

汉中市 2024 届高三年级教学质量第二次检测考试

数学（理科）

（命题学校：镇巴中学）

本试卷共 23 小题，共 150 分，共 4 页. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内.
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚.
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效.
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑.
5. 保持卡面清洁，不要折叠、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀.

第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 i 为虚数单位，复数 z 满足 $z(1+i) = 4+i$ ，则 z 的虚部为（ ）

- A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{3}{2}i$ D. $-\frac{3}{2}i$

【答案】B

【解析】

【分析】设 $z = a + bi$ ，利用复数相等的性质与四则运算求得 z ，从而得解.

【详解】依题意，设 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)，

因为 $z(1+i) = 4+i$ ，所以 $(a+bi)(1+i) = 4+i$ ，

即 $(a-b) + (a+b)i = 4+i$ ，

$$\text{所以 } \begin{cases} a-b=4 \\ a+b=1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=\frac{5}{2} \\ b=-\frac{3}{2} \end{cases},$$

则 $z = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$ ， z 的虚部为 $-\frac{3}{2}$.

故选：B.

2. 已知全集 $U = \{x \in \mathbb{Z} | -3 \leq x < 3\}$ ，集合 $A = \{-2, 0, 2\}$, $B = \{-1, 0\}$ ，则 $\complement_U(A \cup B) = (\quad)$

A. $\{-3, 1\}$

B. $\{-3, 3\}$

C. $\{-3, 1, 3\}$

D. $\emptyset$

【答案】A

【解析】

【分析】根据条件，求出全集 U ，再利用集合的运算，即可求出结果.

【详解】因为 $U = \{x \in \mathbb{Z} | -3 \leq x < 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ ，又 $A \cup B = \{-2, -1, 0, 2\}$ ，

所以 $\complement_U(A \cup B) = \{-3, 1\}$ ，

故选：A.

3. 图1是第七届国际数学教育大会（简称 ICME-7）的会徽图案，会徽的主题图案是由如图2所示的一连串直角三角形演化而成的，其中 $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_7A_8 = 1$ ，如果把图2中的直角三角形继续作下去，则第 n 个三角形的面积为 $(\quad)$



图1

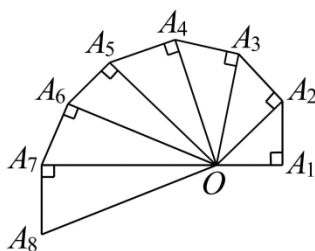


图2

A. $\frac{n}{2}$

B. $\frac{\sqrt{n}}{2}$

C. $\frac{n^2}{2}$

D. $\sqrt{n}$

【答案】B

【解析】

【分析】记 $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$ 的长度构成的数列为 $\{a_n\}$ ，依题意可得 $a_n^2 = a_{n-1}^2 + 1$ ，即可得到 $\{a_n^2\}$ 是以1为首项，1为公差的等差数列，从而求出 a_n ，再由面积公式计算可得.

【详解】记 $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$ 的长度构成的数列为 $\{a_n\}$ ，

由题意知， $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_7A_8 = 1$ ，且 $\angle OA_1A_2, \angle OA_2A_3, \dots, \angle OA_7A_8$ 都是直角三角形，

所以 $a_1 = 1$ ，且 $a_n^2 = a_{n-1}^2 + 1$ ，所以数列 $\{a_n^2\}$ 是以1为首项，1为公差的等差数列，

所以 $a_n^2 = 1 + (n-1) \times 1 = n$,

由 $a_n > 0$, 所以 $a_n = \sqrt{n}$.

所以第 n 个三角形的面积为 $\frac{1}{2}a_n \times 1 = \frac{\sqrt{n}}{2}$.

故选: B.

4. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y-2 \leq 0 \\ 3x+y-2 \geq 0 \\ x-2y \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = 2x + 3y$ 的最小值为 ()

A. -2

B. 2

C. -1

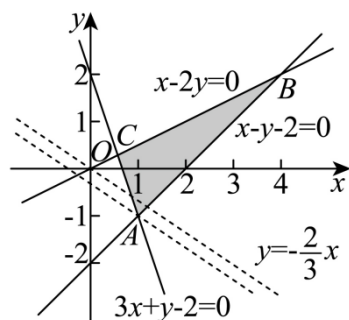
D. 1

【答案】C

【解析】

【分析】根据线性约束条件画出可行域, 再数形结合求出目标函数的最优解, 即可得解;

【详解】由约束条件 $\begin{cases} x-y-2 \leq 0 \\ 3x+y-2 \geq 0 \\ x-2y \geq 0 \end{cases}$ 作出可行域如图,



联立 $\begin{cases} 3x+y-2=0 \\ x-y-2=0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$, 则 $A(1, -1)$.

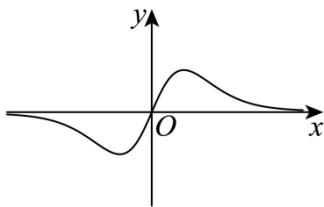
化目标函数 $z = 2x + 3y$ 为 $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}z$.

由图可知, 当直线 $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}z$ 过 A 时, 直线在 y 轴上的截距最小,

则 z 有最小值为 $2 \times 1 + 3 \times (-1) = -1$.

故选: C.

5. 已知函数 $y = f(x)$ 的图象如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能是 ()



A. $f(x) = \frac{-x - \sin x}{e^x + e^{-x}}$

B. $f(x) = \frac{x - \cos x}{e^x + e^{-x}}$

C. $f(x) = \frac{x + \sin x}{e^x + e^{-x}}$

D. $f(x) = \frac{x + \cos x}{e^x + e^{-x}}$

【答案】C

【解析】

【分析】依题意可得 $f(x)$ 为奇函数，即可排除 B、D，由函数在 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 上的函数值的特征排除 A.

【详解】由图可知 $f(x)$ 的图象关于原点对称，则 $f(x)$ 为奇函数，

对于 A： $f(x) = \frac{-x - \sin x}{e^x + e^{-x}}$ 定义域为 $\mathbb{R}$ ，

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时 $-x - \sin x < 0$ ， $e^x + e^{-x} > 0$ ，所以 $f(x) < 0$ ，不符合题意，故 A 错误；

对于 B： $f(x) = \frac{x - \cos x}{e^x + e^{-x}}$ 定义域为 $\mathbb{R}$ ，

$$f(-x) = \frac{-x - \cos(-x)}{e^{-x} + e^x} = \frac{-x - \cos x}{e^{-x} + e^x} \neq -f(x) \text{ 且 } f(-x) \neq f(x),$$

所以 $f(x) = \frac{x - \cos x}{e^x + e^{-x}}$ 为非奇非偶函数，不符合题意，故 B 错误；

对于 D： $f(x) = \frac{x + \cos x}{e^x + e^{-x}}$ 定义域为 $\mathbb{R}$ ，

$$f(-x) = \frac{-x + \cos(-x)}{e^{-x} + e^x} = \frac{-x + \cos x}{e^{-x} + e^x} \neq -f(x) \text{ 且 } f(-x) \neq f(x),$$

所以 $f(x) = \frac{x + \cos x}{e^x + e^{-x}}$ 为非奇非偶函数，不符合题意，故 D 错误；

对于 C： $f(x) = \frac{x + \sin x}{e^x + e^{-x}}$ 定义域为 $\mathbb{R}$ ， $f(-x) = \frac{-x + \sin(-x)}{e^{-x} + e^x} = -\frac{x + \sin x}{e^x + e^{-x}} = -f(x)$ ，

所以 $f(x) = \frac{x + \sin x}{e^x + e^{-x}}$ 为奇函数，

且当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时 $x + \sin x > 0$ ， $e^x + e^{-x} > 0$ ，所以 $f(x) > 0$ ，符合题意，故 C 正确；

故选：C

6. 已知 m, n 为两条直线， α, β 为两个平面， $m \subset \alpha, n \subset \beta, m \perp n$ ，则 $m \perp \beta$ 是 $\alpha \perp \beta$ 的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

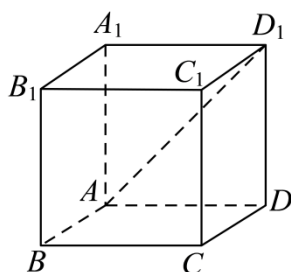
【解析】

【分析】利用面面垂直的判定定理，可得充分性成立，再通过举例说明 $\alpha \perp \beta$ ，得不出 $m \perp \beta$ ，即可得出结果.

