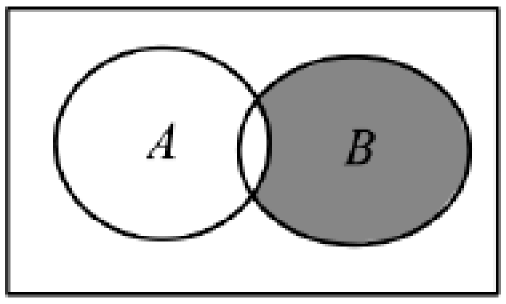
2023 届广东省六校高三上学期第一次联考数学试题

一、单选题

1．已知集合 $A \quad x\left|\frac{x \quad 3}{x \quad 1}\right. \quad 0$ ，$B \quad x|y \quad \ln 3 \quad x$ ，则如图中阴影部分表示的集合为（　　）



A． $1,3$　　B． $3,$　　C． $,3$　　D． $1,3$

【答案】D

【分析】解不等式求得集合 A,B,根据已知图可知阴影部分表示的集合是 $\complement_U A)\cap B$，根据集合的补集以及交集运算，可求得答案.

【详解】解 $\frac{x \quad 3}{x \quad 1} \quad 0$ 得 $x \quad 1$ 或 $x \quad 3$ ，故 $A \quad x\left|\frac{x \quad 3}{x \quad 1}\right. \quad 0 \quad \{x|x \quad 1$ 或 $x \quad 3\}$，

$B \quad x|y \quad \ln 3 \quad x \quad \{x|x \quad 3\}$，

由图可知阴影部分表示的集合是 $\complement_U A)\cap B$,而 $\complement_U A \quad \{x| \ 1 \quad x \quad 3\}$ ，

故 $\complement_U A)\cap B \quad \{x| \ 1 \quad x \quad 3\}$，

故选：D

2.设复数 $z \quad \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}i$,其中 i 是虚数单位，$\bar{z}$ 是 z 的共轭复数,下列判断中错误的是(　　)

A． $z\bar{z} \quad 1$　　B． $z^2 \quad \bar{z}$

C．z 是方程 $x^2 \quad x \quad 1 \quad 0$ 的一个根　　D．满足 $z^n \quad R$ 最小正整数 n 为 3

【答案】B

【分析】A 选项，得到 z 的共轭复数，利用复数的乘法运算法则进行计算；

B 选项，利用复数的乘方运算进行计算；

C 选项，将 $z \quad \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 代入方程进行验证；

D 选项，由 $z \quad \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}i$，计算出 z^2, z^3，得到结论.

【详解】$\bar{z}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$z\bar{z}=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$，A 选项说法正确；

$z^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{4}i^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\bar{z}$，故 B 说法错误；

因为$z^2+z+1=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1=0$，

所以 z 是方程$x^2+x+1=0$的一个根，C 选项说法正确；

因为$z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$z^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$z^3=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{3}{4}i^2+\frac{1}{4}=1$，

所以满足$z^n\in R$最小正整数 n 为 3，D 说法正确.

故选：B

3．直线$y=x-1$过抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点F，且与C交于 A、B 两点，则$|AB|=$

（　　）

A．6　　　　B．8　　　　C．2　　　　D．4

【答案】B

【分析】联立直线与抛物线的方程，根据抛物线的焦点坐标，结合焦点弦长公式求解即可

【详解】因为抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点坐标为$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，

又直线$y=x-1$过抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点 F，所以$p=2$，抛物线C的方程为

$y^2=4x$，由$\begin{cases}y=x-1\\y^2=4x\end{cases}$，得$x^2-6x+1=0$，所以$x_A+x_B=6$，所以

$|AB|=x_A+x_B+p=6+2=8$.

故选：B

4．我们将服从二项分布的随机变量称为二项随机变量，服从正态分布的随机变量称为正态随机变量.概率论中有一个重要的结论：若随机变量$Y\sim B(n,p)$，当n充分大时，二项随机变量Y可以由正态随机变量X来近似地替代，且正态随机变量X的期望和方差与二项随机变量Y的期望和方差相同.法国数学家棣莫弗$(1667-1754)$在 1733 年证明了$p=\frac{1}{2}$时这个结论是成立的，法国数学家、物理学家拉普拉斯$(1749-1827)$在 1812 年证明了这个结论对任意的实数$p\in(0,1)$都成立，因此，人们把这个结论称为棣莫弗—拉普

拉斯极限定理.现抛掷一枚质地均匀的硬币 900 次，利用正态分布估算硬币正面向上次数不少于 420 次的概率为（　　）　附：若 $X \sim N\ \ ,\ ^2$ ，则

$P\ \ \leqslant X \leqslant\ \ 0.6827, P\ \ 2\ \leqslant X \leqslant\ \ 2\ \ 0.9545$,

