

福建省福州阳光国际学校 2024 届高三数学押题试卷

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

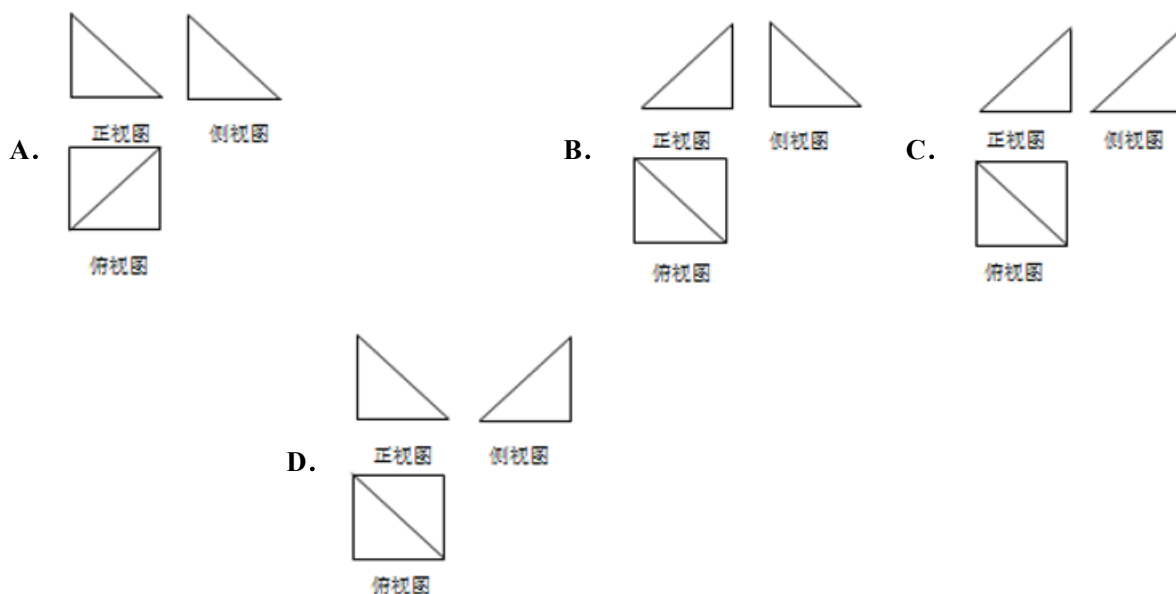
1. 函数 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$)，当 $x \in [0, \pi]$ 时， $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ ，则 ω 的范围为 ()

- A. $\left[\frac{5}{6}, \frac{3}{2}\right]$ B. $\left[\frac{5}{6}, \frac{5}{3}\right]$ C. $\left[\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right]$ D. $\left(0, \frac{5}{3}\right]$

2. 将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向左平移 φ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) 个单位长度，得到的函数为偶函数，则 φ 的值为 ()

- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{4}$

3. 已知底面为正方形的四棱锥，其一条侧棱垂直于底面，那么该四棱锥的三视图可能是下列各图中的 ()



4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_4 = -3$ ， $S_{12} = 24$ ，若 $a_i + a_j = 0$ ($i, j \in \mathbb{N}^*$ ，且 $1 \leq i < j$)，则 i 的取值集合是 ()

- A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{6, 7, 8\}$ C. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ D. $\{6, 7, 8, 9, 10\}$

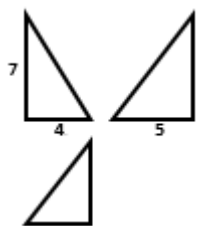
5. 已知变量的几组取值如下表：

x	1	2	3	4
y	2.4	4.3	5.3	7

若 y 与 x 线性相关，且 $\hat{y} = 0.8x + a$ ，则实数 $a =$ ()

