

第三章 圆锥曲线与方程（知识归纳+题型突破）

课标要求

1. 掌握椭圆的定义及椭圆的标准方程.
2. 会用定义法、待定系数法和相关点法求椭圆的标准方程.
3. 掌握简单的椭圆的几何性质.
4. 掌握直线与椭圆的位置关系及其应用.
5. 了解双曲线的实际背景, 经历从具体情境中抽象出双曲线的过程, 双曲线标准方程的推导过程.
6. 掌握双曲线的定义、标准方程及几何图形.
7. 理解双曲线的简单几何性质(范围、对称性、顶点、渐近线、离心率).
8. 能用双曲线的简单几何性质解决问题.
9. 了解抛物线的定义及焦点、准线的概念.
10. 掌握抛物线的标准方程及其推导过程.
11. 理解抛物线的简单几何性质.

基础知识归纳

1. 椭圆的定义

平面内到两个定点 F_1, F_2 的距离之和等于常数(大于 F_1F_2) 的点的轨迹叫作椭圆, 两个定点 F_1, F_2 叫作椭圆的焦点, 两个焦点间的距离叫作椭圆的焦距.

(1) 对定义中限制条件“两个定点”的理解

椭圆定义中的两个定点 F_1, F_2 是指不重合的两点, 当 F_1 与 F_2 重合时, 相应点的集合是圆.

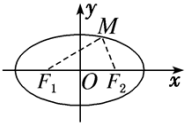
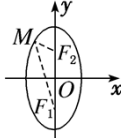
(2) 对定义中限制条件“常数(大于 F_1F_2)”的理解

条件	结论
$2a > F_1F_2$	动点的轨迹是椭圆
$2a = F_1F_2$	动点的轨迹是线段 F_1F_2
$2a < F_1F_2$	动点不存在, 因此轨迹不存在

(3) 定义的双向运用

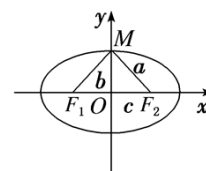
一方面, 符合定义中条件的动点的轨迹为椭圆; 另一方面, 椭圆上所有的点一定满足定义的条件(即到两焦点的距离之和为常数).

2. 椭圆的标准方程

焦点位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
标准方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$
图形		
焦点坐标	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c), F_2(0, c)$
a, b, c 的关系	$c^2 = a^2 - b^2$	

(1) 椭圆标准方程中参数 a, b 的几何意义

标准方程中的两个参数 a, b 确定了椭圆的形状和大小, 这是椭圆定形的条件, a, b, c 三个量满足 $a^2 = b^2 + c^2$, 恰好是一个直角三角形的三条边长, 我们把如图所示的直角三角形 F_2OM 称为椭圆的“特征三角形”. 椭圆的特征三角形清晰地反映了参数 a, b, c 的几何意义.



(2) 椭圆的焦点位置

椭圆的焦点在 x 轴上 $\Leftrightarrow$ 标准方程中含 x^2 项的分母较大; 椭圆的焦点在 y 轴上 $\Leftrightarrow$ 标准方程中含 y^2 项的分母较大. 因此由椭圆的标准方程判断椭圆的焦点位置时, 要根据方程中分母的大小来判断, 简记为“焦点位置看大小, 焦点随着大的跑”.

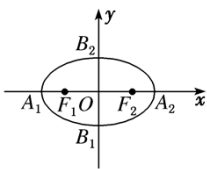
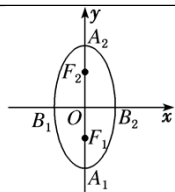
3. 与椭圆焦点三角形有关的常用公式

(1) 焦点三角形的周长 $L = 2a + 2c$.

(2) 在焦点三角形 MF_1F_2 中, 由余弦定理可得 $F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1 \cdot MF_2 \cos \angle F_1MF_2$.

