

高一数学 函数的奇偶性专项突破

一、教学目标：

结合函数的单调性和奇偶性，掌握类似判断函数值大小等各类综合运用问题。

二、重点和难点：

- 1.函数奇偶性的概念；
- 2.奇函数的三个性质；



知识点集训

1. 函数奇偶性的概念；

(1) 奇函数:如果对于函数 $y = f(x)$ 在定义域内的任意一个 x ，都有 $f(-x) = -f(x)$ ，那么这个函数叫奇函数；

(2) 偶函数:如果对于函数 $y = f(x)$ 在定义域内的任意一个 x ，都有 $f(-x) = f(x)$ ，那么这个函数叫偶函数；

备注：函数定义域是否关于原点对称，是判断一个函数奇偶性的前提条件，若函数定义域关于原点不对称，则函数一定不是奇函数，也一定不是偶函数，

2.周期函数的介绍,求函数周期;若 T 为非零常数,对于定义域内的任一 x ,使 $f(x) = f(x+T)$ 恒成立,则 $f(x)$ 叫做周期函数, T 叫做这个函数的一个周期.

3. 奇函数的三个性质:

- (1) 经过原点；
- (2) 函数的图像关于原点对称；

学必求其心得，业必贵于专精

(3) 函数在其对称区间内有相同的增减性。

4. 偶函数的两个性质：

(1) 函数的图像关于 y 轴对称；

(2) 函数在其对称区间内具有相反的增减性.)



典例精讲

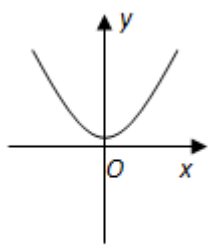
1、下列函数中，既不是奇函数，也不是偶函数的是()

A. $y = \sqrt{1+x^2}$ B. $y = x + \frac{1}{x}$ C. $y = 2^x + \frac{1}{2^x}$ D. $y = x + e^x$

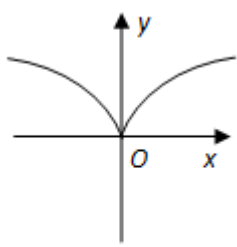
【答案】D

2、已知函数 $f(x)$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 有 $f(x) + f(-x) = 0$ ，且当 $x > 0$ 时，

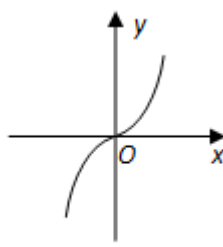
$f(x) = \ln(x+1)$ ，则函数 $f(x)$ 的大致图象为



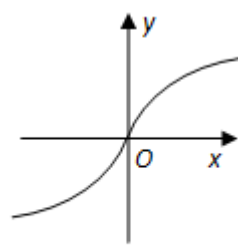
A 图



B 图



C 图



D 图

A. A 图 B. B 图 C. C 图 D. D 图

【答案】D

【解析】

因为函数 $f(x)$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 有 $f(x) + f(-x) = 0$ ，所以函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，图象关于原点对称，排除 A、B，将 $y = \ln x$ 的图象向左平移 1 个单位长度，即可得到 $f(x) = \ln(x+1)$ 的图象，由对数函数的图象性质排除 C，故选 D.

学必求其心得，业必贵于专精

3、判断函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$ 的奇偶性.

【答案】 $f(x)$ 为奇函数

【解析】

分析得， $f(x)$ 的定义域关于原点对称

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1} = \frac{(\sqrt{x^2+1}+x-1)[\sqrt{x^2+1}-(x+1)]}{(\sqrt{x^2+1}+x+1)[\sqrt{x^2+1}-(x+1)]} = \frac{2-2\sqrt{x^2+1}}{-2x} = \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{-x}$$

又 $\because f(-x) = \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{2x}$, $\therefore f(x) = -f(-x)$, 即 $f(x)$ 为奇函数

4、下列函数为奇函数的是 ()

A。 $y = \sqrt{x}$ B。 $y = |\sin x|$ C。 $y = \cos x$ D。 $y = e^x - e^{-x}$

【答案】 D

5、(2012 年东城二模理) 已知函数 $f(x) = \frac{|x| - \sin x + 1}{|x| + 1}$ ($x \in \mathbf{R}$) 的最大值为 M ,

最小值为 m , 则 $M+m$ 的值为_____.

【答案】 2

【解析】

对 $f(x)$ 变形, 利用奇函数图象关于原点对称的特殊性解题.

