

2024 届云南省峨山彝族自治县第一中学高三下学期第八次质量监测数学试题

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知定义在 $[1, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(3x) = 3f(x)$ ，且当 $1 \leq x \leq 3$ 时， $f(x) = 1 - |x - 2|$ ，则方程

$f(x) = f(2019)$ 的最小实根的值是 ()

- A. 168 B. 249 C. 411 D. 561

2. 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 π ，且满足 $f(x + \varphi) = f(\varphi - x)$ ，则要得到函数

$f(x)$ 的图像，可将函数 $g(x) = \sin \omega x$ 的图像 ()

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度 B. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度
C. 向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度 D. 向右平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度

3. 设函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - t \left(\ln x + x + \frac{2}{x} \right)$ 恰有两个极值点，则实数 t 的取值范围是 ()

- A. $\left(-\infty, \frac{1}{2} \right]$ B. $\left(\frac{1}{2}, +\infty \right)$
C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{e}{3} \right) \cup \left(\frac{e}{3}, +\infty \right)$ D. $\left(-\infty, \frac{1}{2} \right] \cup \left(\frac{e}{3}, +\infty \right)$

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 10x + 1, & x \leq 0 \\ |lgx|, & x > 0 \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ ($a \in R$) 有四个实数解 x_i ($i = 1, 2, 3, 4$)，其中

$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ，则 $(x_1 + x_2)(x_3 - x_4)$ 的取值范围是 ()

- A. $(0, 101]$ B. $(0, 99]$ C. $(0, 100]$ D. $(0, +\infty)$

5. 若 $(1 + ax)(1 + x)^5$ 的展开式中 x^2, x^3 的系数之和为 -10 ，则实数 a 的值为 ()

- A. -3 B. -2 C. -1 D. 1

6. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的周期为 4，当 $x \in [-2, 2)$ 时， $f(x) = \left(\frac{1}{3} \right)^x - x - 4$ ，则 $f(-\log_3 6) + f(\log_3 54) =$

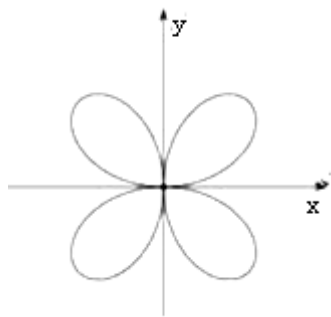
()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{2} - \log_3 2$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3} + \log_3 2$

7. 数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，例如：四叶草曲线就是其中一种，其方程为 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$. 给出下列四个结论：

- ① 曲线 C 有四条对称轴；
② 曲线 C 上的点到原点的最大距离为 $\frac{1}{4}$ ；
③ 曲线 C 第一象限上任意一点作两坐标轴的垂线与两坐标轴围成的矩形面积最大值为 $\frac{1}{8}$ ；
④ 四叶草面积小于 $\frac{\pi}{4}$.

其中，所有正确结论的序号是 ()



- A. ①② B. ①③ C. ①③④ D. ①②④

8. 我们熟悉的卡通形象“哆啦A梦”的长宽比为 $\sqrt{2}:1$. 在东方文化中通常称这个比例为“白银比例”，该比例在设计和建筑领域有着广泛的应用. 已知某电波塔自下而上依次建有第一展望台和第二展望台，塔顶到塔底的高度与第二展望台到塔底的高度之比，第二展望台到塔底的高度与第一展望台到塔底的高度之比皆等于“白银比例”，若两展望台间高度差为 100 米，则下列选项中与该塔的实际高度最接近的是 ()

- A. 400 米 B. 480 米
C. 520 米 D. 600 米

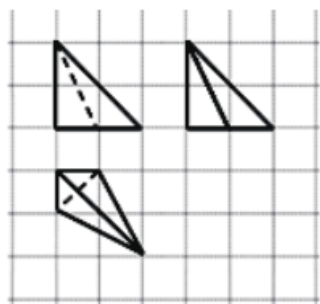
9. 若点 (x, y) 位于由曲线 $y = |x - 2| + 1$ 与 $x = 3$ 围成的封闭区域内 (包括边界)，则 $\frac{y+1}{y-2}$ 的取值范围是 ()