【详解】若 $m \perp \beta$ ，因为 $m \subset \alpha$ ，所以 $\alpha \perp \beta$ ，即由 $m \perp \beta$ 可以得到 $\alpha \perp \beta$ ，

若 $\alpha \perp \beta$ ，如图，在正方体中，取平面 ADD_1A_1 为平面 α ，平面 $ABCD$ 为平面 β ，

取 AD_1 为直线 m ， CD 为直线 n ，显然有 $m \subset \alpha, n \subset \beta, m \perp n, \alpha \perp \beta$ ，但 m 与 β 不垂直，即由 $\alpha \perp \beta$ 得不到 $m \perp \beta$ ，



故选：A.

7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ，曲线 C 上的点 M 满足

$\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2M} = 0, \angle MF_1F_2 = \frac{\pi}{6}$ ，则双曲线的离心率为（ ）

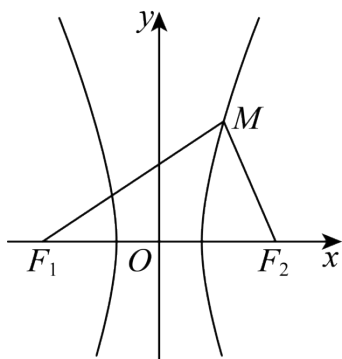
- A. $\sqrt{3} + 1$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3} - 1$

【答案】A

【解析】

【分析】利用 $\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2M} = 0, \angle MF_1F_2 = \frac{\pi}{6}$ ，可得 $|MF_1| = \sqrt{3}c, |MF_2| = c$ ，结合双曲线的定义，即可求得双曲线的离心率.

【详解】因为 $\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2M} = 0, \angle MF_1F_2 = \frac{\pi}{6}$ ，所以 $MF_1 \perp MF_2$ ，



又 $|F_1F_2| = 2c$ ，所以 $|MF_1| = \sqrt{3}c$ ， $|MF_2| = c$ ，

所以 $|MF_1| - |MF_2| = \sqrt{3}c - c = 2a$ ，

则 $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} + 1$ ，即双曲线的离心率为 $\sqrt{3} + 1$ 。

故选：A.

8. 已知 $(x+1)(x-2)^4 = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \dots + a_5(x+1)^5$ ，则 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 =$
()

A. 32

B. 48

C. 16

D. -16

【答案】D

【解析】

【分析】对题中等式两边同时求导，令 $x=0$ ，即可得结果.

【详解】因为 $(x+1)(x-2)^4 = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \dots + a_5(x+1)^5$ ，

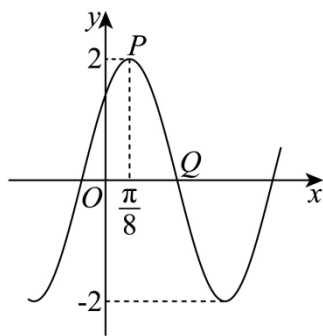
两边同时求导可得： $(x-2)^4 + 4(x+1)(x-2)^3 = a_1 + 2a_2(x+1) + \dots + 5a_5(x+1)^4$ ，

令 $x=0$ ，可得 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = (-2)^4 + 4 \times (-2)^3 = -16$ 。

故选：D.

9. 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ $\left(\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ 的图象如图所示， P, Q 为图象上两点，对于向量

$\vec{a} = (1, 0)$ ， $\vec{a} \cdot \vec{PQ} = \frac{\pi}{4}$ ，为了得到 $g(x) = 2\sin 4x$ 的图象，需要将 $f(x)$ 图象上所有点的坐标 ()



- A. 横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位
 B. 横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再向右平移 $\frac{\pi}{16}$ 个单位
 C. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 再向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位
 D. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 再向右平移 $\frac{\pi}{16}$ 个单位

【答案】D

【解析】

【分析】根据图象及题设条件, 求出 ω, φ , 从而得到 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{4})$, 再利用图象的平移变换, 即可求出结果.

