

比大小归类

题型盘点·直击高考

目录

题型一：基础函数：指数函数性质	1
题型二：基础函数：对数函数性质	4
题型三：幂指对函数性质	7
题型四：借助 0、1 分界	12
题型五：指数型同构法	14
题型六：借助常数分界	16
题型七：放缩型	18
题型八：构造型 1：对数幂型	19
题型九：构造型 2：指数幂型	22
题型十：构造型 3：指数线性构造	25
题型十一：构造型 4：对数线性构造	27
题型十二：构造型 5：三角函数线性构造	29
题型十三：构造型 6：综合构造	31
题型十四：三角函数型构造比大小	35
题型十五：幂指对与三角函数混合型	37
题型十六：泰勒展开	40
题型十七：麦克劳林展开	43

题型突围·精准提分

题型一：基础函数：指数函数性质

指 | 点 | 迷 | 津

指数函数比大小易错点：

1. 利用指数函数的单调性时要根据底数与 1 的大小区别对待。
2. 指数函数在第一象限图像，具有“底大图高”的性质
3. 指数函数图像性质：一点一线。恒过定点 $(0, 1)$ ， x 轴是它的水平渐近线
4. 进行指数幂的大小比较时，若底数不同，则首先考虑将其转化成同底数，然后再根据指数函数的单调性进行判断。对于不同底而同指数的指数幂的大小的比较，利用图象法求解，既快捷，又准确。

1. (23-24 高三·湖南衡阳·阶段练习) 设 $a = \left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$, $b = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$, $c = \ln 1.6$, 则 ()

A. $c < a < b$

B. $b < a < c$

C. $c < a < b$

D. $c < b < a$

【答案】D

【分析】首先比较 $\left[\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^4$ 与 $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^4$ 的大小，即可得到 $a > b$ ，再比较 $(e^{0.6})^5$ 与 1.6^5 的大小，即可得到

$\ln 1.6 < 0.6$ ，从而得到 $b > c$ ，即可判断。

【详解】因为 $\left[\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^4 = \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{16}{49} = \frac{2000}{6125}$ ， $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^4 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125} = \frac{1323}{6125}$ ，所以 $\left[\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^4 > \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^4$ ，则

$\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$ ，即 $a > b$ ，因为 $(e^{0.6})^5 = \left(e^{\frac{3}{5}}\right)^5 = e^3 > 2.5^3 = 15.625$ ， $1.6^5 = \left(\frac{8}{5}\right)^5 = \frac{32768}{3125} < 11$ ，

所以 $(e^{0.6})^5 > 1.6^5$ ，所以 $e^{0.6} > 1.6$ ，则 $\ln e^{0.6} > \ln 1.6$ ，即 $\ln 1.6 < 0.6$ ，又 $b = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{4}} > \left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{3}{5}$ ，所以 $b > c$ ，

所以 $a > b > c$ 。故选：D

2. (23-24 高三·云南昆明·模拟) 已知 $a = 0.33^\pi$ ， $b = \left(\frac{1}{e}\right)^e$ (e 为自然对数的底数) $c = \tan 1$ ，比较 a ， b ， c

的大小 ()

A. $a > b > c$

B. $b > a > c$

C. $c > a > b$

D. $c > b > a$

【答案】D

【分析】由常见的不等式可比较 c 和 1 的大小；利用幂函数和指数函数的单调性及中间量 1 可比较 a ， b 和 1 的大小，进而得出答案。

【详解】由三角函数线可得：不等式 $\tan x > x > \sin x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，则 $c = \tan 1 > 1$ ，

又函数 $y = x^e$ 为增函数， $y = 0.33^x$ 为减函数，则 $1 > \left(\frac{1}{e}\right)^e > \left(\frac{1}{3}\right)^e > 0.33^e > 0.33^\pi > 0$ ，

所以 $1 > b > a$ ，综上所述： $c > b > a$ ，故选 D。

【点睛】关键点点睛：本题考查比较函数值的大小，解题关键在于利用三角函数线得到不等式

$\tan x > x > \sin x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，进而比较 c 和 1 的大小；再利用幂函数和指数函数的单调性及中间量 1，比较 a ， b 和 1 的大小。

