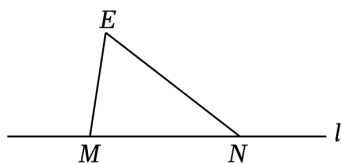
Q

士

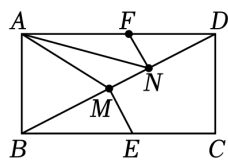
(



图①



图②



图③

【分析】(1) 作点 A 的对称点, 由两点之间线段最短解题即可;

(2) 将 M 、 N 看作定点, E 看作动点, 由 (1) 作法可解;

(3) 由相似得出 MN 为定值, 再根据 (2) 作法求出 $AM + AN$ 的最值, 即可解答.

【解答】解: (1) 如图①, 则点 P 为所求.

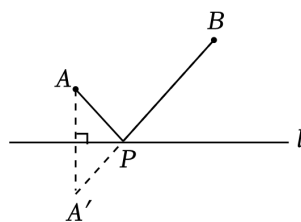
做法: 作点 A 关于 l 的对称点 A' ,

连接 $A'B$ 交 l 于点 P , 由对称得 $AP = A'P$,

$\therefore AP + BP = A'P + BP$,

$\because$ 两点之间线段最短,

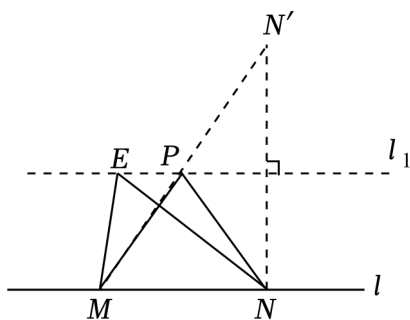
$\therefore A'P + BP$ 最短, 即 $PA + PB$ 的和最小.



图①

(2) 如图②, 过点 E 作直线 $l_1 \parallel l$, 作点 N 关于 l_1 的对称点 N' , 连接 MN' , 交 l_1 于点 P ,

则 $PM + PN$ 的值即是 $EM + EN$ 的最小值,



图②

$\because$ 点 E 到直线 l 的距离为 4,

$\therefore NN' = 8$,

$\because MN = 6$,

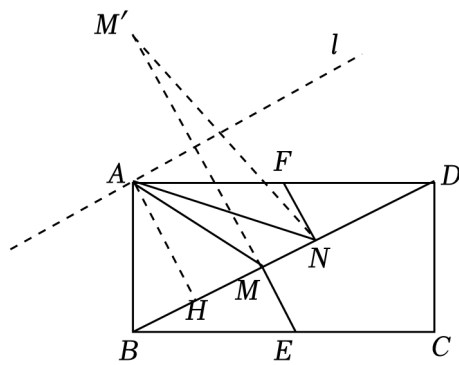
$\therefore MN' = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$,

$\therefore PM + PN = 10$, 即 $ME + NE$ 的最小值为 10.

(3) 如图③, 过 A 作 $l \parallel BD$, $AH \perp BD$ 于点 H , 作点 M 关于 l 的对称点 M' , 连接 $M'N$,

由 (2) 得 $M'N$ 为 $AM + AN$ 的最小值,

$\because AB = \sqrt{5}, AD = 2\sqrt{5},$
 $\therefore BD = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = 5,$
 $\therefore AH = \frac{\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}}{5} = 2,$
 $\therefore MM' = 4,$
 设 $ME = x,$
 由 $\triangle ABD \sim \triangle BME$ 得, $BM = 2x, BE = \sqrt{5}x,$
 $\therefore AF = \sqrt{5}x,$
 $\therefore DF = 2\sqrt{5} - \sqrt{5}x,$
 由 $\triangle DNF \sim \triangle ABD$ 得, $DN = 4 - 2x,$
 $\therefore MN = 5 - 2x - (4 - 2x) = 1,$
 $\therefore l \parallel BD, MM' \perp l,$
 $\therefore MM' \perp BD,$
 $\therefore M'N = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17},$
 $\therefore \triangle AMN$ 周长的最小值为 $\sqrt{17} + 1.$



图③

题型二：辅助圆类几何最值

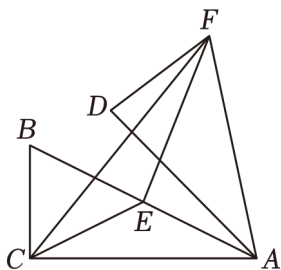


动点的运动轨迹为辅助圆的三种形式：

- 1、**定义法**——若一动点到定点的距离恒等于固定长，则该点的运动轨迹为以定点为圆心，定长为半径的圆（或圆弧）
- 2、**定边对直角**——若一条定边所对的“动角”始终为直角，则直角顶点运动轨迹是以该定边为直径的圆（或圆弧）
3. **定边对定角**——若一条定边所对的“动角”始终为定角，则该定角顶点运动轨迹是以该定角为圆周角，该定边为弦的圆（或圆弧）

【中考真题练】

题目 8 (2023·黑龙江) 如图，在 $Rt\triangle ACB$ 中， $\angle BAC = 30^\circ$ ， $CB = 2$ ，点 E 是斜边 AB 的中点，把 $Rt\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转，得 $Rt\triangle AFD$ ，点 C ，点 B 旋转后的对应点分别是点 D ，点 F ，连接 CF ， EF ， CE ，在旋转的过程中， $\triangle CEF$ 面积的最大值是 $4 + \sqrt{3}$ 。



【分析】 线段 CE 为定值，点 F 到 CE 距离最大时， $\triangle CEF$ 的面积最大，画出图形，即可求出答案。

【解答】解： $\because$ 线段 CE 为定值，

$\therefore$ 点 F 到 CE 的距离最大时， $\triangle CEF$ 的面积有最大值。

在 $Rt\triangle ACB$ 中， $\angle BAC = 30^\circ$ ， E 是 AB 的中点，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/646041050134010125>