- A. $\frac{7}{4}$ B. $\frac{11}{4}$ C. $\frac{9}{4}$ D. $\frac{13}{4}$

6. 我国古代数学名著《九章算术》有一问题：“今有鳖臑(*biē nàò*)，下广五尺，无袤；上袤四尺，无广；高七尺.问积几何？”该几何体的三视图如图所示，则此几何体外接球的表面积为()



- A. 90π 平方尺 B. 180π 平方尺
C. 360π 平方尺 D. $135\sqrt{10}\pi$ 平方尺

7. 下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()

- A. $y = \sqrt{x}$ B. $f(x) = x \sin x$ C. $f(x) = x^2 + |x|$ D. $y = |x + 1|$

8. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，点 $P(x_1, y_1)$ ， $Q(-x_1, -y_1)$ 在椭圆 C 上，其中 $x_1 > 0, y_1 > 0$ ，若 $|PQ| = 2|OF_2|$ ， $\left| \frac{QF_1}{PF_1} \right| \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，则椭圆 C 的离心率的取值范围为 ()

- A. $\left[0, \frac{\sqrt{6}-1}{2} \right)$ B. $(0, \sqrt{6}-2]$
C. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}-1 \right]$ D. $(0, \sqrt{3}-1]$

9. 设 α 为锐角，若 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{5}$ ，则 $\sin 2\alpha$ 的值为 ()

- A. $\frac{17}{25}$ B. $-\frac{7}{25}$ C. $-\frac{17}{25}$ D. $\frac{7}{25}$

10. “幻方”最早记载于我国公元前 500 年的春秋时期《大戴礼》中.“ n 阶幻方 ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}^*$)”是由前 n^2 个正整数组成的一个 n 阶方阵，其各行各列及两条对角线所含的 n 个数之和 (简称幻和) 相等，例如“3 阶幻方”的幻和为 15 (如图所示). 则“5 阶幻方”的幻和为 ()

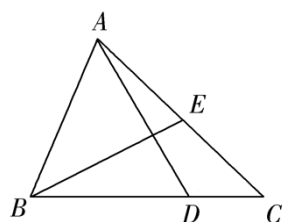
8	1	6
3	5	7
4	9	2

- A. 75 B. 65 C. 55 D. 45

11. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_1 = 12, S_5 = 90$ ，则等差数列 $\{a_n\}$ 公差 $d =$ ()

- A. 2 B. $\frac{3}{2}$ C. 3 D. 4

12. 已知 $\triangle ABC$ 中， $AB = 2, BC = 3, \angle ABC = 60^\circ, BD = 2DC, AE = EC$ ，则 $\vec{AD} \cdot \vec{BE} =$ ()

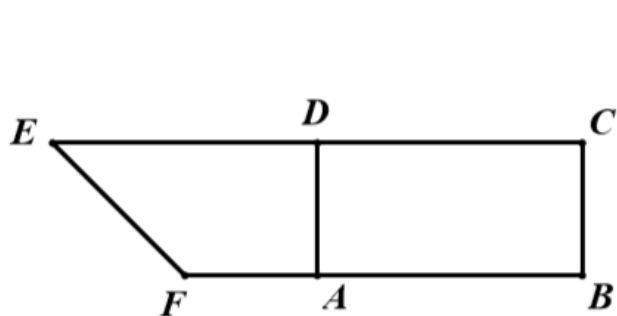


- A. 1 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

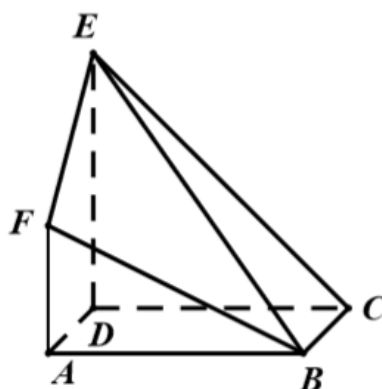
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ y - 2 \leq 0 \\ 2x - y \leq 2 \end{cases}$ ，则 $z = x + y$ 的最大值为_____.