3. (23-24 高三·宁夏银川·阶段练习) 已知函数 $f(x) = |3^x - 1|$ ， $a < b < c$ ，且 $f(a) > f(c) > f(b)$ ，则 ()

A. $a < 0$ ， $b < 0$ ， $c < 0$

B. $a < 0$ ， $b \geq 0$ ， $c > 0$

C. $3^{-a} < 3^c$

D. $3^a + 3^c < 2$

【答案】D

【分析】画出 $f(x)$ 的图象，根据 a, b, c 以及 $f(a), f(c), f(b)$ 的大小关系确定正确答案。

【详解】令 $f(x) = |3^x - 1| = 1$ ，解得 $x = \log_3 2$ ，

画出 $f(x) = |3^x - 1|$ 的图象如下图所示，

由于 $a < b < c$ ，且 $f(a) > f(c) > f(b)$ ，

由图可知： $a < 0$ ， $0 < c < \log_3 2$ ， b 的值可正可负也可为 0，所以 AB 选项错误.

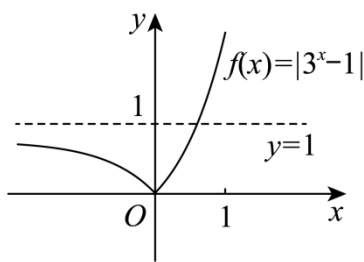
当 $a = -2, b = 0, c = \frac{1}{2}$ 时， $f(-2) = \left| \frac{1}{9} - 1 \right| = \frac{8}{9}$ ， $f(0) = 0$ ， $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - 1$ ，

满足 $f(a) > f(c) > f(b)$ ， $3^{-a} = 3^2 = 9 > 3^{\frac{1}{2}}$ ，所以 C 选项错误.

$f(a) = |3^a - 1| = 1 - 3^a$ ， $f(c) = |3^c - 1| = 3^c - 1$ ，

$f(a) > f(c)$ ， $1 - 3^a > 3^c - 1$ ，所以 $3^a + 3^c < 2$ ，D 选项正确.

故选：D



4. (2023·贵州毕节·模拟预测) 已知实数 x, y 满足 $3^x + 4^x = 5^y$ ，且 $x = \log_2 3 + \log_7 4$ ，则 ()

- A. $|x - y| > |x - 2|$ B. $|x - y| > |y - 3|$ C. $|x - 2| < |2 - y|$ D. $|x - 3| < |3 - y|$

【答案】D

【分析】利用对数函数、指数函数的单调性比较大小可得 $2 < y < x < 3$ ，再结合选项逐项判断可得答案.

【详解】因为 $\log_7 4 > \log_8 4$ ，则 $x = \log_2 3 + \log_7 4 > \log_2 3 + \log_8 4 = \log_2 3 + \log_2 \sqrt[3]{4} = \log_2 \sqrt[3]{108} > \log_2 \sqrt[3]{2^6} = 2$ ，

$x = \log_2 3 + \log_7 4 < \log_2 4 + \log_7 4 < 3$ ，

因为 $5^y = 3^x + 4^x > 3^2 + 4^2 = 5^2$ ，所以 $y > 2$ ，

令 $f(x) = 3^x + 4^x - 5^x$ ($x > 2$)，则 $f'(x) = 3^x + 4^x - 5^x = 3^2 \cdot 3^{x-2} + 4^2 \cdot 4^{x-2} - 5^2 \cdot 5^{x-2} < 3^2 \cdot 4^{x-2} + 4^2 \cdot 4^{x-2} - 5^2 \cdot 5^{x-2}$

$< 25(4^{x-2} - 5^{x-2}) < 0$ ，所以 $3^x + 4^x < 5^x$ ，又因为 $3^x + 4^x = 5^y$ ，所以 $5^y < 5^x$ ，可得 $y < x$ ，