(3) 设椭圆上任一点 $M(x_M, y_M)$, 焦点三角形的面积 $S_{\Delta F_1MF_2} = c|y_M| = \frac{1}{2}MF_1 \cdot MF_2 \cdot \sin \angle F_1MF_2 = b^2 \tan \frac{\angle F_1MF_2}{2}$.

4. 椭圆的范围、对称性、顶点

焦点的位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
图形		
标准方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$
范围	$-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$	$-b \leq x \leq b, -a \leq y \leq a$
顶点	$A_1(-a, 0), A_2(a, 0), B_1(0, -b), B_2(0, b)$	$A_1(0, -a), A_2(0, a), B_1(-b, 0), B_2(b, 0)$

轴长	短轴长= $2b$, 长轴长= $2a$	
焦点	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
焦距	$ F_1F_2 =2c$	
对称性	对称轴: x 轴、 y 轴 对称中心: 原点	

(1)椭圆的范围实质是椭圆上点的横坐标、纵坐标的取值范围. 由于椭圆方程中两个非负数的和等 1, 所以椭圆上任一点的坐标适合不等式 $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$, 即 $-a \leq x \leq a$, 同理有 $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$, 即 $-b \leq y \leq b$, 这说明椭圆位于直线 $x=\pm a$ 和 $y=\pm b$ 所围成的矩形框里.

(2)椭圆的一个焦点、中心和短轴的一个端点构成一个直角三角形, 其三边长满足关系式: $a^2=b^2+c^2$.

5. 椭圆的离心率

椭圆的焦距与长轴长的比 $\frac{c}{a}$ 称为椭圆的离心率. 用 e 表示, 即 $e = \frac{c}{a}$.

(1)椭圆离心率 e 的取值范围是 $(0, 1)$, 椭圆的离心率刻画了椭圆的“扁平程度”, 离心率 e 越大, 椭圆越扁平, 离心率 e 越小, 椭圆越接近于圆. 当且仅当 $a=b$, $c=0$ 时, 两个焦点重合, 椭圆就变为圆, 它的方程为 $x^2+y^2=a^2$.

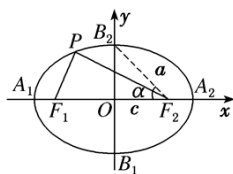
(2)椭圆离心率是焦距与长轴长的比, 也可以形象的理解为在椭圆的长轴长不变的前提下, 两个焦点离开中心的程度. 由椭圆的定义, 椭圆的离心率 e 一般有以下几种表达方式:

$$\textcircled{1} e = \frac{c}{a} = \cos \alpha;$$

$$\textcircled{2} e = \frac{2c}{2a} = \frac{F_1F_2}{A_1A_2};$$

$$\textcircled{3} e = \frac{2c}{2a} = \frac{F_1F_2}{PF_1+PF_2};$$

$$\textcircled{4} e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \text{ (如图)}.$$



6. 直线与椭圆的位置关系及判定

一般, 联立直线 $y=kx+m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>b>0)$ 的方程, 得 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases}$ 消去 y , 得一个一元二次方程.

位置关系	解的个数	Δ 的取值
相交	<u>2</u>	$\Delta > 0$
相切	<u>1</u>	$\Delta = 0$

相离	<u> 0 </u>	$\Delta < 0$
----	--------------	--------------

7. 点与椭圆的位置关系

点 $P(x_0, y_0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的位置关系:

(1) 点 P 在椭圆上 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$;

(2) 点 P 在椭圆内部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < 1$;

(3) 点 P 在椭圆外部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} > 1$.

8. 弦长公式

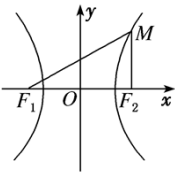
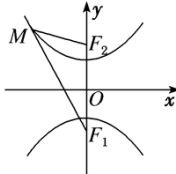
设直线 $y = kx + b (k \neq 0)$ 与椭圆的交点坐标分别为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $AB = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} |y_1 - y_2|$.

