

深圳外国语学校 2023—2024 学年度高二第一学期期末考试

数学试题

本卷满分 150 分，考试时间 120 分钟

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号码填写在答题卡上。
2. 作答时，务必将答案写在答题卡上。写在本试卷及草稿纸上无效。
3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、单项选择题：本大题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求的。

1. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 = 2$ ， $a_5 = -16$ ，则公比 $q =$ ()

- A. 2 B. -2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】由 $a_5 = a_2 q^3$ 可算出答案。【详解】 $\because a_5 = a_2 q^3$ ， $\therefore -16 = 2 \times q^3$ ，解得 $q = -2$ 。

故选：B。

2. 直线 $l_1: ax + y - 1 = 0$, $l_2: (a-2)x - ay + 1 = 0$ ，则“ $a = -2$ ”是“ $l_1 // l_2$ ”的 () 条件

- A. 必要不充分 B. 充分不必要
C. 充要 D. 既不充分也不必要

【答案】C

【解析】

【分析】根据直线平行求得 a ，结合充分、必要条件的知识求得正确答案。【详解】若 $l_1 // l_2$ ，则 $a \times (-a) = 1 \times (a-2)$, $a^2 + a - 2 = 0$ ，解得 $a = 1$ 或 $a = -2$ ，当 $a = 1$ 时， l_1 和 l_2 的方程都是 $x + y - 1 = 0$ ，两直线重合，不符合题意。经验证可知， $a = -2$ 符合。

所以“ $a = -2$ ”是“ $l_1 // l_2$ ”的充要条件.

故选: C

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 且 $S_7 = 7, S_{15} = 75$, 则 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的通项公式为 ()

A. $\frac{n}{4} + \frac{5}{4}$

B. $\frac{n}{4} - \frac{5}{4}$

C. $\frac{n}{2} + \frac{5}{2}$

D. $\frac{n}{2} - \frac{5}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据等差数列前 n 项和的公式可推导 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 再计算首项与公差求解即可.

【详解】设 $a_n = kn + b, (n \in \mathbb{N}^*, k, b \in \mathbb{R})$, 则 $\frac{S_n}{n} = \frac{(k + b + kn + b)n}{2n} = \frac{kn}{2} + \frac{2b + k}{2}$ 为等差数列.

设等差数列 $b_n = \frac{S_n}{n}$ 的公差为 d , 由 $S_7 = 7, S_{15} = 75$, 则 $b_7 = \frac{S_7}{7} = 1, b_{15} = \frac{S_{15}}{15} = 5$, 故 $d = \frac{5-1}{15-7} = \frac{1}{2}$,

$b_1 = b_7 - 6d = -2$, 故 $b_n = -2 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n}{2} - \frac{5}{2}$, 即 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的通项公式为 $\frac{n}{2} - \frac{5}{2}$.

故选: D

4. 与曲线 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ 共焦点, 且与双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$ 共渐近线的双曲线的方程为 ()

A. $\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{8} = 1$

B. $\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{12} = 1$

C. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$

D. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{12} = 1$

【答案】A

【解析】

【分析】先由与椭圆共焦点得到 $c^2 = 20$, 且焦点在 y 轴上, 从而巧设所求双曲线为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = \lambda (\lambda < 0)$,

利用 $c^2 = a^2 + b^2$ 即可得解.

【详解】因为曲线 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ 为椭圆, 焦点在 y 轴上, 且 $c^2 = 36 - 16 = 20$,

又因为所求双曲线与双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$ 共渐近线,

所以设所求双曲线为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = \lambda (\lambda < 0)$, 即 $\frac{y^2}{-6\lambda} - \frac{x^2}{-4\lambda} = 1$,

则 $c^2 = -6\lambda - 4\lambda = 20$, 解得 $\lambda = -2$,

所以所求双曲线为 $\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{8} = 1$.

故选: A.