$P\ \ 3\ \leqslant X \leqslant\ \ 3\ \ 0.9973)$

A． 0.97725　　　B． 0.84135　　　C． 0.65865　　　D． 0.02275

【答案】A

【分析】根据已知条件，结合二项分布的期望与方差公式，求出

$E\ X\ \ 450,\ ^2\ D\ X\ \ 225\ \ 15^2$，再结合正态分布的对称性，即可求解

【详解】抛掷一枚质地均匀的硬币 900 次，设硬币正面向上次数为 X ，则

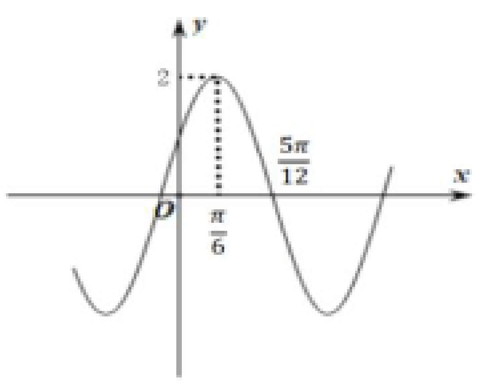
$X\ \ B\ 900,\frac{1}{2}\ ,E\ X\ \ np\ \ 900\ \frac{1}{2}\ \ 450, D\ X\ \ np\ 1\ \ p\ \ 900\ \frac{1}{2}\ \ 1\ \frac{1}{2}\ \ 225$，由题意，$X \sim N\ \ ,\ ^2$ ，且 $E\ X\ \ 450,\ ^2\ D\ X\ \ 225\ \ 15^2$，因为

$P\ \ 2\ \leqslant X \leqslant\ \ 2\ \ 0.9545$，即 $P\ 450\ \ 2\ 15 \leqslant X \leqslant 450\ \ 2\ \ 15\ \ 0.9545$，所以利用正态分布估算硬币正面向上次数不少于 420 次的概率为

$P\ X \geqslant 420\ \ P\ X \geqslant 450\ \ 2\ 15\ \ \frac{0.9545}{2}\ \ 0.5\ \ 0.97725.$

故选：A.

5．已知函数 $f(x)\ \ A\sin(\ x\ \ )(x\ \ R, A\ \ 0,\ \ 0,|\ \ |\ \ \frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则下列说法正确的是（　　）



A．直线 $x\ \ \pi$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴

B． $f(x)$ 图象的对称中心为 $(\ \frac{\pi}{12}\ \ k\pi, 0)$，$k\ \ Z$

C． $f(x)$ 在区间 $\ \frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}$ 上单调递增

D．将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后，可得到一个奇函数的图象

【答案】C

【分析】由已知图象求得函数解析式，将 $x\ \ \pi$ 代入解析式，由其结果判断 A;求出函数

的对称中心可判断 B；当 $x \quad \frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}$ 时，$2x \quad \frac{\pi}{6} \quad [\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，结合正弦函数的单调性判断 C;根据三角函数图象的平移变换可得平移后函数解析式，判断 D.

【详解】由函数图象可知，$A \quad 2$,最小正周期为 $T \quad 4(\frac{5\pi}{12} \quad \frac{\pi}{6}) \quad \pi$，

所以 $\frac{2\pi}{\pi} \quad 2$，

将点 $(\frac{\pi}{6},2)$ 代入函数解析式中，得：$2 \quad 2\sin(\frac{\pi}{3} \quad)$，结合$| \quad | \quad \frac{\pi}{2}$，

所以 $\frac{\pi}{6}$，故 $f(x) \quad 2\sin(2x \quad \frac{\pi}{6})$，

对于 A，当 $x \quad \pi$ 时，$f(\pi) \quad 2\sin(2\pi \quad \frac{\pi}{6}) \quad 1$，故直线 $x \quad \pi$ 不是 $f(x)$ 图象的一条对称轴，A 错误；

对于 B，令 $f(x) \quad 2\sin(2x \quad \frac{\pi}{6}) \quad 0$，则 $2x \quad \frac{\pi}{6} \quad k\pi, k \quad Z$，$x \quad \frac{\pi}{12} \quad \frac{k\pi}{2}, k \quad Z$，

即 $f(x)$ 图象的对称中心为 $(\frac{\pi}{12} \quad \frac{k\pi}{2},0)$，$k \quad Z$，故 B 错误；

对于 C，当 $x \quad \frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}$ 时，$2x \quad \frac{\pi}{6} \quad [\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，由于正弦函数 $y \quad \sin x$ 在 $[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上递增，故 $f(x)$ 在区间 $\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}$ 上单调递增，故 C 正确；

对于 D，将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后，得到

$g(x) \quad 2\sin[2(x \quad \frac{\pi}{12}) \quad \frac{\pi}{6}] \quad 2\sin(2x \quad \frac{\pi}{3})$ 的图象，该函数不是奇函数，故 D 错误；