因为 $f(x) = 1 - \frac{\sin x}{|x|+1}$, 其中 $u = \frac{\sin x}{|x|+1}$ 是奇函数, 所以 $M = 1 + u_{\max}$, $m = 1 - u_{\max}$, 故 $M+m=2$.

6、已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时,

$$f(x) = \frac{1}{2}(|x-a^2| + |x-2a^2| - 3a^2), \text{ 若 } \forall x \in \mathbf{R}, f(x-1) \leq f(x),$$

则实数 a 的取值范围为 ()

学必求其心得，业必贵于专精

A. $[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}]$

B. $[-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}]$

C. $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

D. $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$

【答案】 B

【解析】

$$\text{依题意, 当 } x \geq 0 \text{ 时, } f(x) = \begin{cases} x - 3a^2, & x > 2a^2 \\ -a^2, & a^2 < x \leq 2a^2 \\ -x, & 0 \leq x \leq a^2 \end{cases}$$

作图可知, $f(x)$ 的最小值为 $-a^2$, 因为函数 $f(x)$ 为奇函数,

所以当 $x < 0$ 时 $f(x)$ 的最大值为 a^2 , 因为对任意实数 x 都有, $f(x-1) \leq f(x)$,

所以, $4a^2 - (-2a^2) \leq 1$, 解得 $-\frac{\sqrt{6}}{6} \leq a \leq \frac{\sqrt{6}}{6}$,

故实数 a 的取值范围是 $[-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}]$.

7、已知函数 $f(x) = 2^x (x \in \mathbb{R})$, 且 $f(x) = g(x) + h(x)$, 其中 $g(x)$ 为奇函数, $h(x)$ 为偶函数. 若不等式 $2a \cdot g(x) + h(2x) \geq 0$ 对任意 $x \in [1, 2]$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是

_____.

【答案】 $a \geq -\frac{17}{12}$

【解析】

$$2a \geq -\frac{2^{2x} + 2^{-2x}}{2^x - 2^{-x}} (x \in [1, 2]) = -\frac{(2^x - 2^{-x})^2 + 2}{2^x - 2^{-x}}, \text{ 故 } a \geq -\frac{17}{12}$$

8、已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + 1}{bx + c} (a, b, c \in \mathbb{Z})$ 是奇函数, 且 $f(1) = 2$, $f(2) < 3$, 求 a, b, c 的值.

【答案】 $a = 1, b = 1, c = 0$

【解析】

首先由奇函数定义求 c , 然后利用 $f(1) = 2$, $f(2) < 3$ 求 a, b

学必求其心得，业必贵于专精

的取值范围，最后通过 $a, b, c \in Z$ 求 $a, b,$

c 的值. 由 $f(-x) = -f(x)$, 得 $-bx + c = -(bx + c)$, $\therefore c = 0$. 由 $f(1) = 2$, 得 $a + 1 = 2b$ ①, 由 $f(2) < 3$, 得

$\frac{4a+1}{2b} < 3$ ②, 由 ①② 得 $\frac{4a+1}{a+1} < 3$ ③, 解得 $-1 < a < 2$. 又 $a \in Z$, $\therefore a = 0$ 或 $a = 1$. 若 $a = 0$, 则 $b = \frac{1}{2}$, 与 $b \in Z$ 矛盾, 若 $a = 1$, 则 $b = 1$, 故 $a = 1, b = 1, c = 0$.

9、已知 $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是奇函数, 且 $f(x) + g(x) = (x^2 + 1)(x + 1)$, 求 $f(x), g(x)$.

【答案】 $f(x) = x^2 + 1, g(x) = x(x^2 + 1)$

【解析】

Q $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是奇函数,

$$\therefore f(-x) = f(x), g(-x) = -g(x).$$

在已知条件中, 将 x 全部换成 $-x$,

$$\text{得 } f(-x) + g(-x) = (x^2 + 1)(-x + 1),$$

$$\text{即 } f(x) - g(x) = (x^2 + 1)(-x + 1).$$

$$\text{由 } \begin{cases} f(x) + g(x) = (x^2 + 1)(x + 1) \\ f(x) - g(x) = (x^2 + 1)(-x + 1) \end{cases},$$

$$\text{得 } f(x) = x^2 + 1, g(x) = x(x^2 + 1)$$

10、设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域都为 R , 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 则下列结论正确的是 ()

A. $f(x)g(x)$ 是偶函数

B. $|f(x)|g(x)$ 是奇函数

C. $f(x)|g(x)|$ 是奇函数

D. $|f(x)g(x)|$ 是奇函数

【答案】 C

【解析】

学必求其心得，业必贵于专精

学必求其心得，业必贵于专精

设 $F(x) = f(x)|g(x)|$ ，则 $F(-x) = f(-x)|g(-x)|$ ， $\because f(x)$ 是奇函数，

$g(x)$ 是偶函数， $\therefore F(-x) = -f(x)|g(x)| = -F(x)$ ， $F(x)$ 为奇函数，选 C.