- A. $[-3, 1]$ B. $[-3, 5]$ C. $(-\infty, -3] \cup [5, +\infty)$ D. $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

10. “ $-1 \leq x + y \leq 1$ 且 $-1 \leq x - y \leq 1$ ”是“ $x^2 + y^2 \leq 1$ ”的 ()

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

11. 网格纸上小正方形边长为 1 单位长度，粗线画出的是某几何体的三视图，则此几何体的体积为 ()



- A. 1 B. $\frac{4}{3}$ C. 3 D. 4

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (a-1)x+4, & x \leq 7 \\ a^{x-6}, & x > 7 \end{cases}$ 是 R 上的减函数，当 a 最小时，若函数 $y = f(x) - kx - 4$ 恰有两个零点，则实数 k 的取值范围是 ()

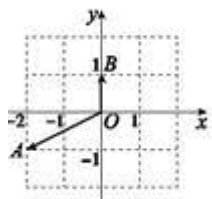
- A. $(-\frac{1}{2}, 0)$ B. $(-2, \frac{1}{2})$
C. $(-1, 1)$ D. $(\frac{1}{2}, 1)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

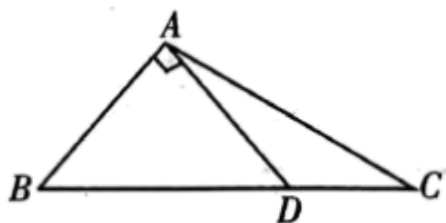
13. 设实数 $a > 0$ ，若函数 $f(x) = \begin{cases} a \ln x - x^2 & (x > 0) \\ x + \frac{1}{x} + a + 2 & (x < 0) \end{cases}$ 的最大值为 $f(-1)$ ，则实数 a 的最大值为_____.

14. 实数 x, y 满足 $\begin{cases} y \geq 1 \\ y \leq 2x - 1 \\ x + y \leq m \end{cases}$ ，如果目标函数 $z = x - y$ 的最小值为 -2 ，则 $\frac{y}{x}$ 的最小值为_____.

15. 如图，在复平面内，复数 z_1, z_2 对应的向量分别是 $\vec{OA}, \vec{OB}$ ，则 $\frac{z_1}{z_2} =$ _____.



16. 如图， $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $2\sqrt{3}$ ， D 为 BC 边上一点，且 $BD = 2DC = 4$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.



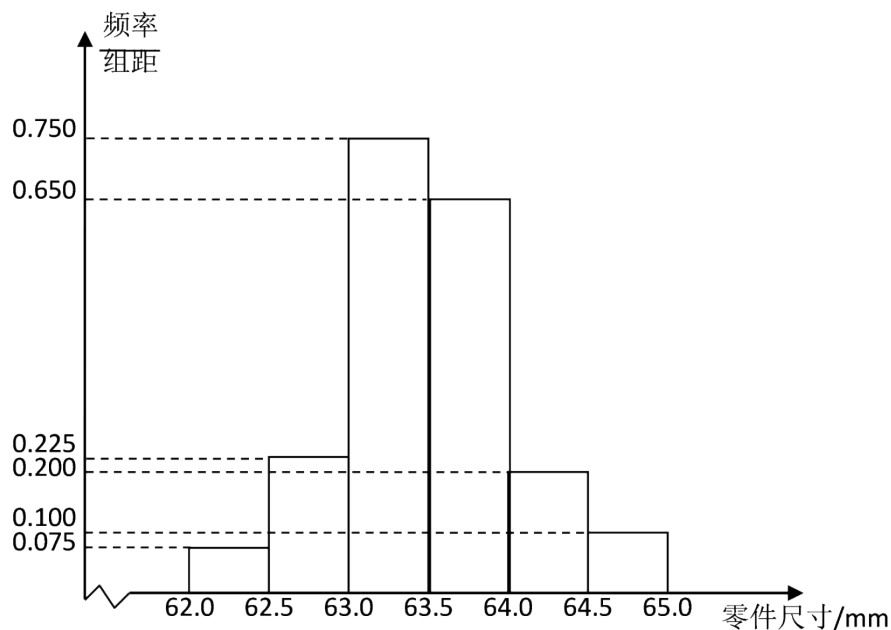
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $c \cos B - b \sin C = 0$ ， $\cos A = \cos 2A$ 。