9. 双曲线的定义

平面内到两个定点 F_1, F_2 的距离之差的绝对值等于常数(小于 F_1F_2 的正数)的点的轨迹叫作双曲线, 两个定点 F_1, F_2 叫作双曲线的焦点, 两个焦点间的距离叫作双曲线的焦距.

符号语言: $|PF_1 - PF_2| = \text{常数}$ (常数小于 F_1F_2).

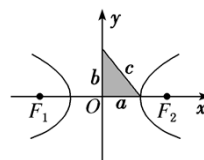
10. 双曲线的标准方程

	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
标准方程	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$
图形		
焦点坐标	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c), F_2(0, c)$
a, b, c 的关系	$c^2 = a^2 + b^2$	

(1) 标准方程中的两个参数 a 和 b 确定了双曲线的形状和大小, 是双曲线的定形条件.

(2) 焦点 F_1, F_2 的位置是双曲线的定位条件, 它决定了双曲线标准方程的类型. “焦点跟着正项走”, 即若 x^2 的系数为正, 则焦点在 x 轴上; 若 y^2 的系数为正, 则焦点在 y 轴上.

(3) 在双曲线的标准方程中, 因为 a, b, c 三个量满足 $c^2 = a^2 + b^2$. 所以长度分别为 a, b, c 的三条线段恰好构成一个直角三角形, 且长度为 c 的线段是斜边, 如图所示.



11. 直线与双曲线的位置关系

直线与双曲线的位置关系的判断

一般地, 设直线方程为 $y=kx+m(m \neq 0)$, 双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$, 将 $y=kx+m$ 代入 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 消去 y 并化简, 得 $(b^2-a^2k^2)x^2-2a^2mkx-a^2m^2-a^2b^2=0$.

①当 $b^2-a^2k^2=0$, 即 $k=\pm\frac{b}{a}$ 时, 直线与渐近线平行, 则直线与双曲线只有一个公共点.

②当 $b^2-a^2k^2 \neq 0$, 即 $k \neq \pm\frac{b}{a}$ 时, 判别式 $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 直线与双曲线相交, 有两个公共点; 判别式 $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 直线与双曲线相切, 有且只有一个公共点; 判别式 $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 直线与双曲线相离, 没有公共点.

(1)双曲线的通径

过焦点且与焦点所在的轴垂直的直线被双曲线截得的线段叫做双曲线的通径. 对于双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$, 将 $x=c$ 代入双曲线的方程可得 $\frac{y^2}{b^2}=\frac{c^2}{a^2}-1=\frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}$, 所以直线 $x=c$ 与双曲线的两个交点为 $A\left(c, \frac{b^2}{a}\right), B\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$, 计算得通径长 $AB=\frac{2b^2}{a}$. 同理, 可求得双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的通径长也是 $\frac{2b^2}{a}$.

(2)双曲线的焦点弦的最小值

若焦点弦与双曲线的交点在同一支上, 则最短弦长是通径长 $\frac{2b^2}{a}$; 若焦点弦与双曲线的交点在两支上, 则最短弦长是 $2a$.

12. 双曲线的范围、对称性和顶点

标准方程		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$
性质	范围	$x \leq -a$ 或 $x \geq a, y \in \mathbb{R}$	$y \leq -a$ 或 $y \geq a, x \in \mathbb{R}$
	对称性	对称轴: x 轴、 y 轴; 对称中心: 坐标原点	
	顶点坐标	$A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$	$A_1(0, -a), A_2(0, a)$
	轴	实轴: 线段 A_1A_2 , 长: $2a$; 虚轴: 线段 B_1B_2 , 长: $2b$; 半实轴长: a ; 半虚轴长: b	

13. 双曲线的渐近线

(1)渐近线

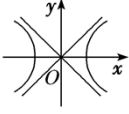
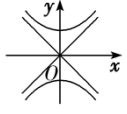
一般地，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的两支向外延伸时，与两条直线 $\frac{x}{a}=\pm\frac{y}{b}$ 逐渐接近，我们把这两

条直线叫作双曲线的渐近线. 双曲线与它的渐近线无限接近，但永远不相交.