5. 已知平面 α 的一个法向量 $\vec{n} = (-2, -2, 1)$, 点 $A(-1, 3, 2)$ 在 α 内, 则平面外一点 $P(-2, 1, 2)$ 到平面 α 的距离为 ()

- A. 4 B. 2 C. $\frac{8}{3}$ D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】利用点 P 到平面 α 的距离公式 $d = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{PA}|}{|\vec{n}|}$ 即可得解.

【详解】因为 $P(-2, 1, 2)$, $A(-1, 3, 2)$,

所以 $\vec{PA} = (1, 2, 0)$,

又 $\vec{n} = (-2, -2, 1)$ 是平面 α 的一个法向量,

所以 P 到 α 的距离为 $d = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{PA}|}{|\vec{n}|} = \frac{|-2 - 4 + 0|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{6}{3} = 2$.

故选: B.

6. 若双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{4} = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线被圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 所截得的弦长为 $\frac{16}{5}$, 则双曲线 C

的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{13}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{17}}{3}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{\sqrt{39}}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】

首先确定双曲线渐近线方程，结合圆的方程可确定两渐近线截圆所得弦长相等；利用垂径定理可构造方程

求得 a 的值，进而根据离心率 $e = \sqrt{1 + \frac{4}{a^2}}$ 可求得结果.

【详解】由双曲线方程得：渐近线方程为 $y = \pm \frac{a}{2}x$ ；

由圆的方程知：圆心为 $(2, 0)$ ，半径 $r = 2$ ；

Q $y = \frac{a}{2}x$ 与 $y = -\frac{a}{2}x$ 图象关于 x 轴对称，圆的图象关于 x 轴对称，

$\therefore$ 两条渐近线截圆所得弦长相等，

不妨取 $y = \frac{a}{2}x$ ，即 $ax - 2y = 0$ ，则圆心到直线距离 $d = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 4}}$ ，

$\therefore$ 弦长为 $2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{4 - \frac{4a^2}{a^2 + 4}} = \frac{16}{5}$ ，解得： $a = \frac{3}{2}$ ，

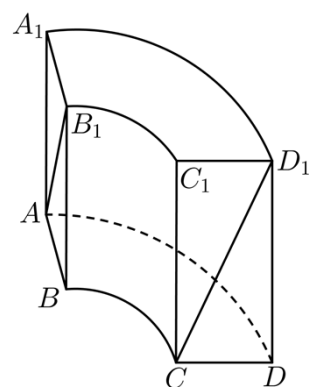
$\therefore$ 双曲线离心率 $e = \sqrt{1 + \frac{4}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \frac{5}{3}$.

故选：C.

7. 在中国古代数学著作《九章算术》中记载了一种称为“曲池”的几何体，该几何体的上、下底面平行，且均为扇环形（扇环是指圆环被扇形截得的部分）. 现有一个如图所示的曲池，它的高为 2， AA_1 ， BB_1 ，

CC_1 ， DD_1 均与曲池的底面垂直，底面扇环对应的两个圆的半径分别为 1 和 2，对应的圆心角为 90° ，则

图中异面直线 AB_1 与 CD_1 所成角的余弦值为（ ）



A. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{3}{5}$

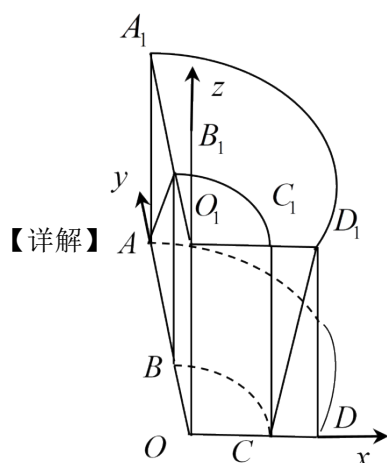
C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{2}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系，以向量法去求解异面直线 AB_1 与 CD_1 所成角的余弦值.