故选：C

6．足球起源于中国古代的蹴鞠游戏.“蹴”有用脚蹴、踢的含义，“鞠”最早系外包皮革、内饰米糠的球，因而“蹴鞠”就是指古人以脚蹴、踢皮球的活动，如图所示.已知某“鞠”的表面上有四个点 P,A,B,C，满足 $PA \quad 1, PA \quad$ 面 ABC，$AC \quad BC$，若 $V_{P \quad ABC} \quad \frac{2}{3}$，则该“鞠”的体积的最小值为（　　）

A．$\frac{25}{6}\pi$　　B．9　　C．$\frac{9}{2}$　　D．$\frac{9}{8}$

【答案】C

【分析】根据三棱锥的外接球的球心到所有顶点距离相等，且都为球半径，即可找到球心的位置，然后在直角三角形 ABC 中，根据基本不等式即可求解 AB 最小值，进而可得球半径的最小值.

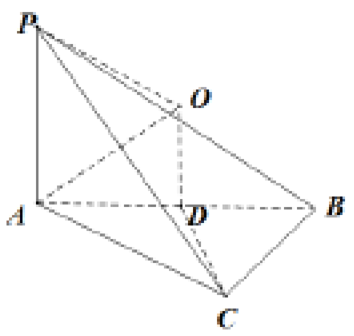
【详解】取 AB 中点为 D ,过 D 作 OD //PA ,且 $OD=\frac{1}{2}PA=\frac{1}{2}$,因为 PA 平面 ABC, 所以 OD 平面 ABC .由于 AC BC ,故 DA DB DC ,进而可知 OA OB OC OP ,所以 O 是球心,OA 为球的半径.

由 $V_{P\ ABC}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}AC\ CB\ PA=\frac{2}{3}\ AC\ CB=4$,又 $AB^2\ AC^2\ BC^2\ 2AC\ BC=8$,当且仅当 AC BC 2,等号成立,故此时 AB $2\sqrt{2}$,所以球半径

$R\ OA\ \sqrt{OD^2\ \ \frac{1}{2}AB^{\ 2}}\ \sqrt{\frac{1}{2}^{\ 2}+\sqrt{2}^{\ 2}}=\frac{3}{2}$,故 $R_{min}=\frac{3}{2}$,体积最小值为

$\frac{4}{3}\pi R^3\ \frac{4}{3}\pi\ \frac{3}{2}^{\ 3}\ \frac{9}{2}\pi$

故选:C



7．设 $a\ \frac{4\ \ln 4}{e^2}$， $b\ \frac{\ln 2}{2}$， $c\ \frac{1}{e}$，则（　　）

A． a c b　　B． a b c　　C． b a c　　D． b c a

【答案】C

【分析】结合已知要比较函数值的结构特点,可考虑构造函数 $f\ x\ \frac{\ln x}{x}$,然后结合导数与单调性关系分析出 $x\ e$时,函数取得最大值 $f\ e\ \frac{1}{e}$,可得 c 最大,然后结合函数单调性即可比较大小.

【详解】设 $f\ x\ \frac{\ln x}{x}$,则 $f\ x\ \frac{1\ \ln x}{x^2}$,

当 $x\ e$时, $f\ x\ 0$,函数单调递减,当 $0\ x\ e$时, $f\ x\ 0$,函数单调递增,

故当 $x\ e$时,函数取得最大值 $f\ e\ \frac{1}{e}$,

因为 $a\ \frac{2\ 2\ \ln 2}{e^2}\ \ \frac{\ln\frac{e^2}{2}}{\frac{e^2}{2}}\ \ f\ \frac{e^2}{2}$,$b\ \ \frac{\ln 2}{2}\ \ \frac{\ln 4}{4}\ \ f\ 4$,$c\ \ \frac{1}{e}\ \ f\ e$,

∵ $e\ \ \frac{e^2}{2}\ \ 4$,

当 $x\ \ e$ 时, $f\ \ x\ \ 0$,函数单调递减,可得 $f\ 4\ \ f\ \frac{e^2}{2}\ \ f\ e$,

即 $b\ \ a\ \ c$.

故选:C

8. 定义在R上的函数 $f\ x$ 满足 $f(\ x)\ \ f(x)\ \ 0, f(x)\ \ f(2\ \ x)$；且当 $x\ \ [0,1]$时,

$f(x)\ \ x^3\ \ x^2\ \ x$. 则方程 $7f(x)\ \ x\ \ 2\ \ 0$所有的根之和为（　　）

A. 14　　　　B. 12　　　　C. 10　　　　D. 8

【答案】A

【分析】根据题中所给的函数性质可得 $f\ x$ 的周期为4且关于 $2,0$,再画图分析

$y\ \ f(x)$ 与 $y\ \ \frac{1}{7}\ \ x\ \ 2$ 的交点对数，进而根据对称性可得根之和即可.