(2)等轴双曲线

实轴和虚轴等长的双曲线叫做等轴双曲线，其离心率 $e=\sqrt{2}$.

14. 双曲线的标准方程与渐近线方程

双曲线的标准方程	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$
图形		
渐近线	直线 $y=\pm\frac{b}{a}x$	直线 $y=\pm\frac{a}{b}x$
双曲线与渐近线的关系	双曲线在渐近线的左、右两个区域，与渐近线无限靠近但不相交	双曲线在渐近线的上、下两个区域，与渐近线无限靠近但不相交

15. 等轴双曲线的性质

- (1)方程形式为 $x^2-y^2=\lambda(\lambda\neq 0)$;
- (2)渐近线方程为 $y=\pm x$ ，它们互相垂直，并且平分双曲线实轴和虚轴所成的角;
- (3)实轴长和虚轴长相等，离心率 $e=\sqrt{2}$.

16. 双曲线与椭圆的六个不同点

	双曲线	椭圆
曲线	两支曲线	封闭的曲线
顶点	两个顶点	四个顶点
轴	实、虚轴	长、短轴
渐近线	有渐近线	无渐近线
离心率	$e>1$	$0<e<1$
a, b, c 关系	$a^2+b^2=c^2$	$a^2-b^2=c^2$

17. 双曲线的离心率

定义	双曲线的 <u>焦距</u> 与 <u>实轴长</u> 的比 $\frac{c}{a}$ ，叫做双曲线的离心率
范围	$[1, +\infty)$

双曲线形状与 e 的关系

由等式 $c^2 = a^2 + b^2$, 得 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} = \sqrt{e^2 - 1}$.

因此 e 越大, $\frac{b}{a}$ 也越大, 即渐近线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 的斜率的绝对值越大, 这时双曲线的开口就越大, 因此离心率

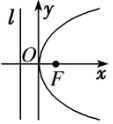
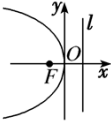
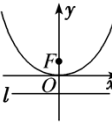
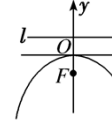
e 可以用来表示双曲线开口的程度.

18. 抛物线的定义

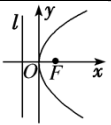
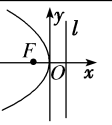
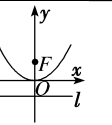
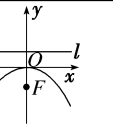
平面内到一个定点 F 和一条定直线 l (F 不在 l 上) 的距离相等的点的轨迹叫作抛物线, 定点 F 叫作抛物线的焦点, 定直线 l 叫作抛物线的准线.

19. 抛物线的标准方程

抛物线的标准方程有以下四种不同的形式

标准方程	$y^2 = 2px (p > 0)$	$y^2 = -2px (p > 0)$	$x^2 = 2py (p > 0)$	$x^2 = -2py (p > 0)$
图形				
焦点坐标	$\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	$\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$	$\left(0, \frac{p}{2}\right)$	$\left(0, -\frac{p}{2}\right)$
准线方程	$x = -\frac{p}{2}$	$x = \frac{p}{2}$	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
p 的几何意义	焦点到准线的距离			

20. 抛物线的简单几何性质

图形					
标准方程	$y^2=2px(p>0)$	$y^2=-2px(p>0)$	$x^2=2py(p>0)$	$x^2=-2py(p>0)$	
性质	顶点	$O(0,0)$			
	对称轴	$y=0$		$x=0$	
	焦点	$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$	$F\left(0, \frac{p}{2}\right)$	$F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$
	离心率	$e=1$			
	范围	$x\geq 0, y\in\mathbf{R}$	$x\leq 0, y\in\mathbf{R}$	$y\geq 0, x\in\mathbf{R}$	$y\leq 0, x\in\mathbf{R}$
	开口方向	向右	向左	向上	向下