(1) 求 C ；

(2) 若 $a = 2$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}$

18. (12 分) 某企业质量检验员为了检测生产线上零件的质量情况，从生产线上随机抽取了 80 个零件进行测量，根据所测量的零件尺寸（单位：mm），得到如下的频率分布直方图：



(1) 根据频率分布直方图，求这 80 个零件尺寸的中位数（结果精确到 0.01）；

(2) 若从这 80 个零件中尺寸位于 $[62.5, 64.5)$ 之外的零件中随机抽取 4 个，设 X 表示尺寸在 $[64.5, 65]$ 上的零件个数，求 X 的分布列及数学期望 EX ；

(3) 已知尺寸在 $[63.0, 64.5)$ 上的零件为一等品，否则为二等品，将这 80 个零件尺寸的样本频率视为概率。现对生产线上生产的零件进行成箱包装出售，每箱 100 个。企业在交付买家之前需要决策是否对每箱的所有零件进行检验，已知每个零件的检验费用为 99 元。若检验，则将检验出的二等品更换为一等品；若不检验，如果有二等品进入买家手中，企业要向买家对每个二等品支付 500 元的赔偿费用。现对一箱零件随机抽检了 11 个，结果有 1 个二等品，以整箱检验费用与赔偿费用之和的期望值作为决策依据，该企业是否对该箱余下的所有零件进行检验？请说明理由。

19. (12 分) 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1 = 1$ ，且 $na_{n+1} = (n+1)a_n + 3n(n+1)$ ， $n \in \mathbb{N}^*$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = \frac{n(n+1)}{a_n a_{n+1}}$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，证明： $\frac{1}{4} \leq T_n < \frac{1}{3}$ 。

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x+6| - |m-x|$ ($m \in \mathbb{R}$)。

(I) 当 $m=3$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 5$ 的解集;

(II) 若不等式 $f(x) \leq 7$ 对任意实数 x 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = (2-x)e^x + ax$.

(I) 已知 $x=2$ 是 $f(x)$ 的一个极值点, 求曲线 $f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程

(II) 讨论关于 x 的方程 $f(x) = a \ln x (a \in R)$ 根的个数.

22. (10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases}$ (φ 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴

的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$.

(1) 求曲线 C 的极坐标方程和直线 l 的直角坐标方程;

(2) 若射线 $\theta = \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ 与曲线 C 交于点 A (不同于极点 O), 与直线 l 交于点 B , 求 $\frac{|OA|}{|OB|}$ 的最大值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

先确定解析式求出 $f(2019)$ 的函数值, 然后判断出方程 $f(x) = f(2019)$ 的最小实根的范围结合此时的 $f(x) = x - 3^5$, 通过计算即可得到答案.

【详解】

当 $x \geq 1$ 时, $f(3x) = 3f(x)$, 所以 $f(x) = 3f\left(\frac{x}{3}\right) = 3^2 f\left(\frac{x}{3^2}\right) = \dots = 3^n f\left(\frac{x}{3^n}\right)$, 故当

$3^n \leq x \leq 3^{n+1}$ 时, $\frac{x}{3^n} \in [1, 3]$, 所以 $f(x) = 3^n \left(1 - \left|\frac{x}{3^n} - 2\right|\right) = \begin{cases} 3^{n+1} - x, & x \geq 2 \cdot 3^n \\ x - 3^n, & x < 2 \cdot 3^n \end{cases}$, 而

$2019 \in [3^6, 3^7]$, 所以 $f(2019) = 3^6 \left(1 - \left|\frac{2019}{3^6} - 2\right|\right) = 3^7 - 2109 = 168$, 又当 $1 \leq x \leq 3$ 时,

$f(x)$ 的极大值为 1, 所以当 $3^n \leq x \leq 3^{n+1}$ 时, $f(x)$ 的极大值为 3^n , 设方程 $f(x) = 168$

的最小实根为 t , $168 \in [3^4, 3^5]$, 则 $t \in (3^5, \frac{3^5 + 3^6}{2})$, 即 $t \in (243, 468)$, 此时 $f(x) = x - 3^5$

令 $f(x) = x - 3^5 = 168$, 得 $t = 243 + 168 = 411$, 所以最小实根为 411.