设上底面圆心为 O_1 ，下底面圆心为 O ，连接 OO_1, OC, OB

以 O 为原点，分别以 OC, OB, OO_1 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系

则 $C(1, 0, 0), A(0, 2, 0), B_1(0, 1, 2), D_1(2, 0, 2)$,

则 $\overrightarrow{CD_1} = (1, 0, 2), \overrightarrow{AB_1} = (0, -1, 2)$

$$\cos \langle \overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AB_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{CD_1} \cdot \overrightarrow{AB_1}}{|\overrightarrow{CD_1}| \cdot |\overrightarrow{AB_1}|} = \frac{4}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

又异面直线所成角的范围为 $(0, \frac{\pi}{2}]$

故异面直线 AB_1 与 CD_1 所成角的余弦值为 $\frac{4}{5}$

故选：A

8. 高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号.用他的名字定义的函数称为高斯函数 $f(x) = [x]$ ，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_2 = 6$,

$a_{n+2} + 5a_n = 6a_{n+1}$ ，若 $b_n = [\log_5 a_{n+1}]$ ，为数列 $\left\{ \frac{1000}{b_n b_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和，则 $[S_{2024}] =$ ()

A. 999

B. 749

C. 499

D. 249

【答案】A

【解析】

【分析】构造法判断 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 为等比数列， $\{a_{n+1} - 5a_n\}$ 为常数列，进而可得 $a_{n+1} = 5^n + 1$ ，再由

$n < \log_5(5^n + 1) < n + 1$, 结合新定义有 $b_n = n$, 最后利用裂项相消法求 $\left\{ \frac{1000}{b_n b_{n+1} + 1} \right\}$ 的前 n 项和.

【详解】由 $a_{n+2} + 5a_n = 6a_{n+1}$, 得 $a_{n+2} - a_{n+1} = 5(a_{n+1} - a_n)$, 又 $a_2 - a_1 = 4$,

所以数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是以 4 为首项, 5 为公比的等比数列, 则 $a_{n+1} - a_n = 4 \cdot 5^{n-1}$ ①,

由 $a_{n+2} + 5a_n = 6a_{n+1}$ 得: $a_{n+2} - 5a_{n+1} = a_{n+1} - 5a_n$, 又 $a_2 - 5a_1 = -4$,

所以数列 $\{a_{n+1} - 5a_n\}$ 是常数数列, 则 $a_{n+1} - 5a_n = -4$ ②,

由①②联立得 $a_{n+1} = 5^n + 1$.

因为 $5^n < 5^n + 1 < 5 \times 5^n$, 所以 $\log_5 5^n < \log_5(5^n + 1) < \log_5(5 \times 5^n)$, 即 $n < \log_5(5^n + 1) < n + 1$,

所以 $b_n = [\log_5 a_{n+1}] = [\log_5(5^n + 1)] = n$, 故 $\frac{1000}{b_n b_{n+1}} = \frac{1000}{n \cdot (n+1)} = 1000 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$,

所以 $S_{2024} = 1000 \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2024} - \frac{1}{2025} \right) \right] = 1000 \left(1 - \frac{1}{2025} \right)$, 则 $[S_{2024}] = 999$.

故选: A

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分. 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 方程 $\frac{x^2}{m+2} - \frac{y^2}{m+1} = 1$, 则下列说法正确的是 ()

- A. 当 $-2 < m < -1$ 时, 方程表示椭圆
- B. 当 $m > -1$ 时, 方程表示焦点在 x 轴上的双曲线
- C. 当 $m = -\frac{3}{2}$ 时, 方程表示圆
- D. 当 $m < -2$ 或 $m > -1$ 时, 方程表示双曲线

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据方程中分母的正负及是否相等可判断选项即可.

【详解】当 $-2 < m < -1$ 时, 由 $m+2 > 0$, $-(m+1) > 0$, 且 $m+2 = -(m+1)$ 即 $m = -\frac{3}{2}$ 时, 此方程表示圆,

故 A 不正确;

当 $m > -1$ 时, $m+2 > 0$, $m+1 > 0$, 由方程可知表示焦点在 x 轴上的双曲线, 故 B 正确;

由 A 可知, 当 $m = -\frac{3}{2}$ 时, 方程表示圆, 故 C 正确;

当 $m < -2$ 时, $m+2 < 0$, $-(m+1) > 0$, 故方程表示焦点在 y 轴上的双曲线, 当 $m > -1$ 时, 由 B 可知, 方程表示双曲线, 故 D 正确.