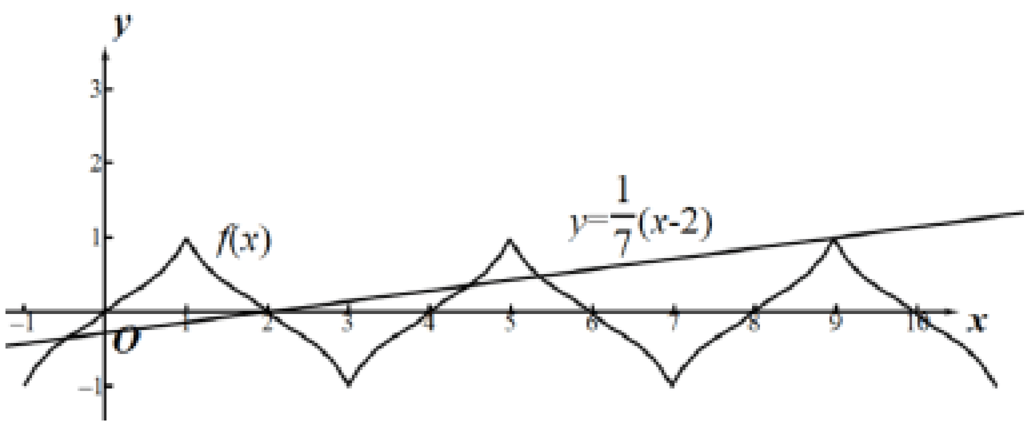
【详解】由 $f(\ x)\ \ f(x)\ \ 0, f(x)\ \ f(2\ \ x)$可得 $f\ x$ 为奇函数，且关于 $x\ \ 1$对称.

又由题意 $f(\ x)\ \ \ f(x)$，故 $f\ x\ \ \ f\ 2\ \ x\ \ \ \ f\ 2\ \ x$ ，所以 $f\ x$ 关于 $2,0$ 对称，

且 $f\ x\ \ \ f\ 2\ \ x\ \ \ f\ 4\ \ x$ ，故 $f\ x$ 的周期为4.

又当 $x\ \ [0,1]$时，$f(x)\ \ x^3\ \ x^2\ \ x$，此时 $f\ \ x\ \ \ 3x^2\ \ 2x\ \ 1\ \ 3\ \ x\ \ \frac{1}{3}^{\ 2}\ \ \frac{2}{3}\ \ 0$，故

$f(x)\ \ x^3\ \ x^2\ \ x$ 在 $x\ \ [0,1]$为增函数.综上可画出 $y\ \ f(x)$的函数部分图象.



又方程 $7f(x)\ \ x\ \ 2\ \ 0$的根即 $y\ \ f(x)$与 $y\ \ \frac{1}{7}\ \ x\ \ 2$ 的交点，易得在区间 $5,2$ ，$2,9$

上均有3个交点，且关于 $2,0$ 对称，加上 $2,0$ 共7个交点，其根之和为 $3\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 14$

故选：A

【点睛】本题主要考查了数形结合解决函数零点的问题，需要根据题意确定函数的性质，

画出简图再根据对称性分析两函数相交的点.属于难题.

二、多选题

9．英国数学家贝叶斯在概率论研究方面成就显著，根据贝叶斯统计理论，随机事件A、B存在如下关系：$P(A|B)=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$.某高校有甲、乙两家餐厅，王同学第一天去甲、乙两家餐厅就餐的概率分别为0.4和0.6.如果他第一天去甲餐厅，那么第二天去甲餐厅的概率为0.6；如果第一天去乙餐厅，那么第二天去甲餐厅的概率为0.5，则王同学（　　）

A．第二天去甲餐厅的概率为0.54

B．第二天去乙餐厅的概率为0.44

C．第二天去了甲餐厅，则第一天去乙餐厅的概率为$\dfrac{5}{9}$

D．第二天去了乙餐厅，则第一天去甲餐厅的概率为$\dfrac{4}{9}$

【答案】AC

【分析】根据题中所给的公式进行逐一判断即可.