故选: C.

【点睛】

本题考查函数与方程的根的最小值问题, 涉及函数极大值、函数解析式的求法等知识, 本题有一定的难度及高度, 是一道有较好区分度的压轴选这题.

2、C

【解析】

依题意可得 $\omega = 2$, 且 $x = \varphi$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴, 即可求出 φ 的值, 再根据三角函数的平移规则计算可得;

【详解】

解: 由已知得 $\omega = 2$, $x = \varphi$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴, 且使 $f(x)$ 取得最值, 则 $3\varphi = k\pi$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$,

$$f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left[2\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) - \frac{\pi}{2}\right], \quad g(x) = \sin 2x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right),$$

故选: C.

【点睛】

本题考查三角函数的性质以及三角函数的变换规则, 属于基础题.

3、C

【解析】

$f(x)$ 恰有两个极值点, 则 $f'(x) = 0$ 恰有两个不同的解, 求出 $f'(x)$ 可确定 $x = 1$ 是它的一个解, 另一个解由方程

$\frac{e^x}{x+2} - t = 0$ 确定, 令 $g(x) = \frac{e^x}{x+2} (x > 0)$ 通过导数判断函数值域求出方程有一个不是 1 的解时 t 应满足的条件.

【详解】

由题意知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2} - t \left(\frac{1}{x} + 1 - \frac{2}{x^2} \right)$

$$= \frac{(x-1)[e^x - t(x+2)]}{x^2} = \frac{(x-1)(x+2)\left(\frac{e^x}{x+2} - t\right)}{x^2}.$$

因为 $f(x)$ 恰有两个极值点, 所以 $f'(x) = 0$ 恰有两个不同的解, 显然 $x = 1$ 是它的一个解, 另一个解由方程

$\frac{e^x}{x+2} - t = 0$ 确定, 且这个解不等于 1.

令 $g(x) = \frac{e^x}{x+2} (x > 0)$, 则 $g'(x) = \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2} > 0$, 所以函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 从而 $g(x) > g(0) = \frac{1}{2}$,

且 $g(1) = \frac{e}{3}$. 所以, 当 $t > \frac{1}{2}$ 且 $t \neq \frac{e}{3}$ 时, $f(x) = \frac{e^x}{x} - t \left(\ln x + x + \frac{2}{x} \right)$ 恰有两个极值点, 即实数 t 的取值范围是

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{e}{3} \right) \cup \left(\frac{e}{3}, +\infty \right).$$

故选: C

【点睛】

本题考查利用导数研究函数的单调性与极值, 函数与方程的应用, 属于中档题.

4、B

【解析】

画出函数图像, 根据图像知: $x_1 + x_2 = -10$, $x_3 x_4 = 1$, $\frac{1}{10} \leq x_3 < 1$, 计算得到答案.