故选: BCD

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 下列说法不正确的是 ()

A. 若 $b^2 = ac$, 则 a, b, c 成等比数列

B. 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则 $\{2^{a_n}\}$ 为等比数列

C. 若 $S_n = n^2 + 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 为等差数列

D. 若 $S_n = 3^n - 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 为等比数列

【答案】AC

【解析】

【分析】根据等比、等差数列的概念可对 AB 进行判断, 根据 S_n 与 a_n 的关系可由 S_n 求出数列 a_n 的通项公式, 从而判断 CD.

【详解】对于 A, 当 $a = b = c = 0$ 时有 $b^2 = ac$, 此时 a, b, c 不成等比数列, 故 A 错;

对于 B, 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设其公差为 d , 则此时有 $\frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}} = 2^{a_{n+1}-a_n} = 2^d > 0$,

所以数列 $\{2^{a_n}\}$ 为等比数列, 故 B 对;

对于 C, 若 $S_n = n^2 + 1$, 则 $a_1 = S_1 = 2$,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 1 - [(n-1)^2 + 1] = 2n - 1 (n \geq 2),$$

$a_1 = 2$ 显然不满足 $a_n = 2n - 1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 不为等差数列, 故 C 错;

对于 D, 若 $S_n = 3^n - 1$, 则 $a_1 = S_1 = 2$,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3^n - 1 - (3^{n-1} - 1) = 3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 2),$$

$a_1 = 2$ 显然满足 $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, 所以数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 故 D 正确;

故选: AC.

11. 已知抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点为 F ，过点 F 的直线 l 交抛物线于 M, N 两点，则下列结论正确的是 ()

- A. 抛物线的焦点坐标是 $(-2, 0)$
- B. 焦点到准线的距离是 4
- C. 若点 P 的坐标为 $(4, 3)$ ，则 $|MP| + |MF|$ 的最小值为 5
- D. 若 Q 为线段 MN 中点，则 Q 的坐标可以是 $(6, 4)$

【答案】BD

【解析】

【分析】根据抛物线方程即可判断 AB；过点 M 作 MM' 垂直于准线，垂足为 M' ，根据抛物线得定义结合图象即可判断 C；假设 Q 的坐标是 $(6, 4)$ ，利用点差法求出直线 l 的方程，再判断焦点是否在直线上，即可判断 D.

【详解】由题意 $F(2, 0)$ ，焦点到准线的距离是 4，故 A 错误，B 正确；

对于 C，过点 M 作 MM' 垂直于准线 $x = -2$ ，垂足为 M' ，

$$\text{则 } |MP| + |MF| = |MP| + |M'F| \geq |M'P| = 6,$$

当且仅当 P, M, M' 三点共线时取等号，

所以 $|MP| + |MF|$ 的最小值为 6，故 C 错误；

对于 D，假设 Q 的坐标是 $(6, 4)$ ，设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ，

$$\text{则 } x_1 + x_2 = 12, y_1 + y_2 = 8,$$

由直线 l 交抛物线于 M, N 两点，

$$\text{得 } \begin{cases} y_1^2 = 8x_1 \\ y_2^2 = 8x_2 \end{cases}, \text{ 两式相减得 } y_1^2 - y_2^2 = 8(x_1 - x_2),$$

$$\text{即 } (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 8(x_1 - x_2),$$

$$\text{所以 } \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)} = \frac{8}{(y_1 + y_2)} = 1, \text{ 即 } k_{MN} = 1,$$