11、定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足： $f(x+1) = -f(x)$ ，且在 $[-1, 0]$ 上是增加的，

下列关于 $f(x)$ 的判断：

- ① $f(x)$ 是周期函数；
- ② $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称；
- ③ $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是增加的；
- ④ $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是减少的；
- ⑤ $f(4) = f(0)$.

其中判断正确的序号是_____

【答案】 ①②⑤

【解析】

$$f(x+1) = -f(x) \Rightarrow f(x+2) = f(x),$$

故 $f(x)$ 是周期函数.

又 $f(x) = f(-x)$, 所以 $f(x+2) = f(-x)$ ，故 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称.

同理， $f(x+4) = f(x) = f(-x)$ ，

$\therefore f(x)$ 关于直线 $x=2$ 对称.

由此可得①②⑤正确.

12、函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 有相同的定义域，对定义域中任何 x ，有

$f(x) + f(-x) = 0$ ， $g(x)g(-x) = 1$ ，则 $F(x) = \frac{2f(x)}{g(x)-1} + f(x)$ 是 ()

学必求其心得，业必贵于专精

- A. 奇函数 B. 偶函数 C. 既是奇函数又是偶函数
D. 非奇非偶函数

【答案】B

【解析】

$$F(x) = \frac{2f(x)}{g(x)-1} + f(x) = \frac{2f(x) + f(x)g(x) - f(x)}{g(x)-1} = \frac{f(x) + f(x)g(x)}{g(x)-1}$$

$$F(-x) = \frac{2f(-x)}{g(-x)-1} + f(-x) = \frac{2f(-x) + f(-x)g(-x) - f(-x)}{g(-x)-1} = \frac{f(-x) + f(-x)g(-x)}{g(-x)-1}$$

代入 $f(x) + f(-x) = 0$, $g(x)g(-x) = 1$ 得 $F(-x) = \frac{-f(x) - f(x) \frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{g(x)} - 1} = \frac{\frac{-f(x)g(x) - f(x)}{g(x)}}{\frac{1-g(x)}{g(x)}}$

$$= \frac{f(x) + f(x)g(x)}{g(x)-1} \therefore F(-x) = F(x), \text{函数为偶函数}$$

13、定义在 $(-1,1)$ 上的函数 $f(x)$ 满足：

- ①对于任意 $x, y \in (-1,1)$ 都有 $f(x) + f(y) = f(\frac{x+y}{1+xy})$,
② $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 是单调递增函数，且 $f(\frac{1}{2}) = 1$.

(1)求 $f(0)$ ；

(2)证明 $f(x)$ 为奇函数；

(3)解不等式 $f(2x-1) < 1$.

【答案】(1) 0 (2) 见解析 (3) $\{x | 0 < x < \frac{3}{4}\}$

【解析】

(1)令 $x = y = 0$ ，则

$$f(0) + f(0) = f(0), \therefore f(0) = 0.$$

(2)令 $y = -x$ ，则 $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$ ，

即 $f(-x) = -f(x)$, $\therefore f(x)$ 是奇函数.

学必求其心得，业必贵于专精

(3) $Q f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是单调递增函数, $f(\frac{1}{2})=1$,

$$\therefore f(2x-1) < 1 = f(\frac{1}{2}) \text{ 可化为 } \begin{cases} -1 < 2x-1 < 1 \\ 2x-1 < \frac{1}{2} \end{cases},$$

解得 $0 < x < \frac{3}{4}$.

$\therefore$ 不等式 $f(2x-1) < 1$ 的解集为 $\{x | 0 < x < \frac{3}{4}\}$.

14、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足 $f(2-x) = f(2+x)$, $f(7-x) = f(7+x)$,
且在闭区间 $[0,7]$ 上, 只有 $f(1) = f(3) = 0$.