14. 如图所示，在直角梯形 $BCDF$ 中， $\angle CBF = \angle BCE = 90^\circ$ ， A, D 分别是 BF, CE 上的点， $AD \parallel BC$ ，且 $AB = DE = 2BC = 2AF$ （如图①）.将四边形 $ADEF$ 沿 AD 折起，连接 BE, BF, CE （如图②）.在折起的过程中，则下列表述：



图①



图②

- ① $AC \parallel$ 平面 BEF ；
② 四点 B, C, E, F 可能共面；

③若 $EF \perp CF$ ，则平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$ ；

④平面 BCE 与平面 BEF 可能垂直.其中正确的是_____.

15. 已知命题 $P: \forall x > 0, x^3 > 0$ ，那么 P 是_____.

16. $(3x^2 - 2x - 1)^5$ 的展开式中， x^2 的系数是_____. (用数字填写答案)

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x - 1| + |x + 2|$.

(1) 求不等式 $f(x) < x + 3$ 的解集；

(2) 若不等式 $m - x^2 - 2x, f(x)$ 在 R 上恒成立，求实数 m 的取值范围.

18. (12 分) 已知正数 x, y, z 满足 $x + y + z = t$ (t 为常数)，且 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2$ 的最小值为 $\frac{8}{7}$ ，求实数 t 的值.

19. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 ，上、下顶点分别为 B_1, B_2 ， F 为其右焦点， $\overrightarrow{B_1A_1} \cdot \overrightarrow{B_1F} = 1$ ，且该椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$ ；

(I) 求椭圆 C 的标准方程；

(II) 过点 A_1 作斜率为 k 的直线 l 交椭圆 C 于 x 轴上方的点 P ，交直线 $x = 4$ 于点 D ，直线 A_2D 与椭圆 C 的另一个交点为 G ，直线 OG 与直线 A_1D 交于点 H 。若 $\overrightarrow{A_1P} = \lambda \overrightarrow{A_1H}$ ，求 λ 取值范围.

20. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $(\sin A + \sin B)(a - b) + b \sin C = c \sin C$.

(1) 求 A ；

(2) 若 $b = 2c$ ，点 D 为边 BC 的中点，且 $AD = \sqrt{7}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积.

21. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数)，以原点为极点， x 轴的非负半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 = \frac{4}{\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha}$.

(1) 求曲线 C_1 的极坐标方程以及曲线 C_2 的直角坐标方程；

(2) 若直线 $l: y = kx$ 与曲线 C_1 、曲线 C_2 在第一象限交于 P, Q 两点，且 $|OP| = 2|OQ|$ ，点 M 的坐标为 $(2, 0)$ ，求 $\triangle MPQ$ 的面积.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = x^2 - a \ln x - 1 (a \in R)$

- (1) 若函数 $f(x)$ 有且只有一个零点，求实数 a 的取值范围；
- (2) 若函数 $g(x) = e^x + x^2 - ex - f(x) - 1 \geq 0$ 对 $x \in [1, +\infty)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

首先由 $x \in [0, \pi]$ ，可得 $\omega x - \frac{\pi}{3}$ 的范围，结合函数 $f(x)$ 的值域和正弦函数的图像，可求的关于实数 ω 的不等式，解不等式即可求得范围.

【详解】

因为 $x \in [0, \pi]$ ，所以 $\omega x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \omega\pi - \frac{\pi}{3}\right]$ ，若值域为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ ，

所以只需 $\frac{\pi}{2} \leq \omega\pi - \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$ ， $\therefore \frac{5}{6} \leq \omega \leq \frac{5}{3}$.

故选：B

【点睛】

本题主要考查三角函数的值域，熟悉正弦函数的单调性和特殊角的三角函数值是解题的关键，侧重考查数学抽象和数学运算的核心素养.

2、D

【解析】

利用三角函数的图象变换求得函数的解析式，再根据三角函数的性质，即可求解，得到答案.