【详解】设A_1:第一天去甲餐厅，A_2:第二天去甲餐厅，

B_1:第一天去乙餐厅，B_2:第二天去乙餐厅，

所以$P(A_1)=0.4$，$P(B_1)=0.6$，$P(A_2|A_1)=0.6$，$P(A_2|B_1)=0.5$，

因为$P(A_2|A_1)=\dfrac{P(A_2)P(A_1|A_2)}{P(A_1)}=0.6$，$P(A_2|B_1)=\dfrac{P(A_2)P(B_1|A_2)}{P(B_1)}=0.5$，

所以$P(A_2)P(A_1|A_2)=0.24$，$P(A_2)P(B_1|A_2)=0.3$，

所以有$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(B_1)P(A_2|B_1)=0.4\times0.6+0.6\times0.5=0.54$，

因此选项A正确，$P(B_2)=1-P(A_2)=0.46$，因此选项B不正确；

因为$P(B_1|A_2)=\dfrac{0.3}{P(A_2)}=\dfrac{5}{9}$，所以选项C正确；

$P(A_1|B_2)=\dfrac{P(A_1)P(B_2|A_1)}{P(B_2)}=\dfrac{P(A_1)[1-P(A_2|A_1)]}{P(B_2)}=\dfrac{0.4\times(1-0.6)}{0.46}=\dfrac{8}{23}$，所以选项D不正确，

故选：AC

10．已知函数$f(x)=\sin|x|+|\cos x|$，下列关于此函数的论述正确的是（　　）

A．π是$f(x)$的一个周期

B．函数 $f\ x$ 的值域为 $\sqrt{2},1$

C．函数 $f\ x$ 在 $\frac{3\pi}{4},\frac{4\pi}{3}$ 上单调递减

D．函数 $f\ x$ 在 $2\pi,2\pi$ 内有 4 个零点

【答案】BD

【分析】判断 A 选项，举出反例即可；

判断 B、D 选项，从函数奇偶性和 $x\ [0,\quad)$，$f(x)\ \ f(x\ \ 2\pi)$，得到周期为 2π，进而得到函数的图象性质，得到零点和值域；

判断 C 选项，代入检验得到函数单调性，判断 C 选项．

【详解】解：选项 A：因为 $f(\frac{\pi}{4})\ \ 0\ \ f(\pi\ \ \frac{\pi}{4})\ \ \sqrt{2}$，$\pi$不是 $f\ x$ 的一个周期，故 A 错误；

选项 B、D：函数 $f(x)$ 定义域为 R，并且 $f(\ x)\ \ f(x)$，所以函数为偶函数；因为 $x\ [0,\quad)$，$f(x)\ \ f(x\ \ 2\pi)$，为周期函数，

故仅需研究函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的值域及零点个数即可，因为 $x\ [0,\frac{\pi}{2}]\bigcup[\frac{3\pi}{2},2\pi]$ 时，$f(x)\ \ \sin x\ \ \cos x\ \ \sqrt{2}\sin(x\ \ \frac{\pi}{4})$；

当 $x\ [\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ 时，$f(x)\ \ \sin x\ \ \cos x\ \ \sqrt{2}\sin(x\ \ \frac{\pi}{4})$；

当 $x\ [0,\frac{\pi}{2}]\bigcup[\frac{3\pi}{2},2\pi]$ 时，令 $x\ \ \frac{\pi}{4}\ \ t\ [\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}]\bigcup[\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}]$，

则 $y\ \ \sqrt{2}\sin t$，$t\ [\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}]\bigcup[\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}]$，可得 $y\ [\ \sqrt{2},1]$ 且仅一个零点；

当 $x\ [\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ 时，令 $x\ \ \frac{\pi}{4}\ \ t\ [\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}]$，则 $y\ \ \sqrt{2}\sin t$，$t\ [\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}]$，

可得 $y\ [\ \sqrt{2},1]$ 且仅一个零点；

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[\ \sqrt{2},1]$ 且在 $[\ 2\pi,2\pi]$ 上有 4 个零点．故选项 B 正确，选项 D 正确．

选项 C：函数 $f(x)$ 在 $[\frac{3\pi}{4},\frac{4\pi}{3}]$ 上，有 $f(x)\ \ \sin x\ \ \cos x\ \ \sqrt{2}\sin(x\ \ \frac{\pi}{4})$，所以 $x\ \ \frac{\pi}{4}\ [\pi,\frac{19\pi}{12}]$，则得函数 $f(x)$ 在该区间上不单调．故选项 C 错误．

故选：BD．

11．已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}\ \ \frac{y^2}{b^2}\ \ 1\ a\ \ b\ \ 0$ 的左，右顶点分别为 A_1，A_2，点 P，Q 是双曲线 C 上关于原点对称的两点（异于顶点），直线 PA_1，PA_2，QA_1 的斜率分别为 k_{PA_1}，k_{PA_2}，

k_{QA_1}，若$k_{PA_1}\ \ k_{PA_2}\ \ \frac{3}{4}$，则下列说法正确的是（　　）

A．双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{4}x$　　　　B．双曲线 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{7}}{2}$

C．$k_{PA_1}\ \ k_{QA_1}$ 为定值　　　　　　　　　　D．$\tan\ \ A_1PA_2$ 的取值范围为 $0,$

【答案】BCD

【分析】求得双曲线 C 的渐近线方程判断选项 A；求得双曲线 C 的离心率判断选项 B；化简$k_{PA_1}\ \ k_{QA_1}$后再判断选项 C；求得 $\tan\ \ A_1PA_2$ 的取值范围判断选项 D.