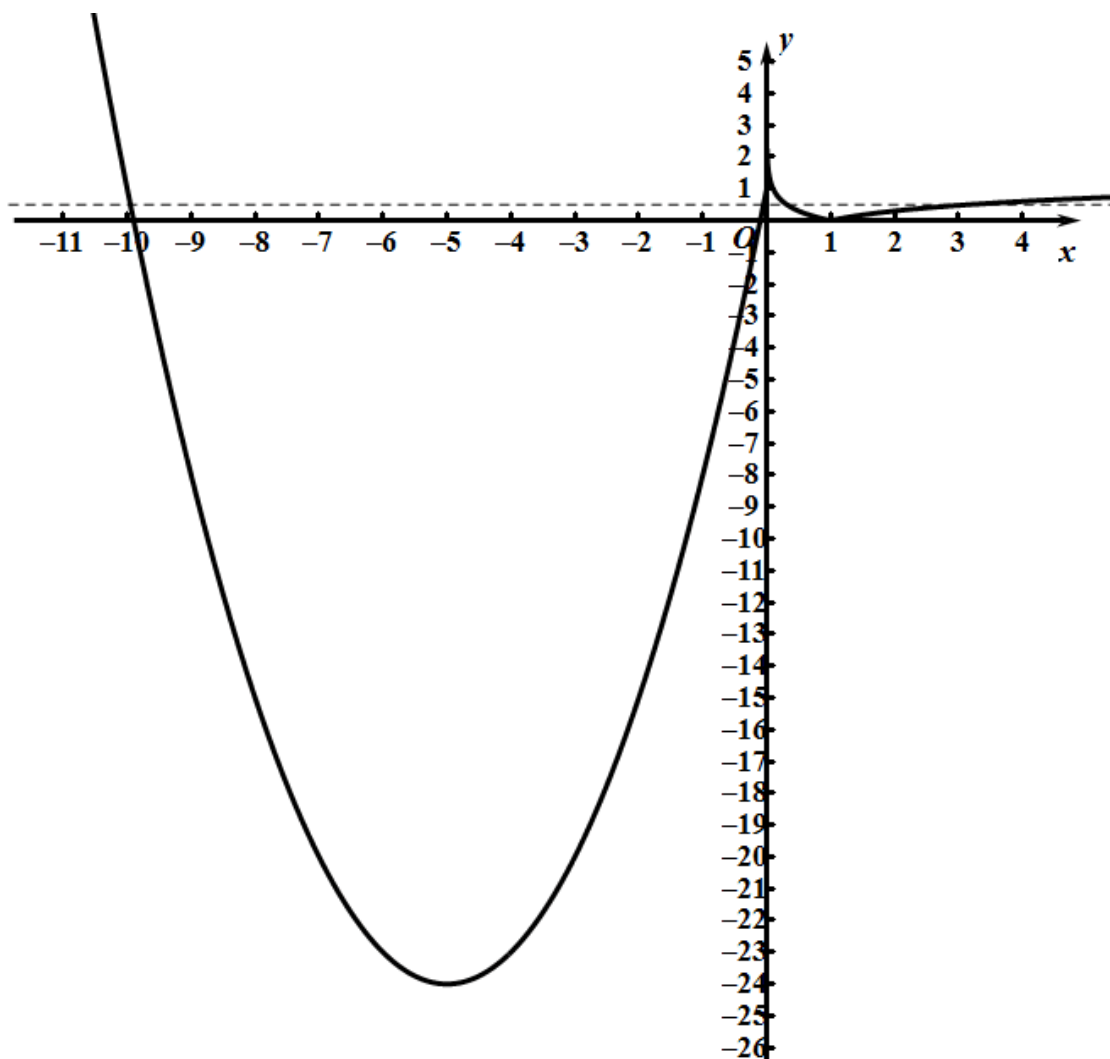
【详解】

$f(x) = \begin{cases} x^2 + 10x + 1, & x \leq 0 \\ |\lg x|, & x > 0 \end{cases}$, 画出函数图像, 如图所示:

根据图像知: $x_1 + x_2 = -10$, $\lg x_3 = -\lg x_4$, 故 $x_3 x_4 = 1$, 且 $\frac{1}{10} \leq x_3 < 1$.

故 $(x_1 + x_2)(x_3 - x_4) = -10 \left(x_3 - \frac{1}{x_3} \right) \in (0, 99]$.

故选: B.



【点睛】

本题考查了函数零点问题，意在考查学生的计算能力和应用能力，画出图像是解题的关键.

5、 B

【解析】

由 $(1+ax)(1+x)^5 = (1+x)^5 + ax(1+x)^5$ ，进而分别求出展开式中 x^2 的系数及展开式中 x^3 的系数，令二者之和等于 -10 ，可求出实数 a 的值.