【详解】设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 如图, 易知 $P(\frac{\pi}{8}, 2)$, $Q(\frac{\pi}{8} + \frac{T}{4}, 0)$, 所以 $\overrightarrow{PQ} = (\frac{T}{4}, -2)$,
 又 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{a} \cdot \overrightarrow{PQ} = \frac{\pi}{4}$, 所以 $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{4}$, 得到 $T = \pi$, 所以 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 即 $\omega = 2$,

又由图象知, $f(x)$ 过点 $(\frac{\pi}{8}, 2)$, 所以 $2 \times \frac{\pi}{8} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 即 $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

又 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 得到 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{4})$,

为了得到 $g(x) = 2\sin 4x$ 的图象, 需要将 $f(x)$ 图象上所有点的坐标横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 再向右平移 $\frac{\pi}{16}$ 个单位,

故选: D.

10. 已知 $\odot M: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$, 直线 $l: 2x + y + 2 = 0$, P 为 l 上的一动点, A, B 为 $\odot M$ 上任意不重合的两点, 则 $\cos \angle APB$ 的最小值为 ()

- A. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$

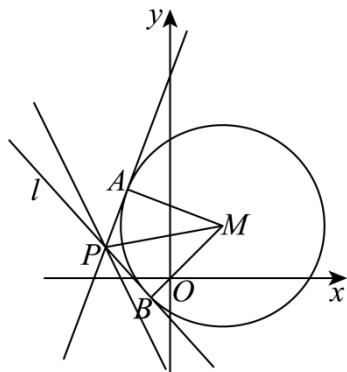
【答案】D

【解析】

【分析】根据题意分析得当 PA ， PB 分别为圆的切线，且 MP 最小时， $\angle APB$ 最大，此时 $\cos \angle APB$ 最小，再利用二倍角公式即可得解.

【详解】由题意得 $\odot M$ 的标准方程为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ ，所以圆心 $M(1,1)$ ，半径为 2，

所以圆心 M 到直线 l 的距离为 $\frac{|2+1+2|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5} > 2$ ，所以直线 l 与 $\odot M$ 相离，



所以当 PA ， PB 分别为圆的切线，且 $|MP|$ 最小时，

$\sin \angle APM = \frac{|AM|}{|PM|} = \frac{2}{|PM|}$ 最大，又 $0 < \angle APM < \frac{\pi}{2}$ ，则 $\angle APM$ 最大，

所以 $\angle APB = 2\angle APM$ 最大，此时 $\cos \angle APB$ 最小，

此时 $\cos \angle APB = \cos 2\angle APM = 1 - 2\sin^2 \angle APM = 1 - 2 \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = -\frac{3}{5}$.

故选：D.

11. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $2S_n = a_n + \frac{2}{a_n}$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项积为 T_n 且 $T_n = S_n^2$ ，下列

说法错误的是（ ）

A. $S_n = \sqrt{2n}$

B. $\{b_n\}$ 为递减数列

C. $b_{2024} = \frac{2024}{2023}$

D. $a_n = \sqrt{2}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

【答案】B

【解析】

【分析】根据 a_n 与 S_n 及 b_n 与 T_n 的关系，利用等差数列的定义及通项公式，结合数列的性质即可求解.

【详解】当 $n=1$ 时， $2a_1 = a_1 + \frac{2}{a_1}$ ，解得 $a_1 = \pm\sqrt{2}$ （负舍），

当 $n \geq 2$ 时, $2S_n = S_n - S_{n-1} + \frac{2}{S_n - S_{n-1}}$, 即 $S_n^2 - S_{n-1}^2 = 2$, 且 $S_1^2 = 2$,

所以数列 $\{S_n^2\}$ 是首项为 2, 公差为 2 的等差数列,

所以 $S_n^2 = 2 + 2 \cdot (n-1) = 2n$,

又 $a_n > 0$, 所以 $S_n = \sqrt{2n}$, 故 A 正确;

当 $n \geq 2$ 时, 有 $a_n = \sqrt{2n} - \sqrt{2(n-1)} = \sqrt{2}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$,