【详解】

将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向左平移 φ 个单位长度，

可得函数 $g(x) = \sin[2(x + \varphi)] = \sin(2x + 2\varphi)$

又由函数 $g(x)$ 为偶函数，所以 $2\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，解得 $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ，

因为 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ，当 $k = 0$ 时， $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ，故选 D.

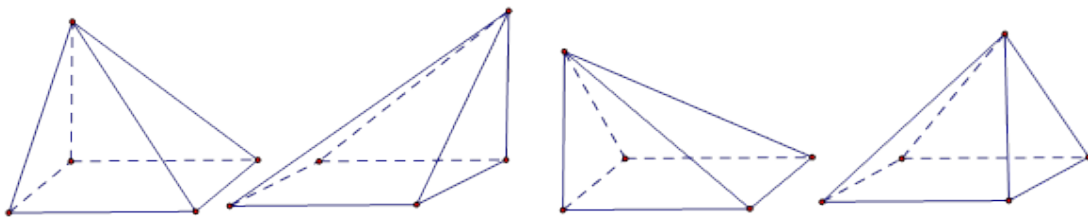
【点睛】

本题主要考查了三角函数的图象变换，以及三角函数的性质的应用，其中解答中熟记三角函数的图象变换，合理应用三角函数的图象与性质是解答的关键，着重考查了推理与运算能力，属于基础题。

3、C

【解析】

试题分析：通过对以下四个四棱锥的三视图对照可知，只有选项 C 是符合要求的。



考点：三视图

4、C

【解析】

首先求出等差数列的首先和公差，然后写出数列即可观察到满足 $a_i + a_j = 0$ 的 i 的取值集合。

【详解】

设公差为 d ，由题知 $a_4 = -3 \Rightarrow a_1 + 3d = -3$ ，

$$S_{12} = 24 \Rightarrow 12a_1 + \frac{12 \times 11}{2}d = 24,$$

解得 $a_1 = -9$ ， $d = 2$ ，

所以数列为 $-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$ ，

故 $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 。

故选：C。

【点睛】

本题主要考查了等差数列的基本量的求解，属于基础题。

5、B

【解析】

求出 $\bar{x}, \bar{y}$ ，把坐标 $(\bar{x}, \bar{y})$ 代入方程可求得 a 。

【详解】

据题意，得 $\bar{x} = \frac{1}{4}(1+2+3+4) = \frac{5}{2}$ ， $\bar{y} = \frac{1}{4}(2.4+4.3+5.3+7) = \frac{19}{4}$ ，所以 $\frac{19}{4} = 0.8 \times \frac{5}{2} + a$ ，所以 $a = \frac{11}{4}$ 。

故选：B.

【点睛】

本题考查线性回归直线方程，由性质线性回归直线一定过中心点 $(\bar{x}, \bar{y})$ 可计算参数值.

6、A

【解析】

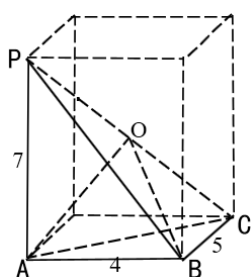
根据三视图得出原几何体的立体图是一个三棱锥，将三棱锥补充成一个长方体，此长方体的外接球就是该三棱锥的外接球，由球的表面积公式计算可得选项.

【详解】

由三视图可得，该几何体是一个如图所示的三棱锥 $P-ABC$ ， O 为三棱锥外接球的球心，此三棱锥的外接球也是此三棱锥所在的长方体的外接球，所以 O 为 PC 的中点，设球半径为 R ，则

$$R^2 = \left(\frac{1}{2} PC \right)^2 = \frac{1}{4} (AB^2 + BC^2 + PA^2) = \frac{1}{4} (4^2 + 5^2 + 7^2) = \frac{45}{2}, \text{所以外接球的表面积 } S = 4\pi R^2 = 4\pi \times \frac{45}{2} = 90\pi,$$

故选：A.