所以 $2 < y < x < 3$ ，

对于 A，因为 $2 < y < x < 3$ ，所以 $x - y > 0, x - 2 > 0$ ，由 $y > 2$ 得 $-y < -2$ ，

所以 $x - y < x - 2$ ，可得 $|x - y| < |x - 2|$ ，故 A 错误；

对于 B，即证 $|x - y| > |3 - y|$ ，因为 $2 < y < x < 3$ ，所以 $x - y > 0, 3 - y > 0$ ，由 $x < 3$ 得 $x - y < 3 - y$ ，所以

$|x - y| < |3 - y|$ ，故 B 错误；

对于 C，即证 $|x - 2| < |y - 2|$ ，因为 $2 < y < x < 3$ ，所以 $x - 2 > 0, y - 2 > 0$ ，由 $x > y$ 得 $x - 2 > y - 2$ ，所以

$|x - 2| > |y - 2|$ ，故 C 错误；

对于 D, $|3-x| < |3-y|$, 因为 $2 < y < x < 3$, 所以 $3-x > 0, y-3 > 0$, 由 $x > y$ 得 $-x < -y$, 所以 $3-x < 3-y$, 即 $|3-x| < |3-y|$, 故 D 正确.

故选: D.

【点睛】关键点点睛: 本题的关键点是利用对数函数、指数函数的单调性得出 $2 < y < x < 3$, 考查了学生运算求解能力.

5. (22-23 高三·山东威海·模拟) 已知函数 $f(x) = 3^{|x|}$, 若 $a = f(\log_5 2)$, $b = f(\lg \frac{1}{4})$, $c = f(\log_{25} 10)$, 则

()

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $b < c < a$

D. $b < a < c$

【答案】A

【分析】根据对数函数的单调性和中间量比较出 $0 < \log_5 2 < \lg 4 < \log_{25} 10$, 再由函数 $f(x) = 3^{|x|}$ 的单调性得出结论.

【详解】 $0 = \log_5 1 < \log_5 2 = \log_5 \sqrt{4} < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$, 由于 $|\lg \frac{1}{4}| = |-\lg 4| = \lg 4$, $\lg 4 = \lg \sqrt{16} > \lg \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, $\lg 4 = \lg \sqrt[3]{64} < \lg \sqrt[3]{100} = \frac{2}{3}$, 所以 $\frac{1}{2} < \lg 4 < \frac{2}{3}$, $\log_{25} 10 = \log_{25} \sqrt[3]{1000} > \log_{25} \sqrt[3]{625} = \frac{2}{3}$, 所以 $0 < \log_5 2 < \lg 4 < \log_{25} 10$, 因为函数 $f(x) = 3^{|x|}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 则 $f(\log_5 2) < f(\lg 4) < \log_{25} 10$, 所以 $f(\log_5 2) < f(\lg \frac{1}{4}) < \log_{25} 10$.

故选: A

题型二: 基础函数: 对数函数性质

指 | 点 | 迷 | 津

对数函数比大小, 主要时通过对数计算公式转化为结果相同, 利用单调性比大小

对数运算公式

1. 对数的运算法则:

$$\textcircled{1} \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$\textcircled{2} \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N;$$

$$\textcircled{3} \log_a M^n = n \log_a M (n \in \mathbb{R});$$

$$\textcircled{4} \log_a M^n = \frac{n}{m} \log_a M.$$

2. 对数的性质: $\textcircled{1} a^{\log_a N} = N$;

$$\textcircled{2} \log_a a^N = N (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1).$$

3. 对数的重要公式

$$\textcircled{1} \text{换底公式: } \log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b};$$

$$\textcircled{2} \text{换底推广: } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d = \log_a d.$$

1. (22-23 高三下·河南·阶段练习) 已知 $a = \lg 8$, $b = \log_3 2$, $c = \log_{12} 10$, $d = 3^{0.01}$, 则()

A. $c < b < a < d$

B. $d < a < c < b$

C. $a < b < c < d$

D. $b < a < c < d$

【答案】D

【分析】首先判断 a, b, c 范围均为 $(0, 1)$, $d > 1$, 则 d 最大; 用作商法可判断 a, b 大小; 用作商法并结合基本不等式可判断 a, c 大小; 从而可得四个数的大小关系.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/646134021154010224>