取 $n=1$ 时, $a_1 = \sqrt{2}(\sqrt{1} - \sqrt{1-1}) = \sqrt{2}$ 此式也满足 a_1 ,

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \sqrt{2}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$, 故 D 正确;

因为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项积为 T_n 且 $T_n = S_n^2$,

所以 $T_n = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_n = S_n^2 = 2n$,

当 $n=1$ 时, $b_1 = 2$,

当 $n \geq 2$ 时, $b_n = \frac{T_n}{T_{n-1}} = \frac{2n}{2(n-1)} = \frac{n}{n-1} = \frac{n-1+1}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}$,

显然 $n=1$ 不适用, 故数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = \begin{cases} 2, n=1 \\ 1 + \frac{1}{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$,

显然 $b_1 = b_2 = 2$, 所以数列 $\{b_n\}$ 不是递减数列, 故 B 错误,

由当 $n \geq 2$ 时, $b_n = \frac{n}{n-1}$, 得 $b_{2024} = \frac{2024}{2024-1} = \frac{2024}{2023}$, 故 C 正确,

故选: B.

【点睛】关键点点睛: 解决本题的关键是利用 $a_n = \begin{cases} a_1, n=1 \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$ 和 $b_n = \begin{cases} b_1, n=1 \\ \frac{T_n}{T_{n-1}}, n \geq 2 \end{cases}$ 结合等差数列的

定义及通项公式即可求解.

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln\left(\frac{1}{2}\right), x \leq 0 \\ 4\ln^2 x, x > 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - mx$ 有 4 个零点, 则 m 的取值范围为()

A. $\left\{m \mid m \geq \frac{16}{e^2}\right\}$

B. $\left\{m \mid m \geq e \ln^2 2\right\}$

$$C. \left\{ m \mid e \ln^2 2 < m < \frac{16}{e^2} \right\}$$

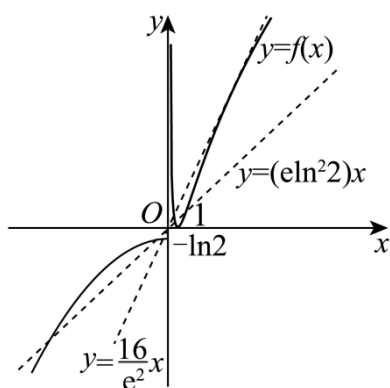
$$D. \left\{ m \mid m = e \ln^2 2 \text{ 或 } m = \frac{16}{e^2} \right\}$$

【答案】D

【解析】

【分析】由题意可知：函数 $g(x)$ 的零点个数即为 $y = f(x)$ 与 $y = mx$ 的交点个数，利用导数求过原点的切线，结合图象分析求解。

【详解】作出 $f(x)$ 的图象，如图所示



令 $g(x) = f(x) - mx = 0$ ，可得 $f(x) = mx$ ，

由题意可知：函数 $g(x)$ 的零点个数即为 $y = f(x)$ 与 $y = mx$ 的交点个数，

若 $x > 0$ ，则 $f(x) = 4 \ln^2 x$ ，可得 $f'(x) = \frac{8 \ln x}{x}$ ，

设切点坐标为 $(x_1, 4 \ln^2 x_1)$ ， $x_1 > 1$ ，切线斜率为 $k_1 = \frac{8 \ln x_1}{x_1}$ ，

则切线方程为 $y - 4 \ln^2 x_1 = \frac{8 \ln x_1}{x_1} (x - x_1)$ ，

代入点 $O(0, 0)$ ，可得 $-4 \ln^2 x_1 = -8 \ln x_1$ ，解得 $x_1 = e^2$ ，

此时切线斜率为 $k_1 = \frac{16}{e^2}$ ；

若 $x \leq 0$ ，则 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ，可得 $f'(x) = \ln^2 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ，

设切点坐标为 $\left(x_2, -\ln 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}\right)$ ， $x_2 \leq 0$ ，切线斜率为 $k_2 = \ln^2 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$ ，

则切线方程为 $y + \ln 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} = \ln^2 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} (x - x_2)$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/647134042031006102>