21. 直线与抛物线的位置关系

直线与抛物线有三种位置关系：相离、相切、相交。

22. 直线与抛物线位置关系的判断方法

(1) 直线的斜率存在时，设直线 $y=kx+m$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 相交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点，将 $y=kx+m$ 代入 $y^2=2px$ ，消去 y 并化简，得 $k^2x^2+2(mk-p)x+m^2=0$ 。

① 当 $k=0$ 时，直线平行于抛物线的对称轴或与对称轴重合，直线与抛物线只有一个公共点。

② 当 $k\neq 0$ 时，判别式 $\Delta>0\iff$ 直线与抛物线相交，有两个公共点；

判别式 $\Delta=0\iff$ 直线与抛物线相切，有且只有一个公共点；

判别式 $\Delta<0\iff$ 直线与抛物线相离，没有公共点。

(2) 直线的斜率不存在时，设直线 $l: x=m$ ，抛物线： $y^2=2px(p>0)$ 。

显然，当 $m<0$ 时，直线与抛物线相离，无交点；

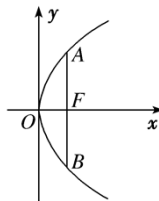
当 $m=0$ 时，直线与抛物线相切，有一个交点；

当 $m>0$ 时，直线与抛物线相交，有两个交点。

23. 抛物线的通径

(1) 定义：通过抛物线的焦点作垂直于对称轴的直线，交抛物线于 A, B 两点，线段 AB 被称为抛物线的通径，如图所示。

对于抛物线 $y^2=2px(p>0)$ ，由 $A(\frac{p}{2}, p)$, $B(\frac{p}{2}, -p)$ ，得 $AB=2p$ ，故抛物线的通径长为 $2p$ 。



(2) 通径是所有焦点弦中最短的弦。

(3) 通径在反映抛物线开口大小上的作用：

抛物线的通径 AB (如图所示) 的长度为 $2p$ ，这是常数 $2p$ 的又一几何意义，所以 p 越大，通径越长，即抛物线的开口越大；反之， p 越小，通径越短，即抛物线的开口越小。

重要题型

题型一 求椭圆的标准方程

【例 1】 求适合下列条件的椭圆的标准方程。

(1) 焦点在 y 轴上，经过两个点 $(0,2)$ 和 $(1,0)$ ；

(2) 椭圆的两个焦点的坐标分别是 $(0, -2)$, $(0,2)$ ，并且椭圆经过点 $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ ；

(3) 经过点 $P(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $Q(0, -\frac{1}{2})$ 。

思维升华

1. 待定系数法求标准方程的步骤

- (1)先确定焦点位置;
- (2)设出方程;
- (3)寻求 a, b, c 的等量关系;
- (4)求 a, b 的值, 代入所设方程.

2. 易错提醒

当焦点位置不确定时, 可设椭圆方程为 $mx^2+ny^2=1(m \neq n, m>0, n>0)$. 因为它包括焦点在 x 轴上($m < n$)或焦点在 y 轴上($m > n$)两类情况, 所以可以避免分类讨论, 从而简化了运算.

巩固训练

1. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 与 y 轴正半轴的交点为 B , 若 $BF_2 = F_1F_2 = 2$, 则该椭圆的方程为()

- A. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$
C. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ D. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

2. 过点 $(-3, 2)$ 且与椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 有相同焦点的椭圆 E 的方程是()

- A. $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{10} = 1$ B. $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{100} = 1$
C. $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{15} = 1$ D. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{225} = 1$

题型二 椭圆的定义及其应用

【例 2】(1) 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 B, C 在椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 上, 顶点 A 是椭圆的一个焦点, 且椭圆的另一个焦点在 BC 边上, 则 $\triangle ABC$ 的周长是()

- A. $2\sqrt{3}$ B. 6 C. $4\sqrt{3}$ D. 12

(2) 设 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两个焦点, P 是椭圆上的点, 且 $PF_1 : PF_2 = 2 : 1$, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积等于()

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 1

思维升华

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/646124034055010233>