【点睛】

本题考查求几何体的外接球的表面积，关键在于由几何体的三视图得出几何体的立体图，找出外接球的球心位置和半径，属于中档题.

7、C

【解析】

结合基本初等函数的奇偶性及单调性，结合各选项进行判断即可.

【详解】

A: $y = \sqrt{x}$ 为非奇非偶函数，不符合题意；

B: $f(x) = x \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 上不单调，不符合题意；

C: $y = x^2 + |x|$ 为偶函数，且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，符合题意；

D: $y = |x+1|$ 为非奇非偶函数，不符合题意.

故选：C.

【点睛】

本小题主要考查函数的单调性和奇偶性，属于基础题.

8、C

【解析】

根据 $|PQ| = 2|OF_2|$ 可得四边形 PF_1QF_2 为矩形，设 $PF_1 = n, PF_2 = m$ ，根据椭圆的定义以及勾股定理可得

$$\frac{4c^2}{2(a^2 - c^2)} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m}, \text{再分析 } t = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \text{ 的取值范围,进而求得 } 2 < \frac{4c^2}{2(a^2 - c^2)} \leq \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ 再求离心率的范围即可.}$$

【详解】

设 $PF_1 = n, PF_2 = m$ ，由 $x_1 > 0, y_1 > 0$ ，知 $m < n$ ，

因为 $P(x_1, y_1), Q(-x_1, -y_1)$ 在椭圆 C 上， $|PQ| = 2|OP| = 2|OF_2|$ ，

所以四边形 PF_1QF_2 为矩形， $QF_1 = PF_2$ ；

$$\text{由 } \frac{|QF_1|}{|PF_1|} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{可得 } \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{m}{n} < 1,$$

由椭圆的定义可得 $m + n = 2a, m^2 + n^2 = 4c^2$ ①，

平方相减可得 $mn = 2(a^2 - c^2)$ ②，

$$\text{由①②得 } \frac{4c^2}{2(a^2 - c^2)} = \frac{m^2 + n^2}{mn} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m};$$

$$\text{令 } t = \frac{m}{n} + \frac{n}{m},$$

$$\text{令 } v = \frac{m}{n} \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \right),$$

$$\text{所以 } t = v + \frac{1}{v} \in \left(2, \frac{4\sqrt{3}}{3} \right],$$

$$\text{即 } 2 < \frac{4c^2}{2(a^2 - c^2)} \leq \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{所以 } a^2 - c^2 < c^2 \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}(a^2 - c^2),$$

$$\text{所以 } 1 - e^2 < e^2 \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}(1 - e^2),$$

所以 $\frac{1}{2} < e^2 \leq 4 - 2\sqrt{3}$,

解得 $\frac{\sqrt{2}}{2} < e \leq \sqrt{3} - 1$.

故选：C

【点睛】

本题主要考查了椭圆的定义运用以及构造齐次式求椭圆的离心率的问题,属于中档题.

9、D

【解析】

用诱导公式和二倍角公式计算.

【详解】

$$\sin 2\alpha = -\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -[2\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - 1] = -[2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1] = \frac{7}{25}.$$

故选：D.

【点睛】

本题考查诱导公式、余弦的二倍角公式，解题关键是找出已知角和未知角之间的联系.

10、B

【解析】

计算 $1+2+\dots+25$ 的和，然后除以 5，得到“5 阶幻方”的幻和.

【详解】

依题意“5 阶幻方”的幻和为 $\frac{1+2+\dots+25}{5} = \frac{\frac{1+25}{2} \times 25}{5} = 65$ ，故选 B.

【点睛】

本小题主要考查合情推理与演绎推理，考查等差数列前 n 项和公式，属于基础题.

11、C

【解析】

根据等差数列的求和公式即可得出.

【详解】

$$\because a_1=12, S_5=90,$$

$$\therefore 5 \times 12 + \frac{5 \times 4}{2} d = 90,$$

$$\text{解得 } d=1.$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/647141010042006104>