(1) 试判断函数 $y = f(x)$ 的奇偶性;

(2) 试求方程 $f(x) = 0$ 在闭区间 $[-2005, 2005]$ 上的根的个数, 并证明你的结论

【答案】(1) 非奇非偶 (2) 802

【解析】

(1) 由 $f(2-x) = f(2+x)$, $f(7-x) = f(7+x)$ 得函数 $y = f(x)$ 的
对称轴为 $x = 2$ 和 $x = 7$,

从而知函数 $y = f(x)$ 不是奇函数,

$$\text{由 } \begin{cases} f(2-x) = f(2+x) \\ f(7-x) = f(7+x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = f(4-x) \\ f(x) = f(14-x) \end{cases} \Rightarrow f(4-x) = f(14-x)$$

$\Rightarrow f(x) = f(x+10)$, 从而知函数 $y = f(x)$ 的周期为 $T = 10$

又 $f(3) = f(0) = 0$, 而 $f(7) \neq 0$, 故函数 $y = f(x)$ 是非奇非偶函数;

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} f(2-x) = f(2+x) \\ f(7-x) = f(7+x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = f(4-x) \\ f(x) = f(14-x) \end{cases} \Rightarrow f(4-x) = f(14-x)$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x+10)$$

$$\text{又 } f(3) = f(0) = 0, f(11) = f(13) = f(-7) = f(-9) = 0$$

故 $f(x)$ 在 $[0,10]$ 和 $[-10,0]$ 上均有有两个解, 从而可知函数 $y = f(x)$ 在 $[0,2005]$ 上有 402 个解, 在 $[-2005,0]$ 上有 400 个解, 所以函数 $y = f(x)$ 在 $[-2005, 2005]$

学必求其心得，业必贵于专精

上有 802 个解.

15、已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的不恒为零的函数，且对于任意的 $a, b \in \mathbf{R}$ ，都满足： $f(a \cdot b) = af(b) + bf(a)$.

(1)求 $f(0), f(1)$ 的值;

(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性,并证明你的结论

【答案】 (1) $f(0)=0, f(1)=0$ (2) $f(x)$ 是奇函数

【解析】

(1) 令 $a=b=0$, 则 $f(0)=0$

令 $a=b=1$, 则 $f(1)=2f(1) \Rightarrow f(1)=0$

(2) 证明: 令 $a=b=-1$, 则 $f(1)=2f(-1)$, $\because f(1)=0$, $\therefore f(-1)=0$

令 $a=x, b=-1$, 则 $f(-x)=xf(-1)-f(x)=-f(x)$

$\therefore f(x)$ 是奇函数.

16、已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足下面三个条件:

①对任意实数 x, y , 有 $f(x+y)=f(x-y)-f(x-1)f(y)$,

② $f(-1)=-2$,

③ $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上为增函数;

(1) 求 $f(0)$ 及 $f(1)$ 的值;

(2) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性,并证明.

【答案】 (1) 0;2 (2) 见解析

【解析】

学必求其心得，业必贵于专精

(1) 当 $x=y=0$ 时, $f(0)=f(0)-f(-1)f(0)$, 解得 $f(0)=0$,

当 $x=0$ 且 $y=1$ 时, $f(1)=f(-1)-f(-1)f(1)$, 代入得 $f(1)=-2+2f(1)$, 即 $f(1)=2$.

(2) 已知 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$,

当 $x=0$ 时, $f(y)=f(-y)-f(-1)f(y)$,

则 $-f(y)=f(-y)$, 即 $f(x)$ 为奇函数.

17、(2013 年北京高考理) 函数 $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度, 所得图象与曲线 $y=e^x$ 对称, 则 $f(x)=$

A. e^{x+1} B. e^{x-1} C. e^{-x+1} D. e^{-x-1}

【答案】D

【解析】

依题意, $f(x)$ 向右平移 1 个单位之后得到的函数应为 $y=e^{-x}$, 于是 $f(x)$ 相当于 $y=e^{-x}$ 向左平移 1 个单位的结果, $\therefore f(x)=e^{-x-1}$, 故选 D.

18、对于定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$, 给出下列命题:

①若函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x-1)+f(1-x)=2$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0, 1)$ 对称;

②若函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x-1)=f(1-x)$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称;

③在同一坐标系中, 函数 $y=f(x-1)$ 与 $y=f(1-x)$ 其图象关于直线 $x=1$ 对称;

④在同一坐标系中, 函数 $y=f(1+x)$ 与 $y=f(1-x)$ 其图象关于 y 轴对称.

其中, 真命题的个数是 ()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】D

【解析】

学必求其心得，业必贵于专精

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/647066142006006062>