【详解】设 $P\ \ x,y$ ，则 $y^2\ \ b^2\ \ \frac{x^2}{a^2}\ \ 1$ ，因为 $A_1\ \ a,0$ ，$A_2\ \ a,0$ ，

故 $k_{PA_1}\ \ k_{PA_2}\ \ \frac{y}{x\ \ a}\frac{y}{x\ \ a}\ \ \frac{y^2}{x^2\ \ a^2}\ \ \frac{b^2\ \frac{x^2}{a^2}\ \ 1}{x^2\ \ a^2}\ \ \frac{b^2}{a^2}$，

依题意有$\frac{b^2}{a^2}\ \ \frac{3}{4}$，所以$\frac{b}{a}\ \ \frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以双曲线 C 的渐近线方程为 $y\ \ \ \frac{b}{a}x\ \ \ \frac{\sqrt{3}}{2}x$，

离心率 $e\ \ \sqrt{\frac{a^2\ \ b^2}{a^2}}\ \ \sqrt{1\ \ \frac{b^2}{a^2}}\ \ \frac{\sqrt{7}}{2}$，故选项 A 错误，选项 B 正确；

因为点 P，Q 关于原点对称，所以四边形 A_1PA_2Q 为平行四边形，即有$k_{A_1Q}\ \ \ k_{A_2P}$，

所以$k_{A_1P}\ \ k_{A_1Q}\ \ \ k_{A_1P}\ \ k_{A_2P}\ \ \ \frac{3}{4}$，故 C 正确；

设 PA_1 的倾斜角为　，PA_2 的倾斜角为　，由题意可得 $\tan\ \ \ \tan\ \ \ \frac{3}{4}$，

则　$A_1PA_2\ \ |\ \ \ \ |$，根据对称性不妨设 P 在 x 轴上方，则$\beta>\alpha$，则　A_1PA_2　　　，

则 $\tan\ \ A_1PA_2\ \ \ \tan\ \ \ \ \ \ \frac{\tan\ \ \ \ \tan}{1\ \ \tan\ \ \ \tan}\ \ \frac{4}{7}\ \ k_{PA_2}\ \ \ k_{PA_1}\ \ \ \frac{4}{7}\ \ k_{PA_2}\ \ \ \frac{3}{4k_{PA_2}}$ ，

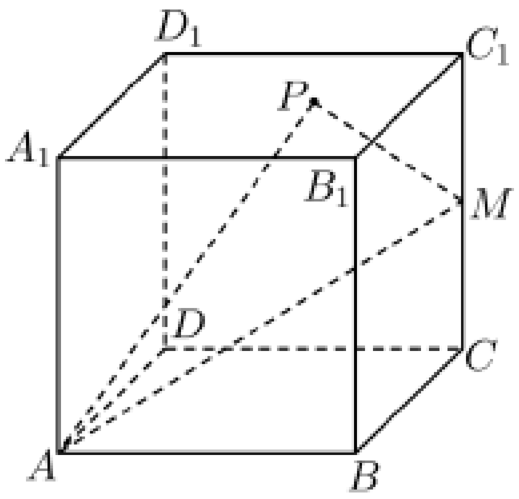
因为 P 在 x 轴上方，则$k_{PA_2}\ \ \ \frac{\sqrt{3}}{2}$，或 $\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ \ k_{PA_2}\ \ \ 0$，

函数 $f\ \ x\ \ \ \ x\ \ \frac{3}{4x}$ 在 $\frac{\sqrt{3}}{2},0$ 和 $\frac{\sqrt{3}}{2},$　　上单调递增，

所以 $\tan\ \ A_1PA_2\ \ \ \ 0,$　　，故 D 正确.

故选：BCD.

12．如图，已知正方体 $ABCD\ \ \ A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 M 为 CC_1 的中点，点 P 为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 上的动点，则（　　）



A．满足 MP //平面 BDA_1 的点 P 的轨迹长度为 $\sqrt{2}$

B．满足 $MP \quad AM$ 的点 P 的轨迹长度为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C．不存在点 P，使得平面 AMP 经过点 B

D．存在点 P 满足 $PA \quad PM \quad 5$

【答案】ACD

【分析】A 选项，作出辅助线得到面面平行，从而得到满足 MP //平面 BDA_1 的点 P 的轨迹长度为 EF 的长，为 $\sqrt{2}$，A 正确；

B 选项，作出辅助线得到满足 $MP \quad AM$ 的点 P 的轨迹长度为线段 ST 的长度，

又因为 $ST \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$，B 错误；

C 选项，作出辅助线，得到平面 ABM 截正方体所得的截面，根据截面与与正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 没有交点，故不存在点 P，使得平面 AMP 经过点 B；

D 选项，作出辅助线，求出 $PA \quad PM$ 的最小值，且存在点 P 使得 $PA \quad PM \quad 2\sqrt{2} \quad \sqrt{5} \quad 5$，故可得到存在点 P 满足 $PA \quad PM \quad 5$.