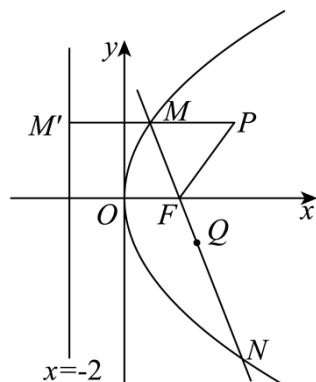
所以直线 l 的方程为 $y - 4 = x - 6$ ，即 $y = x - 2$ ，

将 $F(2, 0)$ 代入得 $0 = 2 - 2$ ，

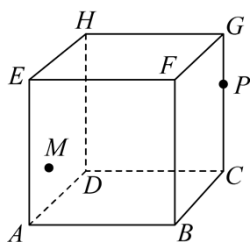
所以直线 l 过点 $F(2,0)$ ，符合题意，

所以 Q 的坐标可以是 $(6,4)$ ，故 D 正确.

故选：BD.



12. 如图，若正方体的棱长为 1，点 M 是正方体 $ABCD-EFGH$ 的侧面 $ADHE$ 上的一个动点（含边界）， P 是棱上 CG 靠近 G 点的三等分点，则下列结论正确的有（ ）



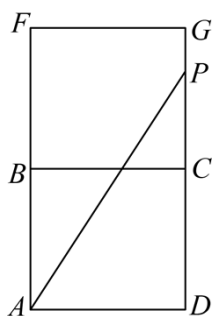
- A. 沿正方体的表面从点 A 到点 P 的最短路程为 $\frac{2\sqrt{10}}{3}$
- B. 保持 PM 与 BH 垂直时， M 的运动轨迹是线段
- C. 若保持 $|PM| = \frac{13}{3}$ ，则点 M 在侧面 $ADHE$ 内运动路径长度为 $\frac{2}{9}\pi$
- D. 当 M 在 D 点时，三棱锥 $B-MEP$ 的体积取到最大值

【答案】BD

【解析】

【分析】利用平面分析可判断 A，利用空间直角坐标系得到轨迹方程为直线方程可判断 B，利用向量坐标表示表示模长得轨迹为圆即可判断 C，利用点到直线的距离公式可判断 D.

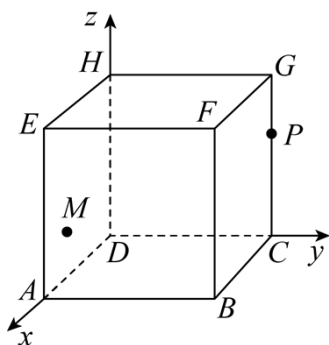
【详解】对于 A，将正方体的下面和右面展开可得如下图形，



连接 AP , 则 $AP = \sqrt{AD^2 + DP^2} = \frac{\sqrt{34}}{3}$,

因此 A 到点 P 的最短路程为 $\frac{\sqrt{34}}{3}$, 故 A 错误;

对于 B, 建系如图, 设 $M(x, 0, z), P(0, 1, \frac{2}{3}), B(1, 1, 0), H(0, 0, 1)$,



$\vec{MP} = (-x, 1, \frac{2}{3} - z), \vec{BH} = (-1, -1, 1)$,

所以 $\vec{MP} \cdot \vec{BH} = x - 1 + \frac{2}{3} - z = 0$, 即 $x - z - \frac{1}{3} = 0$,

又因为 M 是侧面 $ADHE$ 上的一个动点 (含边界),

所以 M 的运动轨迹是线段,

为 DA 靠近点 D 的三等分点和 AE 靠近点 E 三等分点的的连线段.

故 B 正确;

对于 C, 由 B 选项过程可得 $|\vec{MP}| = \sqrt{x^2 + 1 + (\frac{2}{3} - z)^2} = \frac{13}{3}$,

整理得 $x^2 + (z - \frac{2}{3})^2 = \frac{160}{9}$,

所以 M 在侧面 $ADHE$ 内运动路径是以 $(0, 0, \frac{2}{3})$ 为圆心, $\frac{4\sqrt{10}}{3}$ 为半径的圆,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/648015041020007022>