【详解】

$$\text{由 } (1+ax)(1+x)^5 = (1+x)^5 + ax(1+x)^5,$$

则展开式中 x^2 的系数为 $C_5^2 + aC_5^1 = 10 + 5a$ ，展开式中 x^3 的系数为 $C_5^3 + aC_5^2 = 10 + 10a$ ，

二者的系数之和为 $(10 + 5a) + (10a + 10) = 15a + 20 = -10$ ，得 $a = -2$.

故选：B.

【点睛】

本题考查二项式定理的应用，考查学生的计算求解能力，属于基础题.

6、A

【解析】

因为给出的解析式只适用于 $x \in [-2, 2)$ ，所以利用周期性，将 $f(\log_3 54)$ 转化为 $f(\log_3 \frac{2}{3})$ ，再与 $f(-\log_3 6)$ 一起代入解析式，利用对数恒等式和对数的运算性质，即可求得结果.

【详解】

Q 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的周期为 4

$$\therefore f(\log_3 54) = f(\log_3 54 - 4) = f(\log_3 \frac{2}{3}),$$

$$Q \text{ 当 } x \in [-2, 2) \text{ 时, } f(x) = (\frac{1}{3})^x - x - 4,$$

$$-\log_3 6 \in [-2, 2), \log_3 \frac{2}{3} \in [-2, 2),$$

$$\therefore f(-\log_3 6) + f(\log_3 54)$$

$$= (\frac{1}{3})^{-\log_3 6} - (-\log_3 6) - 4 + (\frac{1}{3})^{\log_3 \frac{2}{3}} - \log_3 \frac{2}{3} - 4$$

$$= (\frac{1}{3})^{\log_3 6} + (\frac{1}{3})^{\log_3 \frac{3}{2}} + (\log_3 6 - \log_3 \frac{2}{3}) - 8$$

$$= 6 + \frac{3}{2} + \log_3 (6 \times \frac{3}{2}) - 8$$

$$= \frac{3}{2}.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查了利用函数的周期性求函数值，对数的运算性质，属于中档题.

7、C

【解析】

①利用 x, y 之间的代换判断出对称轴的条数；②利用基本不等式求解出到原点的距离最大值；③将面积转化为 x, y 的关系式，然后根据基本不等式求解出最大值；④根据 x, y 满足的不等式判断出四叶草与对应圆的关系，从而判断出面积是否小于 $\frac{\pi}{4}$.

【详解】

①：当 x 变为 $-x$ 时， $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变，所以四叶草图象关于 y 轴对称；

当 y 变为 $-y$ 时, $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变, 所以四叶草图象关于 x 轴对称;

当 y 变为 x 时, $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变, 所以四叶草图象关于 $y = x$ 轴对称;

当 y 变为 $-x$ 时, $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$ 不变, 所以四叶草图象关于 $y = -x$ 轴对称;

综上所述: 有四条对称轴, 故正确;

②: 因为 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$, 所以 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2 \leq \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2$,

所以 $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$, 所以 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$, 取等号时 $x^2 = y^2 = \frac{1}{8}$,

所以最大距离为 $\frac{1}{2}$, 故错误;

③: 设任意一点 $P(x, y)$, 所以围成的矩形面积为 xy ,

因为 $(x^2 + y^2)^3 = x^2 y^2$, 所以 $x^2 y^2 = (x^2 + y^2)^3 \geq (2xy)^3$, 所以 $xy \leq \frac{1}{8}$,

取等号时 $x = y = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 所以围成矩形面积的最大值为 $\frac{1}{8}$, 故正确;

④: 由②可知 $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$, 所以四叶草包含在圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 的内部,

因为圆的面积为: $S = \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$, 所以四叶草的面积小于 $\frac{\pi}{4}$, 故正确.

故选: C.

【点睛】

本题考查曲线与方程的综合运用, 其中涉及到曲线的对称性分析以及基本不等式的运用, 难度较难. 分析方程所表示曲线的对称性, 可通过替换方程中 x, y 去分析证明.

8、B

【解析】

根据题意, 画出几何关系, 结合各线段比例可先求得第一展望台和第二展望台的距离, 进而由比例即可求得该塔的实际高度.

【详解】

设第一展望台到塔底的高度为 x 米, 塔的实际高度为 y 米, 几何关系如下图所示:

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/648041011040006117>