【详解】如图 1，取 B_1C_1 的中点 F，取 C_1D_1 的中点 E，连接 EF，FM，EM，

因为 M 为 CC_1 的中点，

所以 EF //BD，ME //A_1B，FM //A_1D，

因为 $EF \quad$ 平面 A_1BD，$BD \quad$ 平面 A_1BD，

所以 EF //平面 A_1BD，同理可得：MF //平面 A_1BD，

因为 $EF, MF \quad$ 平面 EFM，

所以平面 EFM //平面 A_1BD，

因为点 P 为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 上的动点，

所以当 P 在线段 EF 上时，MP //平面 BDA_1，

故满足 MP //平面 BDA_1 的点 P 的轨迹长度为 EF 的长，为 $\sqrt{2}$，A 正确；

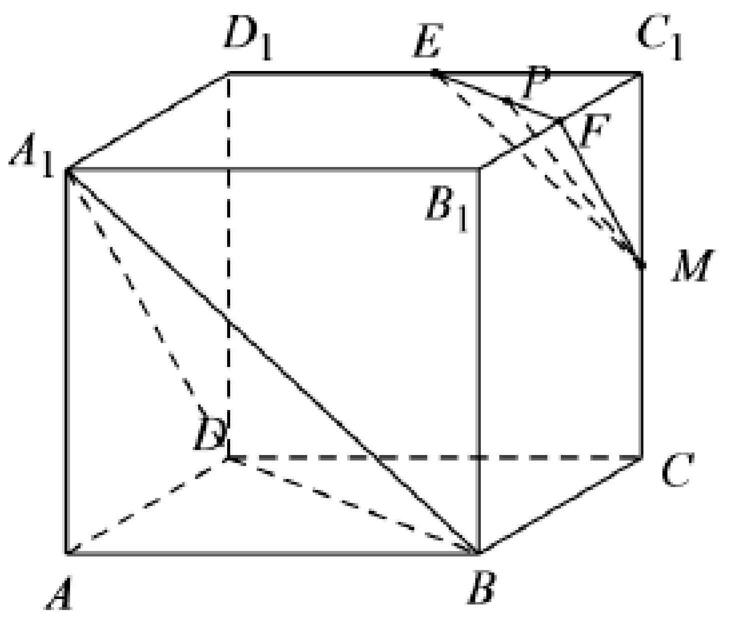


图1

如图2，过点M 作MQ ⊥AM，交A_1C_1于点Q，可得：$Rt\triangle ACM$　$Rt\triangle MC_1Q$，

因为正方体$ABCD$　$A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，点M 为CC_1的中点，

所以$AC\quad 2\sqrt{2},CM\quad C_1M\quad 1$，故$\frac{AC}{CM}\quad \frac{C_1M}{C_1Q}$，

即$\frac{2\sqrt{2}}{1}\quad \frac{1}{C_1Q}$，解得：$C_1Q\quad \frac{\sqrt{2}}{4}$，

过点Q 作$ST//B_1D_1$，交C_1D_1于点S，交B_1C_1于点T，

则ST　平面ACC_1A_1，因为AM　平面ACC_1A_1，

所以ST　AM，

当点P位于线段ST上时，满足MP　AM，

即满足MP　AM 的点P的轨迹长度为线段ST的长度，

又因为$ST\quad \frac{\sqrt{2}}{2}$，所以B选项错误；

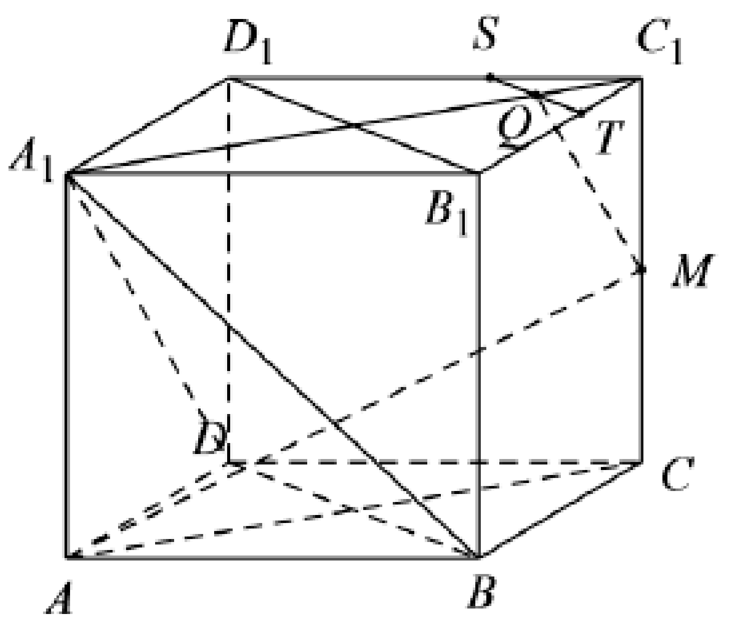


图2

如图3，连接BM，取DD_1中点H，连接AH，HM，则可知平面ABM 截正方体所得的截

面为 ABMH ，与正方形$A_1B_1C_1D_1$没有交点，

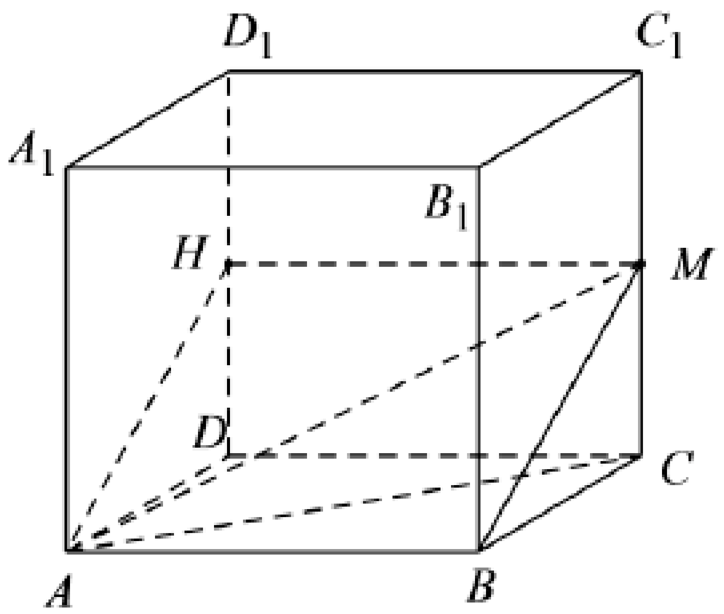


图3

所以不存在点 P，使得平面 AMP 经过点 B

故 C 正确；

如图 4，延长CC_1到点 O，使得$C_1O\ \ MC_1$，则点 M 关于平面$A_1B_1C_1D_1$的对称点为 O，

连接 AO 交正方形$A_1B_1C_1D_1$于点 P，则此时使得$PA\ \ PM$ 取得最小值，

最小值为$AO\ \ \sqrt{AC^2\ \ CO^2}\ \ \sqrt{8\ \ 9}\ \ \sqrt{17}$，

当点 P 与B_1重合时，此时$PA\ \ PM\ \ 2\sqrt{2}\ \ \sqrt{5}\ \ 5$，

故存在点 P 满足$PA\ \ PM\ \ 5$

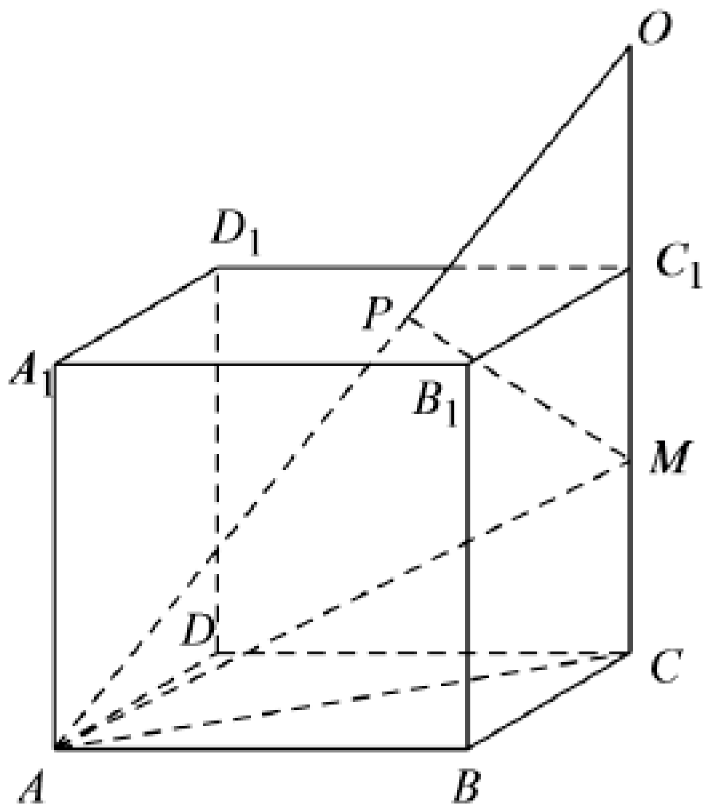


图4

D 正确；

故选：ACD